Analisi e Geometria 1
Esercitazione del 4 novembre 2021
Preparazione alla prima prova parziale
Questionario 11

1 Vero o falso?

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false, motivando la risposta.

1. Se $(-1,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una funzione pari e derivabile, allora la funzione derivata f' è dispari.
2. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (in ogni punto del suo dominio $\mathbb{R}$).
3. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$
è continua in 0.
4. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2}$$
è derivabile in 0.
5. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$
Allora f è derivabile in $x_0 = 0$.
6. Poniamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{4}$$
Il $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.
7. La funzione $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$ ha in $x_0 = 1$ un punto di minimo locale.
8. Siano z_1, z_2 numeri complessi non nulli, con $\arg(z_1) = \vartheta_1$ e $\arg(z_2) = \vartheta_2$. Allora:
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
(Gli argomenti $\arg(z)$ si considerano definiti a meno di multipli interi di 2π).
9. Siano $r, \alpha \in \mathbb{R}$, r razionale non nullo e α irrazionale. Allora $r\alpha$ è irrazionale.
10. Esiste un numero reale $a > 0$ soddisfacente: Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a < \frac{1}{n}$.
11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a)f(b) < 0$ e f è strettamente decrescente, allora f ha in $[a,b]$ uno zero, e uno soltanto.
12. Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua con dominio D. Se l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ è un intervallo, allora il dominio D di f è un intervallo.