# Lavoro. Energia.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, febbraio 2015.

## Indice



## 1 Lavoro è 'forza per spostamento'

`Lavoro di una forza costante lungo un cammino rettilineo.` Il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ per spostare un corpo da $A$ a $B$ lungo il vettore $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$ è

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

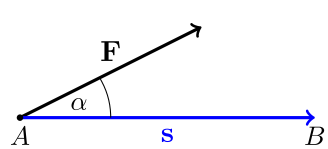


**Figura 1:** Il corpo si sposta lungo il vettore $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$. In ogni istante del moto la forza $\mathbf{F}$ è costante.

Ricordando la definizione di prodotto scalare si ottiene:

[0]Nome file: lavoro-energia.tex

$$L = F\,s\,\cos\alpha$$

dove $\alpha$ è l'angolo individuato da $\mathbf{F}$ e $\mathbf{s}$.

Ovviamente se $\mathbf{F}$ è perpendicolare a $\mathbf{s}$, cioè se $\alpha = 90^{\circ}$, il lavoro è nullo.

**Lavoro di una forza con direzione costante e intensità variabile lungo un cammino rettilineo.**

Si consideri un corpo sul quale agisce una forza $\mathbf{F}$ avente direzione costante e intensità che varia a seconda del punto di applicazione della forza.

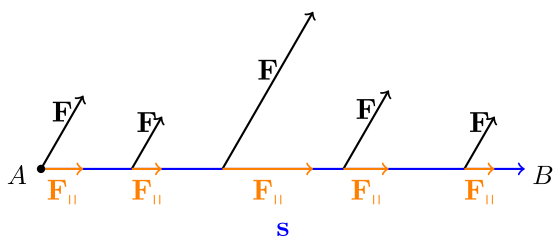


**Figura 2:** Il corpo si sposta lungo il vettore $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$. In ogni istante del moto la forza $\mathbf{F}$ ha direzione costante mentre l'intensità varia al variare della posizione.

Se lo spostamento del corpo avviene lungo il vettore $\mathbf{s}$ che va da $A$ a $B$ allora per determinare il lavoro si può procedere così: si suddivida il vettore spostamento $\mathbf{s}$ in tanti piccoli spostamenti $d\mathbf{s}$. Su ognuno di essi la forza $\mathbf{F}_{\shortparallel}$ si può considerare con buona approssimazione costante. Allora il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $d\mathbf{s}$ è

$$dL = F_{\shortparallel}\,ds \tag{1.1}$$

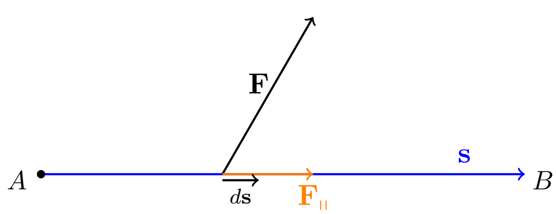


**Figura 3:** Lungo lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ la forza $\mathbf{F}$ si può considerare costante.

Ora, per trovare il lavoro complessivo bisogna sommare tutti i lavori elementari $dL$, cioè

$$L = \texttt{Somme di}\ \ (F_{\shortparallel}\,ds) \tag{1.2}$$

L'uguaglianza precedente si scrive, in notazione integrale, così

$$L = \int_A^B F_{\shortparallel}\,ds \tag{1.3}$$

**Esercizio 1.1** (Interpretazione del lavoro come area)**.** *Si consideri il grafico di $F_{\shortparallel}$ in funzione dello spazio $s$. Allora il lavoro $L$ trovato in (1.3) si può interpretare geometricamente così: $L$*

*è l'area delimitata dal grafico di $F_{\shortparallel}$ dall'asse $s$ e dalle due rette verticali di equazione $s = s_A$ e $s = s_B$. Spiegare questo fatto utilizzando una figura.*

Ovviamente se la forza $F$ ha la stessa direzione di $s$ allora $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\shortparallel}$ e l'uguaglianza (1.3) diventa

$$L = \int_A^B F\,ds \tag{1.4}$$

`Lavoro compiuto dalla forza peso.`

**Esercizio 1.2.** *Un corpo di massa $m$ è in caduta libera in prossimità della superficie terrestre. Qual è il lavoro compiuto dalla forza di gravità $\boldsymbol{F}$ quando il corpo si sposta dalla posizione $A$ alla posizione $B$?*

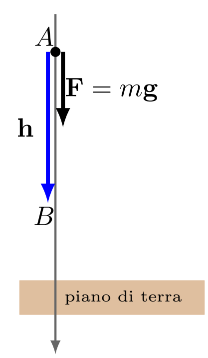


**Figura 4:** Il corpo di massa $m$ cade verticalmente da $A$ a $B$.

*Soluzione.*

La forza di gravità che agisce sul corpo è

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

Durante il suo moto di caduta il corpo si sposta lungo il vettore $\mathbf{h} = \overrightarrow{AB}$ che ha la stessa direzione della forza peso. Pertanto il lavoro compiuto è

$$L = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{h} = mg\,h \tag{1.5}$$

Il lavoro della forza di gravità è positivo per ogni cammino nel quale il punto di partenza $(A)$ si trova più in alto del punto di arrivo $(B)$, invece per ogni cammino da $B$ a $A$ il lavoro è negativo.

`Lavoro della forza elastica.`

**Esercizio 1.3.** *L'estremo libero di una molla, di costante elastica $k$ si trova in $O$ quando la molla è a riposo. Se la molla viene allungata del vettore $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{d}$, qual è il lavoro compiuto dalla molla durante l'allungamento?*

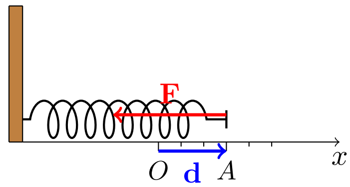


**Figura 5:** La molla è stata allungata da $O$ (posizione di riposo) ad $A$.

*Soluzione.*

La forza $\mathbf{F}$ esercitata dalla molla è direttamente proporzionale al suo allungamento:

$$\mathbf{F}(x) = -k\,\mathbf{x}$$

dove $0 \leq x \leq d$ è il tratto di cui è stata allungata la molla. Quindi, il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo il cammino rettilineo $\overrightarrow{OA} = \mathbf{d}$ è

$$L = \int_0^d -k\,x\,dx = -\frac{1}{2}\,k\,d^2 \tag{1.6}$$

[Spiegare].

Quindi, in generale, il lavoro compiuto dalla forza elastica è

$$L = -\frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{1.7}$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore che indica di quanto (e in quale verso) si è allungata la molla rispetto alla posizione di riposo $O$.

**Esercizio 1.4.** *Dall'uguaglianza (1.6) si deduce immediatamente che il lavoro di* $\boldsymbol{F}$ *corrispondente a una compressione della molla di un medesimo tratto* $d$ *è lo stesso. Perchè? Spiegare.*

## 1.1 Lavoro compiuto da una forza variabile. Caso bidimensionale.

Si consideri il caso di un punto materiale che si sposta da un punto $A$ a un punto $B$ lungo un cammino orientato $\gamma$. Sul punto materiale agisce una forza $\mathbf{F}$ variabile in direzione e intensità ($\mathbf{F}$ è una forza 'piana', cioè appartiene sempre al piano che contiene $\gamma$).

Non si esclude che sul punto materiale possano agire altre forze.

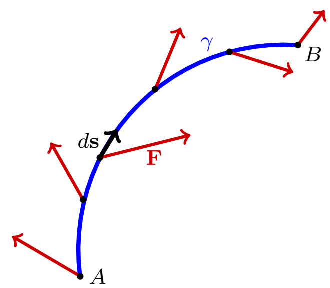


**Figura 6:** Un punto materiale si sposta da $A$ a $B$ lungo il cammino evidenziato in blù. La forza $\mathbf{F}$ varia in direzione e intensità.

Per determinare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $\gamma$ si può fare così: si suddivida la curva orientata $\gamma$ in tanti vettori infinitesimi $d\mathbf{s}$; su ognuno di essi la forza $\mathbf{F}$ si può considerare con buona approssimazione costante. Quindi il lavoro elementare compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $d\mathbf{s}$ è

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

posto $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ e $d\mathbf{s} = (dx, dy)$ si ottiene

$$dL = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) = F_x\,dx + F_y\,dy \tag{1.8}$$

Per trovare il lavoro totale occorre sommare tutti i lavori elementari, cioè

$$L = \texttt{Somme di}\ \ (F_x\,dx + F_y\,dy) \tag{1.9}$$

in notazione integrale si scrive

$$L = \int_\gamma F_x\,dx + F_y\,dy \tag{1.10}$$

# 2 Energia cinetica.

L'energia cinetica è l'energia associata allo *stato di moto* di un corpo. Quanto più grande è la velocità di un corpo tanto maggiore è la sua energia cinetica. Se rispetto al sistema di riferimento prescelto il corpo è fermo la sua energia cinetica è zero.

**Definizione 2.1.** *L'energia cinetica di un corpo di massa $m$ che all'istante $t$ possiede velocità $v$ è*

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1}$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è il `joule`:

$$1\texttt{joule} = 1\,\mathrm{J} = 1\,\frac{\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{2.2}$$

## 2.1 Teorema dell'energia cinetica.

`Caso di una forza costante e spostamento rettilineo.`

**Problema 2.2.** *Si consideri un corpo di massa $m$ sul quale agisce una forza costante. Se il moto del corpo avviene lungo un cammino rettilineo $\boldsymbol{x}$ che parte da $A$ e arriva in $B$ si esprima il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ lungo $\boldsymbol{x}$ in funzione della velocità del corpo.*

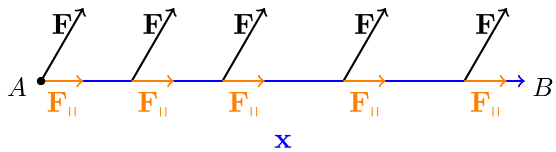


**Figura 7:** Il corpo si sposta lungo il vettore $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$. In ogni istante del moto la forza $\mathbf{F}$ è costante.

Sia $\alpha$ l'angolo (costante) individuato da $\mathbf{F}$ e da $\mathbf{x}$. Se $\alpha = 90^{o}$ il lavoro compiuto dalla forza è nullo.

Se $\alpha \neq 90^{o}$ (con $0 \leq \alpha \leq 180^{o}$) il corpo è soggetto a una accelerazione costante $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{F}_{\parallel}}{m}$ diretta come il vettore $\mathbf{x}$; pertanto il corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Dette $v_A$, $v_B$ le velocità possedute dal corpo in $A$ e in $B$, si ha: $a = \dfrac{v_B - v_A}{t}$ e $x = \dfrac{v_B + v_A}{2}t$ (si vedano le equazioni che caratterizzano il moto rettilineo uniformemente accelerato). Pertanto il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $\mathbf{x}$ è

$$\begin{aligned} L &= F_{\parallel} x \\ &= ma\,x \\ &= m\,\frac{v_B - v_A}{t}\,\frac{v_B + v_A}{2}t \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quindi il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\mathbf{x}$ è uguale alla differenza dell'energia cinetica del corpo in $B$ e quella in $A$.

Il risultato precedente, dimostrato nel caso di una forza costante, vale anche nel caso più generale di forze variabili (in direzione e intensità). Vale cioè il seguente teorema

**Teorema 2.3 (Teorema dell'energia cinetica.).** *Sia $\boldsymbol{F}$ la risultante delle forze esterne agenti su un corpo di massa $m$. Se il corpo si sposta dal punto iniziale $A$ al punto finale $B$ lungo il cammino orientato $\gamma$ (che connette $A$ a $B$) allora il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ lungo $\gamma$ è uguale alla differenza di energia cinetica del corpo tra gli estremi del cammino, cioè*

$$L_\gamma = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{2.4}$$

*Dimostrazione.* (Cenni.)

`Caso unidimensionale.`

Si consideri dapprima il caso di uno spostamento rettilineo da $A$ a $B$ e di una forza $\mathbf{F}$ diretta sempre come il vettore $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ (l'intensità della forza è variabile). In questo caso il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ è (si veda (1.4)) è dato da

$$L_{AB} = \int_A^B F\,dx \tag{2.5}$$

Essendo $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ (seconda legge della dinamica) e $dx = v\,dt$ si ottiene

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \textstyle\int_A^B F\,dx \\ &= \displaystyle\int_A^B m\,\frac{dv}{dt}\,vdt \\ &= \textstyle\int_A^B mv\,dv \\ &= \tfrac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) \end{aligned}$$

`Caso bidimensionale.` Si consideri ora il caso di un corpo di massa $m$ che si muove da $A$ a $B$ lungo un cammino orientato $\gamma$ sotto l'azione di una forza $\mathbf{F}$, variabile in direzione e intensità.

Si suddivida la curva orientata $\gamma$ in tanti vettori infinitesimi $d\mathbf{s}$; su ognuno di essi la forza $\mathbf{F}$ si può considerare con buona approssimazione costante. Quindi il lavoro elementare compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $d\mathbf{s}$ è

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Posto $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ e $d\mathbf{s} = (dx, dy)$ si ottiene (si veda l'uguaglianza 1.8):

$$dL = F_x\,dx + F_y\,dy$$

Pertanto il lavoro totale compiuto da $\mathbf{F}$ lungo il cammino $\gamma$ è

$$L_\gamma = \int_A^B F_x\,dx + \int_A^B F_y\,dy$$

L'integrale $\int_A^B F_x\,dx$ esprime il lavoro fatto da $F_x$ nella direzione dell'asse $x$; $F_x$ e $dx$ hanno la medesima direzione e pertanto si tratta di un caso unidimensionale. Considerazioni del tutto analoghe si possono ovviamente fare per l'integrale $\int_A^B F_y\,dy$. Si ricava:

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \textstyle\int_A^B F_x\,dx + \int_A^B F_y\,dy \\ &= \tfrac{1}{2}m(v_{Bx}^2 - v_{Ax}^2) + \tfrac{1}{2}m(v_{By}^2 - v_{Ay}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) \end{aligned}$$

∎

**Esercizio 2.4.** *L'energia cinetica $K$ può essere negativa?*

# 3 Lavoro lungo una linea chiusa. Indipendenza dal cammino.

Vale il seguente teorema

**Teorema 3.1.** *Sia $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ un campo di forze in $\mathbb{R}^2$. Le condizioni seguenti sono equivalenti*

(i) *Il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ lungo ogni cammino chiuso $\gamma$ contenuto in $\mathbb{R}^2$ è zero:*

$$L_\gamma = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

(ii) *Comunque si fissino due punti $P, Q$ in $\mathbb{R}^2$, il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ è sempre lo stesso per tutti i cammini orientati $\gamma$ da $P$ a $Q$ (cioè , non dipende dalla scelta del cammino orientato da $P$ a $Q$).*

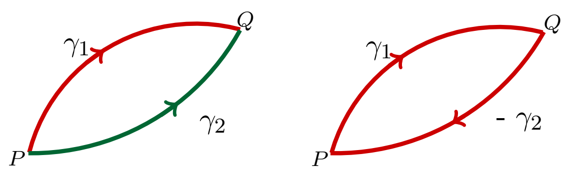


**Figura 8:** (a) Le curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono due cammini orientati da $P$ a $Q$. (b) La curva $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ è un cammino chiuso.

*Dimostrazione.* [da scrivere]

## 3.1 Forze conservative.

**Definizione 3.2** (Forze conservative.). *Un campo di forze $\boldsymbol{F}$ si dice* conservativo *se vale la condizione* (i) *o, equivalentemente se vale la condizione* (ii)*. In caso contrario il campo si dice* non conservativo.

Il campo gravitazionale e quello generato da una molla ideale sono conservativi. La forza di attrito è non conservativa.

# 4 Energia potenziale.

Il lavoro compiuto dalla forza conservativa $\mathbf{F}$ per spostare un oggetto dal punto iniziale $P$ al punto finale $Q$ non dipende dal cammino orientato $\gamma$ effettivamente percorso.

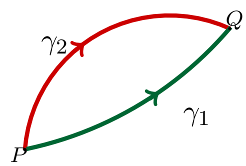


**Figura 9:** Se **F** è conservativa il lavoro non dipende dal cammino: $L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$.

Se $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono due cammini orientati che partono da $P$ e arrivano a $Q$ si ha:

$$L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$$

Pertanto, per indicare il lavoro compiuto da una forza conservativa **F** nello spostare un corpo da $P$ a $Q$ non serve precisare lungo quale curva avviene lo spostamento; d'ora in poi si scriverà

$$L_\gamma = L_{PQ}$$

dove $PQ$ indica un qualsiasi cammino orientato da $P$ a $Q$. Ora, è possibile dare la seguente definizione

**Definizione 4.1** (Variazione di energia potenziale.)**.** *Un corpo soggetto all'azione di una forza conservativa **F** viene spostato dal punto iniziale $P$ al punto finale $Q$ lungo una certo cammino orientato $\gamma$. Si chiama* variazione di energia potenziale $\Delta U$ *l'opposto del lavoro compiuto da **F** per spostare il corpo da $P$ a $Q$ lungo un qualsiasi cammino orientato che connette i due punti, cioè*

$$\Delta U = -L_{PQ} \tag{4.1}$$

Quindi la quantità $\Delta U$ dipende solo dal punto iniziale $P$ e dal punto finale $Q$. Questo fatto permette di definire una funzione scalare $U$, detta "energia potenziale", che dipende esclusivamente dalla posizione $X$ occupata dal corpo, cioè $U = U(X)$.

**Definizione 4.2** (Energia potenziale.)**.** *Si consideri un corpo soggetto all'azione di una forza conservativa **F** che si trova in un punto $X$ qualsiasi. Fissato in modo arbitrario un punto $P$, si chiama* energia potenziale *del corpo in $X$ la quantità*

$$U(X) = U(P) - L_{PX}$$

L'energia potenziale $U$ posseduta dal corpo in $X$ è una forma di energia immagazzinata che può essere totalmente recuperata e trasformata in energia cinetica.

## 4.1 Principio di conservazione dell'energia meccanica per forze conservative.

Dal teorema dell'energia cinetica e dall'uguaglianza (4.1) si ottiene:

$$L_{PQ} = \Delta K = -\Delta U \tag{4.2}$$

cioè

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{4.3}$$

Ciò significa che il nostro corpo, nello spostarsi da $P$ a $Q$ ha subito una variazione di energia cinetica $\Delta K$ che è stata compensata da una variazione uguale e di segno opposto di energia potenziale. Questo fatto deve valere per tutti i punti $X$ che costituiscono le fasi intermedie del moto, vale cioè il `principio di conservazione dell'energia meccanica`:

*se un corpo è soggetto all'azione della forza conservativa* $\boldsymbol{F}$ *allora, in ogni istante del moto, la somma della sua variazione di energia cinetica e della sua variazione di energia potenziale vale zero*

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{4.4}$$

In altre parole, qualunque sia la posizione $X$ del corpo durante il suo moto da $P$ a $Q$ *la somma della sua energia cinetica* $K$ *e della sua energia potenziale si mantiene costante*

$$K + U = E \tag{4.5}$$

La costante $E$ è detta energia meccanica totale.

`Principio di conservazione dell'energia meccanica. Caso unidimensionale.` Sia $\mathbf{F}$ un campo di forze conservativo, definito in $\mathbb{R}$ (diciamo l'asse $x$). Se un particella di massa $m$ si muove lungo l'asse $x$ sotto l'azione della sola forza $F$, allora dall'uguaglianza (4.5) si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \tag{4.6}$$

dove $v$ è la velocità della particella quando occupa la posizione $x$ mentre $E$ è costante e si chiama *energia meccanica totale* In altre parole, se F è conservativo l'energia meccanica $E = K + U$ della particella si mantiene costante in ogni istante del moto della particella.

## 4.2 Forza di gravità e principio di conservazione dell'energia.

Si considerino i seguenti due esempi: un oggetto di massa $m$ che si trova all'altezza $h$ dal suolo è soggetto all'azione della sola forza di gravità :

(a) cade verticalmente;

(b) scivola lungo il piano inclinato.

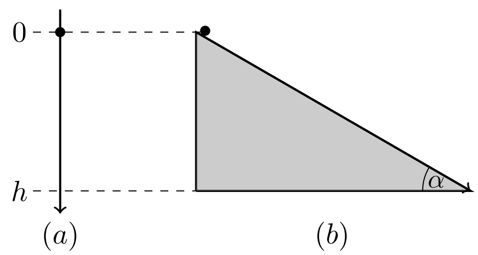


**Figura 10:** L'oggetto di massa $m$ si trova inizialmente all'altezza $h$. Il moto di discesa verticale (lungo il piano inclinato) avviene in assenza di attriti.

Galileo per primo capì che i due problemi sono della stessa natura: nel primo caso l'oggetto ha un'accelerazione pari a $g$ mentre nel secondo la sua accelerazione è minore e vale $g \sin \alpha$, dove $\alpha$ è l'angolo che il piano inclinato forma con l'orizzontale.

Come si è dimostrato precedentemente, in entrambi i casi l'oggetto raggiunge il suolo con la medesima velocità

$$v = \sqrt{2\,g\,h} \tag{4.7}$$

cioè

$$\frac{1}{2}v^2 = g\,h \tag{4.8}$$

La velocità con cui i corpi arrivano al suolo è la stessa e dipende solo dall'altezza $h$. Il risultato, per certi versi sorprendente, stupì persino Galileo! Ora, moltiplicando per $m$ entrambi i termini dell'uguaglianza (4.8) si ottiene:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = mg\,h \tag{4.9}$$

$\frac{1}{2}\,mv^2$ esprime la variazione $\Delta K$ di energia cinetica del corpo relativa al suo moto mentre $mg\,h$ è il lavoro $L$ compiuto contro la forza di gravità per innalzare la massa $m$ fino all'altezza $h$. Quindi si ha: $\Delta K = L$. Quest'ultima uguaglianza permette di formulare immediatamente il principio di conservazione dell'energia nel caso della forza di gravità: quando l'oggetto si trova all'altezza $h$ rispetto al piano di terra è fermo; tuttavia esso ha immaganizzato una certa dose di energia, detta energia potenziale. Se lasciato cadere l'energia immagazzinata viene utilizzata per produrre il moto: l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica; la perdita di una forma di energia è compensata dall'aumento dell'altra. In ogni istante del moto la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane invariata, cioè l'energia si conserva. Come è stato già detto l'uguaglianza (4.8) è un risultato scoperto da Galileo mentre per arrivare al risultato espresso da (4.9) e alle sue immediate conseguenze bisognerà attendere più di altri duecento anni!

**Esercizio 4.3.** *Un oggetto di massa $m$ si trova nel punto $A$ ad una altezza $h$ rispetto al piano di terra. Esso inizia a scendere lungo il piano inclinato, giunge al suolo nel punto $B$ e immediatamente risale lungo un secondo piano inclinato riducendo progressivamente la sua velocità . In assenza di attriti, qual è l'altezza raggiunta dall'oggetto nell'istante in cui si ferma? (Utilizzare il principio di conservazione dell'energia.)*

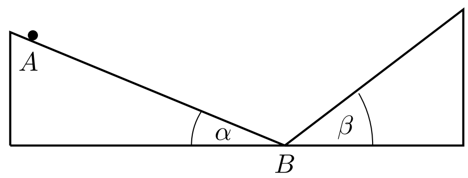


**Figura 11:**

## 5 Esercizi.

**Esercizio 5.1.** *Una particella di massa $m$ ruota attorno a una circonferenza di $r = 2\,\mathrm{m}$ con velocità costante (in modulo) pari a $10\mathrm{m/s}$. Determinare il lavoro compiuto dalla forza centripeta per descrivere un quarto di circonferenza.*

**Esercizio 5.2.** *Un blocco viene collegato a una molla e appoggiato su un piano orizzontale senza attriti. Quando la molla è a riposo il blocco si trova nella posizione $x_0 = 0$ (figura (a)). Per mantenere in equilibrio il blocco nella posizione $x_1 = 12\,\mathrm{mm}$ occorre applicare una forza di intensità $F = 4.9\,\mathrm{N}$.*

1) *Trovare il lavoro compiuto dalla forza esercitata dalla molla per spostare il blocco dalla posizione iniziale $x_0$ alla posizione $x_2 = 17\,\mathrm{mm}$ (figura (b)).*

2) *Successivamente il blocco viene spostato dalla posizione $x_2 = 17\,\mathrm{mm}$ alla posizione $x_3 = -12\,\mathrm{mm}$ (figura (c)). Trovare il lavoro compiuto dalla molla durante questo spostamento. Giustificare il segno.*

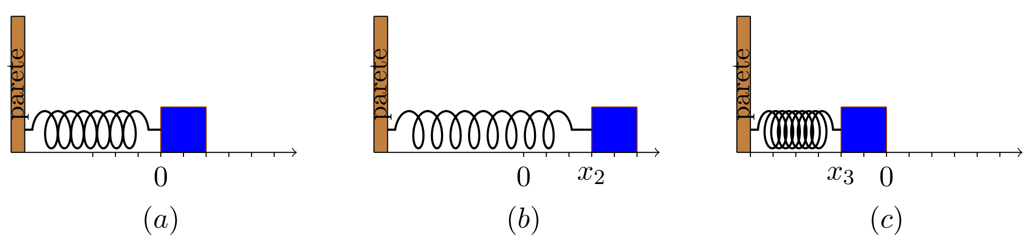


**Figura 12:** (a) La molla è a riposo: il blocco si trova nella posizione $x_0 = 0$. (b) Il blocco è stato spostato verso destra, nella posizione $x_2 = 17\,\mathrm{mm}$. (c) Il blocco si trova in $x_3 = -12\,\mathrm{mm}$.

**Esercizio 5.3.** *Un blocco scivola senza attiti su un piano orizzontale con velocità costante $v = 0.50\,\mathrm{m/s}$. Sul suo percorso incontra una molla, che prima frena il blocco fino a fermarlo e poi ne inverte il verso di moto. Sapendo che la costante elastica della molla vale $k = 750\,\mathrm{N/m}$, determinare la massima compressione raggiunta dalla molla.*

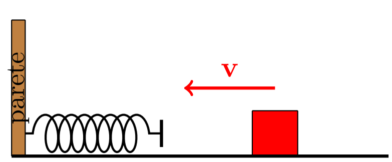


**Figura 13:** Prima di incontrare la molla il blocco si muove di moto rettilineo uniforme (**v** è costante).

## 5.1 Soluzioni degli esercizi proposti.

**Esercizio 2.4** No, la massa è sempre positiva e $v^2 \geq 0$.

**Esercizio 5.2**

1. Il lavoro compiuto dalla molla per spostare il blocco da $x_0$ a $x_2$ è $L_2 = -0.059\,\mathrm{J}$.

2. Il lavoro compiuto dalla molla per spostare il blocco da $x_2$ a $x_3$ è $L_3 = 0.030\,\mathrm{J}$. La molla compie lavoro positivo nel tratto da $x_2$ a $x_0$, compie invece lavoro negativo da $x_0$ a $x_3$. Pertanto il lavoro compiuto nel primo tratto è (in valore assoluto) maggiore del lavoro compiuto nel secondo.

**Esercizio 5.4** La massima compressione della molla è $x = 1.2\,\mathrm{cm}$.

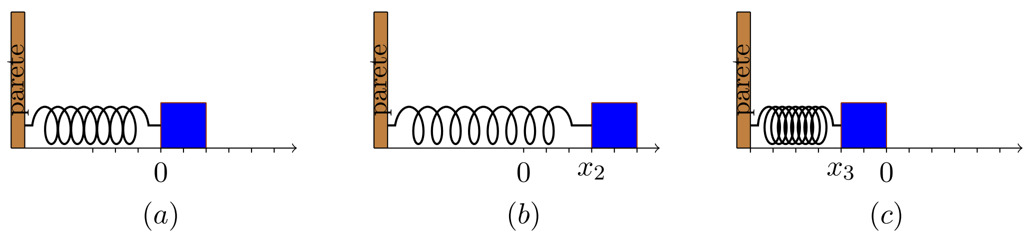


**Figura 14:** (a) La molla è a riposo: il blocco si trova nella posizione $x_0 = 0$. (b) Il blocco è stato spostato verso destra, nella posizione $x_2 = 17\,\mathrm{mm}$. (c) Il blocco si trova in $x_3 = -12\,\mathrm{mm}$.

**Esercizio 5.4.** *Un blocco scivola senza attiti su un piano orizzontale con velocità costante* $v = 0.50\,\mathrm{m/s}$*. Sul suo percorso incontra una molla, che prima frena il blocco fino a fermarlo e poi ne inverte il verso di moto. Sapendo che la costante elastica della molla vale* $k = 750\,\mathrm{N/m}$*, determinare la massima compressione raggiunta dalla molla.*