NUMERI REALI

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Settembre 2012.

Indice

1 Numeri reali.

1.1 Numeri naturali, interi, razionali

Rivediamo brevemente le proprietà degli insiemi numerici.

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri *naturali* è costituito dagli interi non negativi:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Sono i numeri che si utilizzano per contare gli elementi di un insieme finito. I numeri naturali si possono sommare e moltiplicare tra loro: il risultato è ancora un numero naturale. Sia per la somma che per il prodotto valgono la proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (ab)c = a(bc)$$

e la proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \qquad a + b = b + a \qquad ab = ba$$

[0]File tex: numeri-reali-2012.tex

Inoltre

$$\forall a \in \mathbb{N} \qquad a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri (tedesco: Zahlen) *interi* relativi è

$$\mathbb{Z} = \{..... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi, per ogni numero a esiste un (unico) numero, denotato $-a$, detto l'*opposto* di a, per il quale vale $a+(-a) = 0$. Vale inoltre la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: se a,b,c sono numeri interi, allora

$$a(b + c) = ab + ac$$

Le due operazioni di somma e prodotto, collegate tra loro dalla proprietà distributiva, fanno di $\mathbb{Z}$ un *anello* (commutativo).

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri *razionali* (latino *ratio*, rapporto) è costituito da tutte le frazioni $\frac{m}{n}$, dove m, n sono in $\mathbb{Z}$ e n è diverso da zero. Più precisamente, dichiariamo equivalenti due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ se $mn' = m'n$ (per esempio, le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti), e chiamiamo numero razionale una classe di frazioni equivalenti. Ad esempio, le frazioni $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{6}$ e $\frac{12}{9}$ appartengono alla stessa classe di equivalenza, e quindi sono diverse rappresentazioni dello stesso numero razionale. In definitiva

$$\mathbb{Q} = \{ \text{ (classi di equivalenza di) frazioni } \frac{m}{n}, \;\; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si definiscono le operazioni di somma e prodotto. Valgono ancora la proprietà commutativa e associativa, sia per la somma che per il prodotto, e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Ogni numero razionale $\neq 0$ è *invertibile*, cioè per ogni razionale non nullo a esiste un (unico) numero razionale, denotato con a^{-1} oppure $\frac{1}{a}$ e detto *inverso* di a, per il quale si ha $a \cdot a^{-1} = 1$. Precisamente, l'inverso di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$. Un anello con la proprietà che ogni elemento non nullo ha inverso moltiplicativo, si dice un *campo*. Quindi $\mathbb{Q}$ è un campo. Inoltre, $\mathbb{Q}$ è un *campo ordinato*: questo significa che è definita una *relazione di ordine* totale $\leq$ in $\mathbb{Q}$ che è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, nel senso che nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali valgono le seguenti proprietà:

1) Per ogni a, b, c, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$

2) Per ogni a, b e per ogni $c > 0$, se $a \leq b$ allora $ac \leq bc$.

3) Se $a \leq b$ e $c < 0$, allora $ac \geq bc$

(La terza proprietà si deduce dalle prime due. Dimostrarlo).

1.2 La scoperta dei numeri irrazionali.

Per effettuare misure - in senso matematico, cioè per calcolare rapporti tra grandezze omogenee -, non bastano i numeri razionali. Questa scoperta è attribuita generalmente a Pitagora e alla sua scuola. Ad esempio, la misura della diagonale di un quadrato, quando si assume come unità di misura il lato, non è espressa da un numero razionale. In termini più algebrici:

Teorema 1.1 ("Irrazionalità di $\sqrt{2}$") *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esistano due interi m, n tali che $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Possiamo sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè che non abbiano divisori $\neq 1$ in comune. (In caso contrario, li dividiamo entrambi per il loro massimo comun divisore). L'uguaglianza $m^2 = 2n^2$ dice che m^2 è pari; quindi m è pari. (Infatti, il quadrato di un dispari è dispari). Poniamo allora $m = 2s$. Con la sostituzione $m = 2s$, l'uguaglianza $m^2 = 2n^2$ diventa $(2s)^2 = 2n^2$, da cui $2s^2 = n^2$. Dunque n^2 è pari e quindi, ragionando come sopra, anche n è pari. In conclusione, m e n sono entrambi pari. Assurdo, perché m e n sono primi tra loro. $\square$

1.3 Definizione provvisoria dei numeri reali come allineamenti decimali

Per il momento, diamo una definizione provvisoria (e imprecisa) dei numeri reali: i numeri reali sono rappresentati da tutti i possibili *allineamenti decimali*, illimitati oppure no. Un allineamento si dice illimitato se contiene infinite cifre non nulle dopo la virgola; si dice limitato se le cifre dopo la virgola sono tutte uguali a zero, da un certo posto in poi. Per motivi che saranno chiariti in seguito (vedere gli esercizi), non usiamo il periodo 9. (Vedremo che se ne può fare a meno). Dimostreremo più avanti che un numero reale è razionale se, e solo se, è rappresentato da un allineamento periodico (incluso il caso del periodo zero, come per il numero razionale $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5000...$). I numeri irrazionali sono dunque rappresentati da allineamenti decimali illimitati non periodici. Ad esempio, questo è il caso dei numero irrazionali $\sqrt{2} = 1.414..$ oppure $\pi = 3.14..$ eccetera.

1.4 Il campo ordinato $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri interi sono definite due operazioni fondamentali: quella di somma e quella di prodotto. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la loro somma si denota '$a + b$' e il loro prodotto con '$a \cdot b$'.

Per l'operazione '+' di somma valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
$$a + b = b + a$$
2. *Proprietà associativa* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
3. *Esistenza dell'elemento neutro della somma.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale
$$a + 0 = 0 + a = a$$
Il numero 0 si chiama *elemento neutro* della somma.
4. *Esistenza dell'elemento opposto.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{R}$, detto *opposto* di a, per il quale si ha
$$a + b = b + a = 0$$
L'opposto di a è il numero $b = -a$.

Per l'operazione '$\cdot$' di prodotto valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. *Proprietà associativa* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro del prodotto.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

   Il numero 1 si dice *elemento neutro* del prodotto.

4. *Esistenza dell'elemento inverso.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{R}$, detto *inverso* di a, per il quale si ha

$$a \cdot b = bcdota = 1$$

   L'opposto di a è il numero $b = a^{-1}$.

Vale inoltre la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Le due operazioni di somma e prodotto, collegate tra loro dalla proprietà distributiva, fanno di $\mathbb{R}$ un *campo*.

Inoltre, $\mathbb{R}$ è un *campo ordinato*: questo significa che è definita una *relazione di ordine* totale $\leq$ in $\mathbb{R}$ che è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, nel senso che nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali valgono le seguenti proprietà:

1) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$

2) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$, se $a \leq b$ allora $ac \leq bc$.

3) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$, se $a \leq b$ allora $ac \geq bc$

(La terza proprietà si deduce dalle prime due. Dimostrarlo).

1.5 La proprietà di completezza dei numeri reali

Il campo ordinato $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un campo *completo* (a differenza del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali), nel senso che vale la proprietà espressa dal seguente:

Teorema 1.2 (Proprietà di completezza) *Se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ sia $a \leq b$, allora esiste almeno un numero reale λ tale che $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ sia $a \leq \lambda \leq b$.*

Un tale elemento si dice un *elemento separatore* della coppia di sottoinsiemi A, B.

Il campo ordinato completo $\mathbb{R}$ dei numeri reali si chiama anche *retta reale*, perché la retta della geometria euclidea - da definirsi con assiomi opportuni -, si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$. Per definire una tale corrispondenza biunivoca, occorre fissare un *sistema di riferimento* sulla retta, vale a dire occorre scegliere due punti sulla retta: un punto origine O e un punto 1 (o, in termini più 'fisici': un'origine, un verso e un'unità di misura).

Usando in modo essenziale la proprietà di completezza, si dimostra che in $\mathbb{R}$ esiste la radice quadrata di numeri non negativi:

Teorema 1.3 *Per ogni numero reale $y \geq 0$, esiste un unico numero reale $x \geq 0$ per il quale $x^2 = y$.*

Questo unico numero si denota $\sqrt{y}$ (radice quadrata di y). Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema.

1.6 Estremo superiore

Dato un insieme non vuoto S di numeri reali, diciamo che un numero M è *il massimo* di S se M è in S e, per ogni x in S, si ha $x \leq M$. Analogamente, si dice che un numero m è *il minimo* di S se m appartiene all'insieme S e, per ogni x in S, si ha $x \geq m$.

Ogni insieme numerico finito ha sempre un unico elemento massimo, e un unico minimo. Le cose vanno diversamente con gli insiemi infiniti, per i quali non è sempre garantita l'esistenza del massimo. Per esempio, l'insieme $S = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ non ha elemento massimo. (Dimostrarlo: basta provare che $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$). La nozione di estremo superiore, che ora introduciamo, ha lo scopo di sostituire quella di massimo, quando questo non esista. Quando il massimo esiste, coincide con l'estremo superiore. Premettiamo alcune definizioni.

Definizione 1.4 *Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.*

Un numero reale y si dice una limitazione superiore *per E se, per ogni x in E, si ha $x \leq y$.*

E si dice limitato superiormente *se esistono limitazioni superiori per E.*

Si danno definizioni analoghe per limitazioni inferiori e insiemi inferiormente limitati.

Esempi. a) Ogni numero reale $y \geq 0$ è una limitazione superiore per l'insieme E dei numeri reali negativi.

b) L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato.

c) Ogni sottoinsieme non vuoto dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha un minimo.

d) Ogni numero reale ≥ 7 è una limitazione superiore per l'intervallo $(4, 7)$.

Facendo uso in modo essenziale dell'assioma di completezza dei numeri reali, si dimostra il seguente

Teorema 1.5 (Esistenza dell'estremo superiore) *Ogni insieme di numeri reali non vuoto e superiormente limitato ha una* minima *limitazione superiore.*

Tale minima limitazione superiore si chiama *estremo superiore* di E, e si denota $\sup E$.

Dimostrazione. Sia E un insieme di numeri reali non vuoto e superiormente limitato e sia K l'insieme delle limitazioni superiori per E. Per ipotesi, sia E che K sono non vuoti. Inoltre, per ogni x in E e per ogni y in K, si ha $x \leq y$. Allora, per la proprietà di completezza dei numeri reali, esiste un numero reale λ tale che $x \leq \lambda \leq y$, per ogni x in E e per ogni y in K. Ora, la disuguaglianza: per ogni x in E $x \leq \lambda$, dice che λ è una limitazione superiore di E; la disuguaglianza: per ogni y in K, $\lambda \leq y$, dice che tale λ è la minima limitazione superiore. Il teorema è così dimostrato. $\square$

In modo analogo, ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ inferiormente limitato ha una *massima* limitazione inferiore, denotata $\inf E$ e detta *estremo inferiore* di E.

2 Esercizi

Esercizio 2.1 (Un numero moltiplicato per zero dà zero) *Dimostrare che* $a \cdot 0 = 0$, *per ogni* a *in* $\mathbb{Z}$ *(Usare la distributività).*

Esercizio 2.2 ("Più per meno fa meno") *Dimostrare che, in* $\mathbb{Z}$, $a(-b) = -(ab)$.

Esercizio 2.3 ("Meno per meno fa più ") *Dimostrare che, in* $\mathbb{Z}$, $(-a)(-b) = ab$.

Esercizio 2.4 (Legge di annullamento del prodotto) *Dimostrare che, nel campo dei razionali* $\mathbb{Q}$, *se* $ab = 0$, *allora o* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

Esercizio 2.5 *Si dimostri che* $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ *è irrazionale.*

Esercizio 2.6 *Il* valore assoluto *o* modulo *di un numero* $a \in \mathbb{R}$ *si definisce così:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0; \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Esercizio 2.7 *Dimostrare che l'estremo superiore dell'insieme*

$$\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

è uguale a 1.

Suggerimenti

2.1 $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Di qui (sommando a sinistra e a destra l'opposto di $a \cdot 0$), segue $a \cdot 0 = 0$.

2.2 $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$. Dunque, per definizione di opposto, $a(-b) = -(ab)$.

2.3 Parafrasare la dimostrazione di **2.2**.

2.4 Supponiamo $0 = ab$ e $a \neq 0$. Allora a è invertibile. Moltiplicando per a^{-1}, abbiamo: $0 = a^{-1}0 = a^{-1}ab = 1 \cdot b = b$.

2.5 Supponiamo, per assurdo, che $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ sia razionale: $\frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Allora $\frac{p}{q} - \frac{1}{2} = \sqrt{2}$. Ma quest'ultima uguaglianza è assurda, perché ....