Analisi e Geometria 1
Esercitazione del 28 ottobre 2021
Preparazione alla prima prova parziale
Questionario 12 (con risposte e commenti)

1 Vero o falso?

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false, motivando le risposte.

1. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste un numero irrazionale α tale che $x < \alpha < y$.

2. Vale: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)^{x^2} = 1$.

3. Denotiamo con S^1 la circonferenza unitaria nel piano complesso:
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
Definiamo: $\mathbb{R} \xrightarrow{F} S^1$, $\vartheta \to F(\vartheta) = e^{i\vartheta}$. Allora F è suriettiva e F non è iniettiva.

4. La formula di Taylor al secondo ordine di $f(x) = \log x - \sin(x-1)$, centrata in $x_0 = 1$, con il resto di Peano, è data da
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \qquad \text{(per } x \to 1.\text{)}$$

5. Si può scrivere:
$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x + x\varphi(x)$$
dove $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$.

6. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ non nullo, z e $1/\overline{z}$ hanno argomenti opposti (a meno di multipli interi di 2π).

7. Definiamo: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \xrightarrow{F} \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $F(z) = \frac{1}{z}$. Allora F è invertibile.

8. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(2x) - 4 & \text{se } x < 0 \\ 3(x-1) + e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$
Allora:
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 4 \quad \text{e} \quad f'(0) = 4$$

9. La successione reale $a_n = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n\right|$ tende a zero.

10. Per $x \to +\infty$, $(2x)^x \sim (x)^{2x}$.

2 Risposte e brevi commenti

1. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste un numero irrazionale α tale che $x < \alpha < y$.

   VERO. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che
   $$x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$$
   da cui segue: $x < r + \sqrt{2} < y$. Poniamo $\alpha = r + \sqrt{2}$. Allora α è irrazionale (perché?) e $x < \alpha < y$. Dunque, anche l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali è denso in $\mathbb{R}$.

2. Vale: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^{x^2} = 1$.

   FALSO. Per $x \to +\infty$:
   $$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^{x^2} &= e^{\log\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^{x^2}} \\ &= e^{x^2 \log\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)} \\ &= e^{x^2\left(-\frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{4} + o(1)} \to e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

3. Denotiamo con S^1 la circonferenza unitaria nel piano complesso:
   $$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
   Definiamo: $\mathbb{R} \xrightarrow{F} S^1$, $\vartheta \to F(\vartheta) = e^{i\vartheta}$. Allora F è suriettiva e F non è iniettiva.

   VERO. Si ricordi che: $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$.

   (a) F è suriettiva. Infatti, ogni $z \in S^1$ si scrive (in almeno un modo) come $z = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$, dove $\vartheta = \arg$ (z) è un argomento di z.

   (b) F non è iniettiva. Infatti, se $z = F(\vartheta) = e^{i\vartheta}$, si ha anche $z = F(\vartheta') = e^{i\vartheta'}$ per ogni $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$, $z \in \mathbb{Z}$.

   EXTRA. Si noti che $\mathbb{R} \xrightarrow{F} S^1$, $\vartheta \to F(\vartheta) = e^{i\vartheta}$, è un omomorfismo dal gruppo additivo $\mathbb{R}$ al gruppo moltiplicativo S^1 (il gruppo delle rotazioni del piano con centro nell'origine), cioè:
   $$F(\vartheta + \vartheta') = F(\vartheta)F(\vartheta')$$

4. La formula di Taylor al secondo ordine di $f(x) = \log x - \sin(x - 1)$, centrata in $x_0 = 1$, con il resto di Peano, è data da
   $$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \qquad \text{(per } x \to 1.)$$

   VERO. Per $x \to 1$ valgono questi sviluppi:

   $\log(x) = \log(1 + (x - 1)) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x - 1)^2)$;

   $\sin(x - 1) = (x - 1) + o((x - 1)^2)$.

   Dunque, per $x \to 1$,
   $$\begin{aligned}\log x - \sin(x - 1) &= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2) - \left[(x - 1) + o((x - 1)^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)\end{aligned}$$

5. Si può scrivere:
$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x + x\varphi(x)$$
dove $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$.

VERO. Più in generale, lo sviluppo al primo ordine di $(1+t)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è dato da:
$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t), \quad \text{per } t \to 0$$
Nel nostro caso, $\sqrt[3]{1-x} = (1+t)^\alpha$, dove $\alpha = \frac{1}{3}$ e $t = -x$.

6. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ non nullo, z e $1/\overline{z}$ hanno argomenti opposti (a meno di multipli interi di 2π).

FALSO. z e $1/\overline{z}$ hanno lo stesso argomento. Infatti, se $z = re^{i\vartheta}$, si ha $\overline{z} = re^{i(-\vartheta)} = re^{-i\vartheta}$ e quindi
$$(\overline{z})^{-1} = \left(re^{-i\vartheta}\right)^{-1} = r^{-1}e^{i\vartheta}$$

7. Definiamo: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \xrightarrow{F} \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $F(z) = \frac{1}{z}$. Allora F è invertibile.

VERO. Si ha $F^{-1} = F$. Infatti, da $w = F(z) = \frac{1}{z}$ segue: $z = \frac{1}{w} = F(w)$.

8. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(2x) - 4 & \text{se } x < 0 \\ 3(x-1) + e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$
Allora:
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 4 \quad \text{e} \quad f'(0) = 4$$

FALSO. La funzione f non è continua in 0, e pertanto non è derivabile in 0.

È vero però che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 4$. Infatti, la derivata f', su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, è data da
$$f'(x) = \begin{cases} 4\cos(2x) & \text{se } x < 0 \\ 3 + e^x & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{3}$$
Allora
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 4$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 4$$
Si noti allora che quest'ultima uguaglianza *non implica, a priori*, la derivabilità di f in $x_0 = 0$ (anzi, questo esempio dice che non implica nemmeno la continuità di f in $x_0 = 0$).

Ricordiamo però che vale questo fatto:

Se g è derivabile in ogni punto $x \neq x_0$ di un intorno di x_0, g è <u>continua</u> in x_0 e esiste finito il $\lim_{x\to x_0} g'(x) = \ell (\in \mathbb{R})$, allora g è derivabile in x_0 e $g'(x_0) = \ell$.

Infatti, calcoliamo il limite del rapporto incrementale di g relativo a x_0:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
Ricorriamo al Teorema dell'Hospital (le cui ipotesi sono soddisfatte). Poiché (per ipotesi) il limite del rapporto delle derivate esiste e vale ℓ
$$\lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} g'(x) = \ell$$

il Teorema dell'Hospital assicura che anche il limite del rapporto incrementale di g esiste e vale ℓ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) = \ell$$

9. La successione reale $a_n = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n\right|$ tende a zero.

   Vero. Usando la proprietà $|zw| = |z||w|$, abbiamo:

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right|^n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

10. Per $x \to +\infty$, $(2x)^x \sim (x)^{2x}$.

    Falso. Per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(2x)^x}{(x)^{2x}} &= \frac{e^{x \log(2x)}}{e^{2x \log x}} \\ &= e^{x \log 2 + x \log x - 2x \log x} \\ &= e^{x(\log 2 - \log x)} \to 0 \end{aligned}$$

perché l'esponente $x(\log 2 - \log x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$.