Appunti di algebra lineare

Federico G. Lastaria

Mauro Saita

Politecnico di Milano

gennaio 2011
(Edizione corretta)

Consigliamo MIT OpenCourseWare (Massachussets Institute of Technology), dove si trova materiale didattico relativo a numerosi corsi di matematica e fisica. In particolare, si possono seguire i video delle lezioni del corso 18.06 *Linear Algebra*, tenuto da Gilbert Strang.

Un vivo ringraziamento a Pietro De Poi (Università di Udine) per consigli e correzioni. Naturalmente siamo i soli responsabili degli eventuali errori rimasti.

Federico Lastaria

federico.lastaria@polimi.it

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Milano, Gennaio 2011.

Indice

1 Spazi vettoriali e Applicazioni Lineari **7**

1.1 Gli spazi vettoriali reali . . . 7

1.1.1 Lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ . . . 9

1.2 Combinazioni lineari. Sottospazi. . . . 12

1.3 Basi e dimensioni. Coordinate. . . . 15

1.4 Riduzione a scala . . . 18

1.5 Esercizi . . . 20

1.6 Prodotto di matrici. Matrici invertibili . . . 24

1.7 Esercizi . . . 26

1.8 Applicazioni lineari . . . 31

1.9 Esercizi . . . 36

1.10 Applicazioni lineari e matrici . . . 37

1.10.1 Matrice associata a un'applicazione lineare . . . 38

1.10.2 Cambio di base . . . 40

1.11 Esercizi . . . 42

1.12 Somme di sottospazi. Formula di Grassmann . . . 43

1.13 Nucleo e immagine . . . 45

1.13.1 Il teorema delle dimensioni . . . 46

1.14 Esercizi . . . 48

2 Sistemi lineari. Rette e piani nello spazio **51**

2.1 Sistemi lineari. Il teorema di Rouché-Capelli . . . 51

2.2 Sottospazi affini . . . 53

2.3 Il metodo di eliminazione di Gauss . . . 56

2.3.1 Esempi . . . 57

2.4 Esercizi . . . 61

2.5 Rette e piani nello spazio . . . 65

2.6 Esercizi 69

3 Spazi vettoriali euclidei **73**

3.1 Spazi vettoriali euclidei 73

3.2 Esercizi 75

3.3 Matrici ortogonali 76

3.4 Proiezioni ortogonali e matrici associate 79

3.4.1 Proiezioni ortogonali su rette 79

3.4.2 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angoli 80

3.4.3 Matrici di proiezioni su rette 82

3.4.4 Il procedimento di Gram-Schmidt 83

3.4.5 Proiezioni ortogonali 85

3.4.6 Matrici di proiezioni 87

3.5 Uguaglianza dei ranghi per righe e per colonne. 88

4 I determinanti **93**

4.1 Proprietà caratteristiche del determinante. 93

4.1.1 Esistenza e unicità del determinante. 97

4.1.2 Calcolo del determinante 98

4.1.3 Il determinante del prodotto 100

4.2 Spazi vettoriali orientati 101

4.2.1 Basi equiorientate 101

4.2.2 Deformazioni continue di basi 103

4.3 Interpretazione geometrica del determinante 104

4.4 Esercizi 107

5 Autovettori e Autovalori **109**

5.1 Introduzione 109

5.2 Autovalori e autovettori 110

5.3 Il polinomio caratteristico 112

5.4 Matrici e operatori diagonalizzabili 114

5.4.1 Esercizi 117

6 Operatori autoaggiunti. Il teorema spettrale. **119**

6.1 Operatori autoaggiunti 119

6.1.1 Forme quadratiche 121

6.1.2 Cambio di coordinate in una forma quadratica 122
6.2 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti 122
6.3 Proprietà di massimo e minimo degli autovalori di una matrice simmetrica . . 125
6.4 Esercizi 126

A Esercizi **129**
A.1 Tema 1 129
A.2 Tema 2 132
A.3 Tema 3 134
A.4 Tema 4 137
A.5 Tema 5 139
A.6 Tema 6 142
A.7 Tema 7 145

Capitolo 1

Spazi vettoriali e Applicazioni Lineari

1.1 Gli spazi vettoriali reali

I punti del piano, e quelli dello spazio, si possono rappresentare mediante coppie o, rispettivamente, terne ordinate di numeri reali, quando si fissa un sistema di riferimento cartesiano. Questo suggerisce l'idea di considerare l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali come uno spazio di "vettori" , che scriveremo come vettori riga:

$$v = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & . & a_n \end{vmatrix} \quad \text{o anche} \quad (a_1, ..., a_n)$$

o come vettori colonna:

$$v = \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix}$$

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali è l'esempio più comune di spazio vettoriale. Quando pensiamo a $\mathbb{R}^n$ come a uno spazio vettoriale, intendiamo prendere in considerazione *soltanto due* operazioni:

- la *somma di vettori*:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n + b_n \end{vmatrix};$$

- la *moltiplicazione di uno scalare reale per un vettore*:

$$\lambda \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda b_n \end{vmatrix}$$

dove λ è un numero reale.

Veniamo ora alla definizione precisa di spazio vettoriale.

Definizione 1.1.1 *Uno* spazio vettoriale reale *è un insieme V con due operazioni:*

- *la* somma*:*

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (v, w) & \longmapsto & v + w \end{array}$$

- *la* moltiplicazione per uno scalare*:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

Queste operazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:

1. *La somma è* commutativa*: per ogni v, w in V*

$$v + w = w + v$$

2. *La somma è* associativa*: per ogni u, v, w in V*

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

3. *Esiste un vettore in V, il vettore nullo 0, che è* elemento neutro *rispetto all'operazione di somma, nel senso che*

$$v + 0 = v$$

   per ogni vettore v.

4. *Per ogni vettore $v \in V$ esiste un vettore, l'*opposto *di v, denotato $-v$, che sommato a v dà il vettore nullo:*

$$v + (-v) = 0.$$

   Diremo allora che V, con l'operazione di somma, è un gruppo abeliano*.*

5. *Per ogni v, w in V e per ogni λ, μ in $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\mu v) & = & (\lambda\mu) v \\ (\lambda + \mu) v & = & \lambda v + \mu v \\ \lambda(v + w) & = & \lambda v + \lambda w \\ 1v & = & v \end{array}$$

Esempio. Abbiamo già visto che l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali (n intero positivo) è uno spazio vettoriale.

Esempio. Sia V l'insieme di tutte le funzioni a valori reali definite su un qualunque insieme D:

$$V = \mathbb{R}^D = \{\text{tutte le funzioni} \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Qui consideriamo solo le due operazioni di somma $f + g$ di funzioni e di moltiplicazione λf di un numero per una funzione, definite nel modo seguente:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

per ogni f, g in V, per ogni $x \in D$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Con queste due operazioni, V è uno spazio vettoriale.

Vedremo che un caso tipico è quello in cui D è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali o un suo sottoinsieme, come nell'esempio seguente.

Esempio. Un esempio di spazio vettoriale è l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ di tutte le funzioni $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ si chiama *successione di numeri reali* e viene di solito scritta come

$$f_0, f_1, f_2, \ldots.$$

La somma $f + g$ di due successioni e il prodotto $\lambda\, f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono definite nel modo solito:

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad (\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x)$$

Esempio. Siano a e b due numeri fissati e poniamo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ l'insieme delle soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dell'equazione lineare omogenea $ax + by = 0$. Si vede facilmente che S è uno spazio vettoriale, rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare indotte dall'inclusione $S \subset \mathbb{R}^2$.

Esempio. Siano a, b, c sono numeri fissati e sia $c \neq 0$. Allora $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ non è uno spazio vettoriale. Perché?

1.1.1 Lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$

Un esempio importante di spazio vettoriale è quello delle matrici $m \times n$. Siano m, n due interi ≥ 1. Una tabella di numeri

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & . & a_{mn} \end{vmatrix}$$

è detta *matrice* $m \times n$. La matrice ha m *righe* e n *colonne*. Chiameremo a_{ij} l'*elemento* (o *entrata*, o *componente*) di posto ij. L'indice i è l'*indice di riga*, l'indice j è l'*indice di colonna*. Dunque a_{ij} è l'elemento che compare sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna. In genere per denotare una matrice usiamo un simbolo come A, B eccetera.

Esempio. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ è una matrice 2×3. Se ci riferiamo a questa matrice come a $A = (a_{ij})$, allora $a_{11} = 1$ $a_{12} = 0$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = -1$ e $a_{23} = 2$.

Esempio. Una matrice $m \times 1$ è un *vettore colonna* di $\mathbb{R}^m$. Non useremo l'indice di colonna, e scriveremo un vettore colonna semplicemente come:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{vmatrix}$$

Un matrice $1 \times n$ è un *vettore riga* di $\mathbb{R}^n$. Ometteremo l'indice di riga, e scriveremo un vettore riga come

$$\begin{vmatrix} y_1 & . & . & . & y_n \end{vmatrix} \quad \text{oppure come} \quad (y_1, ..., y_n).$$

Una matrice 1×1 contiene un unico numero, e non la distingueremo dalla sua unica componente.

Somma di matrici. Si definisce la somma di due matrici solo quando sono entrambe dello stesso tipo $m \times n$. Siano dunque $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $m \times n$. La *somma* $A + B$ è la matrice $C = (c_{ij})$ di tipo $m \times n$, il cui elemento di posto ij è

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Si dice che la somma di matrici si fa *per componenti*.

Esempio. Se $A = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$, $\quad B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, allora $A + B = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

Esempio. La *matrice nulla* $m \times n$, denotata con il simbolo 0, è la matrice le cui entrate sono tutte nulle. Ovviamente, per ogni matrice A di tipo $m \times n$, si ha

$$A + 0 = A$$

Per ogni matrice A, si denota con $-A$, e si chiama *matrice opposta* di A, la matrice di componenti $(-A)_{ij} = -A_{ij}$. Ad esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad -A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix},$$

Per ogni matrice A, si ha $A + (-A) = 0$.

Moltiplicazione di un numero per una matrice. Se λ è un numero reale e $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$, definiamo λA come la matrice $m \times n$ la cui componente $(\lambda A)_{ij}$ è

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Esempio. Se $\lambda = 2$ e $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$, allora $2A = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}$

Diremo anche che λA è il *prodotto* dello *scalare* λ per la matrice A.

Proprietà della somma di matrici e della moltiplicazione di uno scalare per una matrice.

A, B, C sono matrici dello stesso tipo $m \times n$ e λ, μ sono numeri reali.

1. (Proprietà commutativa) $\quad A + B = B + A$
2. (Proprietà associativa) $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$
3. (La matrice 0 è elemento neutro rispetto alla somma)
$$A + 0 = A$$
4. (Ogni matrice ha un'opposta rispetto alla somma)
$$A + (-A) = 0$$
5. $\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $\quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. $\quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
8. $\quad 1A = A$

Tutte queste proprietà seguono facilmente dalle definizioni e dalle corrispondenti proprietà dei numeri reali. Riassumendo, l'insieme $M(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali $m \times n$, dotato delle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare, è uno spazio vettoriale.

Diamo ora una definizione, che sarà utile in seguito. Sia A una matrice di tipo $m \times n$. La *trasposta* di A è la matrice ${}^tA$, di tipo $n \times m$, definita nel modo seguente:

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}$$

per ogni $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. La matrice trasposta ${}^tA$ si ottiene dunque dalla matrice A scambiando le righe con le colonne.

Esempio. La trasposta della matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ è la matrice ${}^tA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

In particolare (ad esempio, per motivi tipografici), scriveremo spesso un vettore colonna come il trasposto di un vettore riga:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{vmatrix} = {}^t\begin{vmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{vmatrix} = {}^t(x_1, ..., x_n).$$

Per denotare la matrice trasposta ${}^tA$, sono comuni anche altre notazioni, come A^t, A^T eccetera.

1.2 Combinazioni lineari. Sottospazi.

Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $v_1, ..., v_k$ vettori di V.

Definizione 1.2.1 *Per* combinazione lineare *dei vettori* $v_1, ..., v_k$ *intendiamo un qualsiasi vettore di* V *del tipo*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k,$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *sono numeri reali. I numeri* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *sono i* coefficienti *della combinazione lineare.*

Esempio. Consideriamo i due vettori $v_1 = {}^t(1, 0, 1)$, $v_2 = {}^t(1, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^3$. Una loro combinazione lineare è ad esempio il vettore

$$3v_1 + 2v_2 = 3\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{vmatrix}.$$

La loro più generale combinazione lineare è il vettore

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

dove λ_1, λ_2 sono numeri reali arbitrari. L'insieme di tutte queste combinazioni lineari è il *piano* generato da v_1 e v_2.

Esempio. Consideriamo i due vettori di $\mathbb{R}^2$

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \; e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Diciamo che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di e_1 e e_2. Infatti, per ogni vettore (λ_1, λ_2) di $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

Definizione 1.2.2 *I vettori* $v_1, ..., v_k$ *si dicono* linearmente dipendenti *se esistono* k *numeri* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ non tutti nulli *per i quali*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

In caso contrario, i vettori $v_1, ..., v_k$ *si dicono* linearmente indipendenti*.*

Dunque i vettori $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti quando

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$$

vale solo quando $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

Esempi (a) Consideriamo i vettori $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che una loro combinazione lineare sia nulla:

$$0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

Ora $(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ solo quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Dunque i vettori e_1, e_2 sono linearmente indipendenti.

Allo stesso modo si dimostra che $e_1 = (1, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), e_n = (0, ..., 1)$ di $\mathbb{R}^n$ (le componenti di e_i sono tutte zero tranne la i-esima, che è 1) sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$.

(b) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ di $\mathbb{R}^3$. Una loro arbitraria combinazione lineare è

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, -1) + \lambda_3(0, 1, -1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_2 - \lambda_3).$$

Dire che una tale combinazione lineare è uguale a zero significa che:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

ossia (la terza equazione equivale alla seconda)

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Ora questo sistema lineare omogeneo non ha solo la soluzione nulla. Ad esempio, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ è una soluzione non nulla. Ne segue che i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Definizione 1.2.3 *Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che W è un* sottospazio vettoriale *di V se*

- *$W \subseteq V$, cioè W è un sottoinsieme di V. (Ossia, ogni elemento di W è anche elemento di V).*
- *W è uno spazio vettoriale, rispetto alle stesse operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare che sono definite in V.*

Un sottospazio di uno spazio vettoriale non può essere vuoto: contiene almeno il vettore nullo. Scrivendo in modo un po' più formale, un sottoinsieme non vuoto W di uno spazio vettoriale V è sottospazio vettoriale di V quando:

$$\forall x, y \qquad x, y \in W \Longrightarrow x + y \in W$$

$$\forall \lambda \ \forall x \qquad \lambda \in \mathbb{R}, x \in W \Longrightarrow \lambda x \in W$$

Esempio: I sottospazi di $\mathbb{R}^2$. I sottospazi W di $\mathbb{R}^2$ sono di tre tipi:

1. il sottospazio 0 costituito dal solo vettore nullo: $0 = \{(0, 0)\}$;
2. ogni retta passante per l'origine;
3. l'intero spazio $\mathbb{R}^2$.

Questo può essere dimostrato nel modo seguente: è ovvio anzitutto che quelli elencati sono tutti sottospazi di $\mathbb{R}^2$. Per provare che sono gli unici sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$, si ricordi la regola del parallelogramma per sommare due vettori. Si vede allora facilmente che se W contiene due vettori w_1, w_2 che non appartengono a una stessa retta, allora W deve contenere anche tutte le loro combinazioni lineari

$$\lambda w_1 + \mu w_2$$

e quindi deve coincidere con l'intero piano: $W = \mathbb{R}^2$. Se W invece non contiene due vettori siffatti, allora siamo in uno degli altri due casi.

Esempio: I sottospazi di $\mathbb{R}^3$. In modo analogo, si dimostra che i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ sono dei seguenti quattro tipi:

1. il sottospazio 0 costituito dal solo vettore nullo: $0 = \{(0, 0, 0)\}$;
2. ogni retta passante per l'origine;
3. ogni piano passante per l'origine;
4. l'intero spazio $\mathbb{R}^3$.

La classificazione dei sottospazi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ sarà chiarita dal concetto di *dimensione*, che introdurremo più avanti: ad esempio, i quattro tipi di sottospazi di $\mathbb{R}^3$ corrispondono rispettivamente a sottospazi di dimensione $0, 1, 2, 3$.

Esempio. Il semipiano

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (anche se è chiuso rispetto alla somma).

Esempio. Poniamo:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} \qquad s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

(r e s sono due rette passanti per l'origine.) L'unione insiemistica $r \cup s$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ (anche se è chiuso rispetto al prodotto per scalari).

Dati k vettori $v_1, ..., v_k$ di uno spazio vettoriale V, denotiamo con $L(v_1, ..., v_k)$ l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari:

$$L(v_1, ..., v_k) = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k,\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

È facile vedere che l'insieme $L(v_1, ..., v_k)$ è di fatto un sottospazio vettoriale di V. Diremo che $L(v_1, ..., v_k)$ è il sottospazio vettoriale *generato* dai vettori $v_1, ..., v_k$.

1.3 Basi e dimensioni. Coordinate.

Definizione 1.3.1 *Si dice che un insieme ordinato di vettori* $(v_1, ..., v_n)$ *di uno spazio vettoriale* V *è una* base *di* V *se:*

a) $v_1, ..., v_n$ *sono linearmente indipendenti;*

b) $v_1, ..., v_n$ *generano* V*:*

$$L(v_1, ..., v_n) = V$$

(vale a dire se ogni vettore di V *è combinazione lineare di* $v_1, ..., v_n$*).*

Esempio. Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è costituita dai vettori:

$$\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \\ .... \\ e_n = (0, 0, 0, ..., 1) \end{array}$$

Infatti sappiamo già che questi vettori sono linearmente indipendenti. Inoltre un qualsiasi elemento $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ si scrive come combinazione lineare di $e_1, ..., e_n$:

$$v = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1(1, 0, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, 0, ..., 1) = x_1 e_1 + ... + x_n e_n.$$

La base $(e_1, ..., e_n)$ si chiama *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3.2 *Se* $(v_1, ..., v_n)$ *è una base di uno spazio vettoriale* V*, allora ogni vettore* $v \in V$ *si scrive esattamente in un modo come combinazione lineare di* $v_1, ..., v_n$*.*

Dimostrazione. Poiché i vettori $v_1, ..., v_n$ generano V, ogni vettore v si scrive come combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$.

Supponiamo che il vettore v si scriva come:

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

e come

$$v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

Dimostriamo che le due scritture coincidono. Sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0 \tag{1.3.1}$$

Poiché i vettori $v_1, ..., v_n$ sono per ipotesi linearmente indipendenti, si conclude che i coefficienti della combinazione lineare 1.3.1 sono tutti nulli, ossia:

$$\lambda_1 = \mu_1 \qquad \cdots\cdots \qquad \lambda_n = \mu_n$$

come si voleva dimostrare. ∎

Siano $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ una base di uno spazio vettoriale V, v un vettore di V e sia

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

l'unica espressione di v come combinazione lineare di $(v_1, ..., v_n)$. I numeri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono detti le *coordinate*, o le *componenti*, di v rispetto alla base $\mathcal{B}$. Il vettore colonna

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{vmatrix}$$

è il *vettore delle coordinate* di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Teorema 1.3.3 (Esistenza di basi) *Ogni spazio vettoriale generato da un insieme finito di vettori, ha una base.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste un insieme finito di vettori di V, diciamo $v_1, .., v_k$, che generano lo spazio vettoriale V. Se tali vettori sono linearmente indipendenti, costituiscono già una base. Altrimenti, tra di essi c'è una relazione lineare non banale, e quindi uno di questi vettori, diciamo v_k, può essere scritto come combinazione lineare dei restanti $k-1$ vettori. Allora possiamo eliminare questo vettore v_k. Ripetiamo il procedimento, fino ad arrivare a un insieme di vettori linearmente indipendenti. Questi vettori indipendenti generano ancora V e dunque costituiscono una base di V. ∎

Diremo che uno spazio vettoriale V *ha dimensione finita* - o è *finito-dimensionale*, o è *finitamente generato* - se esiste un insieme finito di vettori di V che genera V. In modo equivalente (per il teorema precedente), uno spazio vettoriale V è finito-dimensionale se ha una base (finita).

Ad esempio, $\mathbb{R}^2$ ha dimensione finita, perché l'insieme di vettori $\{e_1, e_2\}$ genera $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.3.4 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale finito-dimensionale hanno la stessa cardinalità.*

La dimostrazione è un'immediata conseguenza del seguente:

Lemma. *Supponiamo che i vettori $x_1, ..., x_n$ generino uno spazio vettoriale X e che i vettori $y_1, ..., y_j$ di X siano linearmente indipendenti. Allora*

$$j \leq n$$

Dimostrazione. Poiché $x_1, ..., x_n$ generano X, ogni vettore di X si scrive come combinazione lineare di $x_1, ..., x_n$. In particolare si potrà scrivere

$$y_1 = k_1 x_1 + \cdots k_n x_n \tag{1.3.2}$$

Almeno uno dei coefficienti $k_1, .., k_n$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $y_1 = 0$ (e di conseguenza $y_1, ..., y_j$ sarebbero dipendenti). Siccome in un insieme di generatori l'ordine non conta, non è restrittivo supporre che sia $k_1 \neq 0$. Allora da 1.3.2 segue che x_1 è combinazione lineare di y_1 e dei restanti $x_2, ..., x_n$. In questo modo abbiamo costruito un nuovo sistema di n generatori per X:

$$X = L(y_1, x_2, ..., x_n)$$

Ripetiamo il procedimento per y_2. Poiché $y_1, x_2, ..., x_n$ generano X, si potrà scrivere

$$y_2 = h_1 y_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + \cdots k_n x_n \tag{1.3.3}$$

Almeno uno dei coefficienti $k_2, ..., k_n$ è diverso da zero (altrimenti si avrebbe $y_2 = h_1 y_1$, contro l'ipotesi di indipendenza lineare di $y_1, ..., y_j$). Al solito, non è restrittivo supporre $k_2 \neq 0$. Da 1.3.3 segue che x_2 è combinazione lineare di $y_1, y_2, x_3, ..., x_n$ e quindi abbiamo costruito un nuovo sistema di generatori di X:

$$X = L(y_1, y_2, x_3, ..., x_n)$$

Supponiamo ora, per assurdo, che sia $j > n$. Se seguiamo il procedimento descritto n volte, eliminiamo uno dopo l'altro tutti gli $x_1, ..., x_n$ e troviamo alla fine un sistema di generatori per X costituito da $y_1, ..., y_n$:

$$X = L(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$$

Ma allora il vettore y_{n+1} è combinazione lineare di $y_1, ..., y_n$, contro l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $y_1, ..., y_j$. ∎

Esercizio. Dedurre dal Lemma dimostrato che tutte le basi hanno la stessa dimensione.

(Soluzione. Siano $(x_1, ..., x_n)$ e $(y_1, ..., y_j)$ due basi di uno stesso spazio vettoriale X. Poiché $x_1, ..., x_n$ generano X e $y_1, ..., y_j$ sono linearmente indipendenti, per il Lemma vale $j \leq n$. Per simmetria, vale anche $n \leq j$. Segue $j = n$.)

Grazie al fatto che due basi hanno lo stesso numero di elementi, ha senso dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.5 *La dimensione di uno spazio vettoriale di dimensione finita è il numero di elementi di una qualsiasi base. La dimensione di V sarà denotata con* $\dim V$.

Una base per lo spazio vettoriale nullo (cioè costituito dal solo vettore zero) è l'insieme vuoto; la dimensione dello spazio vettoriale nullo è zero.

Può accadere che uno spazio vettoriale non abbia dimensione finita, vale a dire può accadere che non esista un insieme finito di vettori che lo generi. In tal caso, diremo che lo spazio *ha dimensione infinita.*

Esempio. Dimostriamo che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x non ha dimensione finita. Infatti, consideriamo un qualunque insieme finito $S = \{p_1, ..., p_n\}$ di polinomi di $\mathbb{R}[X]$. Diciamo h il massimo dei loro gradi. Ogni combinazione lineare di $p_1, ..., p_n$, cioè ogni elemento del sottospazio vettoriale generato da S, ha grado minore o uguale ad h. Pertanto il sottospazio vettoriale generato da S non può esaurire tutto $\mathbb{R}[X]$.

Anche per gli spazi vettoriali infinito-dimensionali si può definire il concetto di insieme di generatori e di base. Si dimostra inoltre (usando l'assioma della scelta) che anche in ogni spazio vettoriale infinito-dimensionale esistono sempre basi. Ma non approfondiamo questo argomento. D'ora in avanti, salvo avviso contrario, quando parleremo di spazi vettoriali, intenderemo sempre spazi vettoriali finito-dimensionali.

1.4 Riduzione a scala

Per definizione, le *operazioni elementari sulle righe* di una matrice sono le seguenti:

1. moltiplicare una riga per un numero $\lambda \neq 0$;
2. sommare la riga i-esima alla riga j-esima ($i \neq j$);
3. scambiare di posto due righe.

Si dimostra facilmente che, data una qualunque matrice A, con una successione di opportune operazioni elementari sulle righe di A si può sempre ottenere una matrice *a scala*, cioè una matrice del tipo

$$S = \begin{vmatrix} & & a & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & b & * & * & * & * & * \\ & & & & & & & c & * & * \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{vmatrix}$$

Qui si intende che al posto degli spazi vuoti ci sono tutti zeri, i numeri $a, b, c, ..$ sono diversi da zero e al posto degli asterischi ci può essere un numero qualunque. In termini più precisi, una matrice a scala soddisfa le seguenti condizioni: *Se due righe consecutive non sono fatte interamente di zeri, allora la riga più in basso ha il suo primo elemento non nullo almeno un* *posto più a destra della riga di sopra. Le (eventuali) righe formate interamente da zeri sono al fondo della matrice.*

Esempi. Le seguenti matrici sono a scala:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

La matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

non è a scala.

Scriveremo $A \simeq A'$ se la matrice A' si ottiene dalla matrice A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si dimostra facilmente la seguente

Proposizione 1.4.1 *Sia A una matrice $m \times n$ e sia S una matrice a scala ottenuta da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe. Siano $A_1, ..., A_m$ le righe di A e $S_1, ..., S_r$ le righe non nulle di S. Allora:*

1) lo spazio vettoriale generato dalle righe di S è uguale allo spazio vettoriale generato dalle righe di A:

$$L(S_1, ..., S_r) = L(A_1, ..., A_m)$$

2) $(S_1, ..., S_r)$ è una base dello spazio $L(A_1, ..., A_m)$ generato dalle righe di A.

(Si veda anche l'esercizio 1.5.9)

Definizione 1.4.2 *Sia $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Il* rango per righe *di A è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A. Il* rango per colonne *di A è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A.*

Si dimostra che il rango per righe e il rango per colonne coincidono: il loro comune valore è il *rango* rk A della matrice A (Si veda la definizione 1.13.4).

Esempio. Sia $W = L(v_1, v_2, v_3)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$v_1 = (-1, 1, 1, 2), \quad v_2 = (1, -3, 0, -2), \quad v_3 = (0, -2, 1, 0)$$

Trovare $\dim W$ e una base di W.

Soluzione. Formiamo la matrice A che ha come righe i vettori v_1, v_2, v_3:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e semplifichiamola con operazioni elementari sulle righe:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S$$

In questo modo abbiamo ottenuto una matrice a scala S. Una base di W è costituita dalle due righe non nulle $(-1, 1, 1, 2)$ e $(0, -2, 1, 0)$ di S. Pertanto $\dim W = 2$.

1.5 Esercizi

Esercizio 1.5.1 *Decidere se il vettore* $b = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *è combinazione lineare dei vettori* $a_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ *e* $a_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Soluzione. Si tratta di vedere se esistono due numeri reali, diciamo x, y, per i quali

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix} = xa_1 + ya_2 = x \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 2y \\ 2x + y \\ -x + y \end{vmatrix}.$$

Detto altrimenti, si tratta di vedere se il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases} \tag{1.5.1}$$

di 3 equazioni in due incognite x, y ha soluzioni. Si vede facilmente che il sistema è risolubile: precisamente l'unica soluzione è $x = 2$, $y = -1$. Pertanto

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Per *matrice dei coefficienti* del sistema lineare 1.5.1 intendiamo la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si noti che *la soluzione del sistema lineare 1.5.1 esprime la colonna b dei termini noti come combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti A.*

Esercizio 1.5.2 *Quali sono i sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}$*?*

Esercizio 1.5.3 *L'insieme*

$$P_2 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0, \;\; a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \, a_2 \neq 0\}$$

di tutti i polinomi reali di grado 2 è uno spazio vettoriale?

Esercizio 1.5.4 *Sia* H *l'insieme dei punti di* $\mathbb{R}^2$ *del tipo* $(3s, s+1)$*, dove* s *è un qualunque numero reale. Stabilire se* H *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 1.5.5 *Sia*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}.$$

a) Dimostrare che W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$*.*

b) Trovare una base di W *e la sua dimensione.*

Esercizio 1.5.6 *Siano* v, w *elementi di uno spazio vettoriale. Si dimostri che se* v *e* w *sono linearmente dipendenti e* $v \neq 0$*, allora* w *è multiplo di* v*, vale a dire esiste uno scalare* α *per il quale vale* $w = \alpha v$*.*

Esercizio 1.5.7 *Dimostrare che se i vettori* v_1, v_2, v_3 *sono linearmente indipendenti, allora anche i vettori* v_1, v_2 *sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 1.5.8 *Siano* $v_1 = (1, 0, 0)$*,* $v_2 = (0, 1, 1)$*. Provare che*

$$L(v_1, v_2) = L(v_1, v_2 + 2v_1).$$

Più in generale, se v_1, v_2 *sono vettori qualsiasi di uno spazio vettoriale* V *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, allora:*

$$L(v_1, v_2) = L(v_1, v_2 + \lambda v_1).$$

Esercizio 1.5.9 *Si consideri la seguente matrice a scala:*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si dimostri che le righe di A *sono vettori linearmente indipendenti di* $\mathbb{R}^3$*.*

Più in generale, si consideri una qualunque matrice a scala A *senza righe nulle; ad esempio una matrice del tipo:*

$$A = \begin{vmatrix} a & * & * & * & * & * & * & * \\ & & b & * & * & * & * & * \\ & & & & & c & * & * \end{vmatrix}$$

dove i numeri a, b, c *sono diversi da zero, al posto degli spazi vuoti ci sono tutti zeri, e al posto degli asterischi ci può essere qualunque numero. Si dimostri che le righe di* A *sono vettori linearmente indipendenti.*

Soluzione. Siano λ, μ, ν tre numeri reali per i quali

$$\lambda(3, 1, 2) + \mu(0, 2, 1) + \nu(0, 0, 3) = (0, 0, 0).$$

Scrivendo questa equazione in componenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}&3\lambda = 0\\&\lambda + 2\mu = 0\\&2\lambda + \mu + 3\nu = 0\end{aligned}$$

La prima equazione dà $\lambda = 0$. Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene $\mu = 0$. Sostituendo ancora nella terza si ottiene anche $\nu = 0$. Quindi l'unica soluzione del sistema è $\lambda = \mu = \nu = 0$. Questo prova che le righe della matrice a scala A sono linearmente indipendenti.

La dimostrazione nel caso generale è del tutto analoga. Siano λ, μ, ν tre numeri reali per i quali:

$$\lambda\ (1^a \text{ riga}) + \mu\ (2^a \text{ riga}) + \nu\ (3^a \text{ riga}) = 0.$$

Scrivendo questa equazione in componenti, si ottiene un sistema lineare omogeneo nelle incognite λ, μ, ν, fra le cui equazioni figurano le seguenti:

$$\begin{aligned}&a\lambda = 0\\&(*)\lambda + b\mu = 0\\&(*)\lambda + (*)\mu + c\nu = 0\end{aligned}$$

Poiché $a, b, c \neq 0$, l'unica soluzione è $\lambda = \mu = \nu = 0$.(Qui gli asterischi $*$ sono numeri che non importa specificare). Questo prova che le righe della matrice a scala A sono linearmente indipendenti.

Esercizio 1.5.10 *Decidere se i vettori*

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 1),\ v_3 = (2, 0, 2)$$

di $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente indipendenti o dipendenti.*

Esercizio 1.5.11 *Stabilire se il vettore* $v = (2, 3, 1)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *appartiene allo spazio vettoriale generato dai vettori* $w_1 = (1, 1, 2), w_2 = (5, 7, 4)$.

Soluzione. Il vettore v appartiene al sottospazio W se e solo se $L(w_1, w_2) = L(w_1, w_2, v)$. È evidente che $\dim L(w_1, w_2) = 2$ (w_1, w_2 non sono proporzionali). Formiamo la matrice A che ha come righe w_1, w_2, v ed effettuiamo operazioni elementari sulle righe fino ad ottenere una matrice a scala:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S$$

Si vede allora che anche $\dim L(w_1, w_2, v) = 2$; questo prova che $L(w_1, w_2) = L(w_1, w_2, v)$ (Perché?). Quindi $v \in L(w_1, w_2)$.

Esercizio 1.5.12 *Stabilire se l'insieme* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z \geq 0\}$ *è un sottospazio di* $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.5.13 *Sia* V *lo spazio vettoriale (di dimensione infinita) di tutte le funzioni da* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$. *Dimostrare che le funzioni* sin *e* cos *sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 1.5.14 *Siano* W_1, W_2 *sottospazi di uno spazio vettoriale* V. *Dimostrare che l'intersezione*

$$W_1 \cap W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \quad e \quad v \in W_2\}$$

è un sottospazio di V.

Esercizio 1.5.15 *Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, motivando la risposta:*

"Siano W_1, W_2 sottospazi arbitrari di uno spazio vettoriale V. Allora l'unione insiemistica

$$W_1 \cup W_2 = \{v \in V \mid v \in W_1 \quad \text{oppure} \quad v \in W_2\}$$

è un sottospazio di V.

Esercizio 1.5.16 *a) Trovare la dimensione* $\dim M(2 \times 2, \mathbb{R})$ *dello spazio vettoriale delle matrici reali* 2×2.

b) Trovare la dimensione dello spazio vettoriale $M(m \times n, \mathbb{R})$ *delle matrici reali* $m \times n$.

Esercizio 1.5.17 *Sia*

$$\Delta_3 = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A_{ij} = 0 \ se \ i \neq j\}.$$

Gli elementi di Δ_3 *sono le matrici* diagonali 3×3.

Stabilire se Δ_3 *è un sottospazio vettoriale di* $M(3 \times 3, \mathbb{R})$. *In caso affermativo, trovare* $\dim \Delta_3$.

Esercizio 1.5.18 *Diamo prima qualche definizione. Se* A *è una qualunque matrice* $m \times n$, *definiamo* trasposta *di* A *la matrice* ${}^tA$ *di tipo* $n \times m$ *la cui componente di posto* i, j *è:*

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}$$

Una matrice quadrata si dice simmetrica *se* $A = {}^tA$; *si dice* antisimmetrica *se* $A = -{}^tA$.

Si dimostri che (rispetto alle usuali operazioni):

a) l'insieme $\mathcal{S}_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$ *delle matrici simmetriche* $n \times n$ *è uno spazio vettoriale;*

b) l'insieme $\mathcal{A}_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$ *delle matrici antisimmetriche* $n \times n$ *è uno spazio vettoriale.*

Esercizio 1.5.19 *Trovare le dimensioni dei seguenti sottospazi dello spazio vettoriale* $M(n \times n, \mathbb{R})$ *delle matrici reali* $n \times n$:

a) Il sottospazio $\mathcal{S}_n$ *delle matrici simmetriche* $\mathcal{S}_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$.

b) Il sottospazio $\mathcal{A}_n$ *delle matrici antisimmetriche:* $\mathcal{A}_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$.

Soluzione. *a)* Facciamoci un'idea di come vanno le cose per n piccolo. Cominciamo con $n = 1$. Le matrici reali 1×1 non sono altro che i numeri reali, e sono tutte simmetriche. Quindi $\dim \mathcal{S}_1 = 1$. Passiamo a $n = 2$. Una matrice simmetrica 2×2 si scrive:

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vediamo allora che per assegnare una matrice simmetrica A si devono dare i numeri sulla diagonale principale e al di sopra di essa (in tutto $2 + 1 = 3$ numeri) e ogni matrice simmetrica si scrive in modo unico come combinazione lineare delle tre matrici simmetriche:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che $\dim \mathcal{S}_2 = 3$. Affrontiamo ora il caso generale. Per assegnare una matrice A simmetrica di ordine n occorre dare, in modo arbitrario, n elementi sulla diagonale principale e tutti gli elementi al di sopra di essa. Quanto ai restanti elementi, la scelta è forzata, per simmetria. Allora per assegnare una matrice simmetrica di ordine n i parametri necessari sono:

$$1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pertanto

$$\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Si noti che questa formula è in accordo con quanto abbiamo trovato per $n = 1, 2$). Si scriva ora in modo esplicito una base di $\mathcal{S}_3$ (e si dimostri che è una base).

b) Gli elementi sulla diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono tutti nulli. (Suggerimento: poiché per ogni $i, j = 1, ..., n$ vale $a_{ij} = -a_{ji}$, abbiamo in particolare, per $i = j$, $a_{ii} = -a_{ii}$. Ne segue $a_{ii} = 0$, per ogni $i = 1, ..., n$). Quindi per assegnare una matrice A antisimmetrica di ordine n occorre dare, in modo arbitrario, gli elementi al di sopra della diagonale principale, che sono in numero di

$$1 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pertanto

$$\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Descriviamo esplicitamente una base di $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$. Una matrice antisimmetrica 2×2 si scrive:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi una base dello spazio delle matrici antisimmetriche $\mathcal{A}_2$ è la matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Una matrice antisimmetrica 3×3 si scrive:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Una base di $\mathcal{S}_3$ è:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.6 Prodotto di matrici. Matrici invertibili

Il prodotto AB di due matrici A e B è definito solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, cioè se A è di tipo $m \times p$ e B di tipo $p \times n$. In tal caso, il prodotto AB è una matrice $m \times n$.

Cominciamo a definire il prodotto in un caso particolare. Supponiamo che A sia una matrice $1 \times n$ e che B sia una matrice $n \times 1$:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Allora AB è la matrice 1×1 (cioè il numero) definito come segue:

$$AB = \begin{vmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Veniamo ora al caso generale. Se A è di tipo $m \times p$ e B di tipo $p \times n$, allora il *prodotto* AB è la matrice $m \times n$ così definita: per ogni $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, la componente $(AB)_{ij}$ della matrice prodotto è

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= |i\text{-esima riga di } A| \begin{vmatrix} j\text{-esima} \\ \text{colonna} \\ \text{di } B \end{vmatrix} \\ &= a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} \\ &= \sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{sj}. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Esempio. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}.$

Esempio. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{vmatrix} = 41.$

Esempio. $\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

Proprietà del prodotto di matrici.

1. Proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$
2. Proprietà distributiva:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

Tutte queste proprietà seguono facilmente dalle definizioni e dalle corrispondenti proprietà dei numeri reali.

Osservazione. La composizione di funzioni non è commutativa; corrispondentemente il prodotto di matrici non è commutativo, cioè in generale $AB \neq BA$.

Esempio. Consideriamo nel piano $\mathbb{R}^2$ le seguenti simmetrie:

S: simmetria rispetto all'asse x, rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

S': simmetria rispetto alla bisettrice $x - y = 0$, rappresentata dalla matrice

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il prodotto

$$AB = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

rappresenta una rotazione attorno all'origine di un angolo retto nel verso negativo, mentre il prodotto

$$BA = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

rappresenta una rotazione attorno all'origine di un angolo retto nel verso positivo.

Ovviamente, esistono anche matrici A, B per le quali $AB = BA$. Per esempio le potenze di una matrice quadrata A commutano: $A^r A^s = A^s A^r$, qualunque siano gli interi non negativi r, s.

Per ogni intero $n \geq 1$, la matrice identità I_n (o semplicemente I, se non c'è ambiguità) è la matrice quadrata di ordine n con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 fuori dalla diagonale. Ad esempio, la matrice identità 4×4 è

$$I_4 = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Definizione 1.6.1 *Una matrice quadrata A è detta* invertibile *se esiste una matrice B per la quale $AB = BA = I$.*

Una matrice B legata ad A da queste equazioni è detta inversa *di A.*

Vedremo in seguito che una matrice quadrata A di ordine n è invertibile se e solo se rappresenta un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ invertibile.

Si dimostra che se una matrice è invertibile, allora l'inversa è unica (Esercizio 1.7.7).

1.7 Esercizi

Esercizio 1.7.1 *Sia* $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ *un vettore riga e* $B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ *un vettore colonna. Calcolare, se sono definiti, i prodotti AB e BA.*

Soluzione. Usando la definizione di prodotto di matrici, troviamo:

$$AB = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|$$

cioè AB è la matrice 1×1 la cui unica componente è il numero $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Invece BA è di tipo 3×3. Precisamente:

$$BA = \begin{vmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 1.7.2 *Sia*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

e siano

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \; e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \; e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Trovare Ae_1, Ae_2, Ae_3. Più generale, se A è una qualunque matrice $n \times n$ e e_i è il vettore unitario standard i-esimo di $\mathbb{R}^n$, cioè il vettore

$$e_i = \begin{vmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{vmatrix}$$

(tutti 0 tranne 1 al posto i-esimo), che cos'è Ae_i?

Soluzione. Troviamo:

$$Ae_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{vmatrix}, \quad Ae_3 = \begin{vmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Più in generale, si vede allora facilmente che se A è una qualunque matrice quadrata $n \times n$

$$Ae_i = A \begin{vmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{vmatrix} = i\text{-esima colonna di } A.$$

Esercizio 1.7.3 *Trovare una formula per la n-esima potenza*

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^n$$

dove a è un numero reale e n è un qualunque numero naturale, e dimostrarla per induzione. Dare un'interpretazione geometrica.

Soluzione. Si trova

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.7.1}$$

per ogni intero non negativo n. Proviamo questa uguaglianza per induzione. L'uguaglianza è vera per $n = 0$, perché in tal caso il primo e il secondo membro sono entrambi uguali alla matrice identità. Supponiamo ora che l'uguaglianza 1.7.1 sia vera per il numero naturale n. Allora

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{n} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Si è così provato che se la formula 1.7.1 è vera per n, allora è vera anche per $n + 1$. Per induzione, possiamo concludere che la formula è vera per ogni intero $n \geq 0$.

Esercizio 1.7.4 *Supponiamo che A e B siano matrici quadrate di ordine $n \geq 2$ il cui prodotto sia nullo: $AB = 0$. Possiamo concludere che $A = 0$ oppure $B = 0$?*

Soluzione. No. Un controesempio: si considerino le due matrici

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Abbiamo $AB = 0$, ma $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Esercizio 1.7.5 *Siano A, B matrici quadrate $n \times n$. Dire se è vero che*

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \tag{1.7.2}$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \tag{1.7.3}$$

Soluzione. Se A e B sono arbitrarie matrici $n \times n$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
(A + B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\
(A + B)(A - B) &= A^2 - AB + BA - B^2
\end{aligned}$$

Quindi le due identità 1.7.2 e 1.7.3 sono vere se e solo se le matrici A e B commutano, vale a dire se e solo se $AB = BA$.

Esercizio 1.7.6 *Dimostrare che:*

$${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$

Soluzione. Diciamo che A sia di tipo $m \times q$ e B di tipo $q \times n$. Allora, per ogni $i = 1, ..., m$, e $j = 1, ..., n$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
({}^t(AB))_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{(definizione di trasposta)} \\
&= \sum_{s=1}^{q} A_{js} B_{si} && \text{(definizione di prodotto)} \\
&= \sum_{s=1}^{q} B_{si} A_{js} && \text{(proprietà commutativa dei numeri)} \\
&= \sum_{s=1}^{q} {}^tB_{is}\, {}^tA_{sj} && \text{(definizione di trasposta)} \\
&= ({}^tB\, {}^tA)_{ij} && \text{(definizione di prodotto)}
\end{aligned}$$

Esercizio 1.7.7 Unicità dell'inversa. *Se B e B' sono due inverse di una stessa matrice A, allora $B = B'$. In altre parole, l'inversa, se esiste, è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che B e B' siano entrambe inverse di A:

$$AB = BA = I, \quad \text{e} \quad AB' = B'A = I.$$

Allora:

$$B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'. \qquad \blacksquare$$

Se la matrice A è invertibile, *la* sua inversa (unica, per quanto appena dimostrato) è denotata A^{-1}.

Esercizio 1.7.8 *Provare che la matrice* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ *non è invertibile. Dare un'interpretazione geometrica.*

Esercizio 1.7.9 *Siano A, B matrici $n \times n$ invertibili. Dimostrare le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{array}{ll} \alpha) & (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \\ \beta) & ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}). \end{array}$$

Soluzione. α) Per definizione di inversa, si deve provare $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

$$\begin{array}{rcll} (AB)(B^{-1}A^{-1}) & = & A(BB^{-1})A^{-1} & \text{(proprietà associativa)} \\ & = & AIA^{-1} & \text{(definizione di inversa)} \\ & = & AA^{-1} & (I \text{ è l' identità del prodotto}) \\ & = & I & \text{(definizione di inversa)} \end{array}$$

Allo stesso modo si dimostra che $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

β) Proviamo che $({}^tA){}^t(A^{-1}) = I$:

$$\begin{array}{rcll} ({}^tA){}^t(A^{-1}) & = & {}^t(A^{-1}A) & (\text{perché } {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)) \\ & = & {}^tI & \text{(definizione di inversa)} \\ & = & I & (\text{perché } {}^tI = I\ ) \end{array}$$

$\blacksquare$

Esercizio 1.7.10 *Se A e B sono arbitrarie matrici $n \times n$ simmetriche, la matrice prodotto AB è simmetrica?*

Esercizio 1.7.11 *Se una matrice simmetrica è invertibile, la sua inversa è simmetrica?*

Soluzione. Sì, perché

$$\begin{array}{rcl} {}^t(A^{-1}) & = & ({}^tA)^{-1} \\ & = & A^{-1}. \end{array}$$

Esercizio 1.7.12 *Quando una matrice diagonale è invertibile? E se è invertibile, quale ne è l'inversa?*

Esercizio 1.7.13 *Sia A una matrice $n \times n$. Per definizione, la* traccia *di A è il numero*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + ... + a_{nn}.$$

Dimostrare che se A e B sono arbitrarie matrici $n \times n$, allora:

$$\begin{array}{lrcl} \alpha) & \operatorname{tr}(A+B) & = & \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \\ \beta) & \operatorname{tr}(\lambda A) & = & \lambda(\operatorname{tr} A) \\ \gamma) & \operatorname{tr} AB & = & \operatorname{tr} BA, \end{array}$$

e, se B è invertibile,

$$\delta) \quad \operatorname{tr} B^{-1}AB = \operatorname{tr} A$$

Soluzione. Le identità α) e β) sono di verifica immediata. Proviamo la γ):

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} AB &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{si} \\ &= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{si} A_{is} \\ &= \sum_{s=1}^{n} (BA)_{ss} \\ &= \operatorname{tr} BA. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora $\operatorname{tr} B^{-1}AB = \operatorname{tr} A$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B^{-1}AB &= \operatorname{tr}(AB)B^{-1} && \text{(per la } \gamma)) \\ &= \operatorname{tr} A(BB^{-1}) \\ &= \operatorname{tr} AI \\ &= \operatorname{tr} A. \end{aligned}$$

Esercizio 1.7.14 *Siano A, B, C matrici quadrate $n \times n$ arbitrarie, e sia λ un numero reale. Decidere se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta.*

1. $AB = AC \Longrightarrow B = C$.
2. $\lambda A = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ *oppure* $A = 0$.
3. *Se A è una matrice quadrata di ordine $n > 1$ e $A^2 = 0$, allora $A = 0$.*

Esercizio 1.7.15 *Sia A una matrice quadrata. Dimostrare le seguenti affermazioni:*

1. *Se $A^2 = 0$, allora $I - A$ è invertibile.*
2. *Più in generale, se esiste un intero positivo n per il quale $A^n = 0$, allora $I - A$ è invertibile.*

Soluzione. Se $A^2 = 0$, allora $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I$, e quindi la matrice $I - A$ è invertibile.
Più in generale, se $A^n = 0$ per qualche intero positivo n, allora

$$(I - A)(I + A + \cdots + A^{n-1}) = I + A + \cdots + A^{n-1} - A - \cdots - A^{n-1} = I.$$

Pertanto $I - A$ è invertibile.

Esercizio 1.7.16 *Siano A, B matrici quadrate $n \times n$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta.*

1. *Se A e B sono simmetriche, allora $A + B$ è simmetrica.*
2. *Se A e B sono antisimmetriche, allora $A + B$ è antisimmetrica.*
3. *Se A e B sono simmetriche, allora AB è simmetrica.*
4. *Se A e B sono antisimmetriche, allora AB è antisimmetrica.*

1.8 Applicazioni lineari

Definizione 1.8.1 *Siano V e W spazi vettoriali reali. Un'applicazione*

$$F : V \longrightarrow W$$

si dice lineare *se soddisfa le seguenti proprietà:*

1) (Additività). *Per ogni v_1, v_2 in V,*

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2).$$

2) (Omogeneità). *Per ogni λ in $\mathbb{R}$ e per ogni v in V,*

$$F(\lambda v) = \lambda F(v).$$

Esempio. Se V è un qualunque spazio vettoriale, l'*applicazione identità* Id_V (o 1_V) di V, definita da

$$Id_V : V \longrightarrow V, \quad Id_V(v) = v \quad \text{per ogni } v \in V,$$

è ovviamente lineare.

Esempio. Se V e W sono spazi vettoriali, l'applicazione $V \longrightarrow W$, $v \longmapsto 0$ per ogni vettore $v \in V$, è lineare. Questa applicazione è detta *applicazione lineare nulla* da V a W e si denota con il simbolo 0.

Definizione 1.8.2 *Un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ il cui dominio coincide con il codominio, si chiama anche un* operatore lineare*, o semplicemente un* operatore*, o anche un* endomorfismo lineare*.*

Vediamo come si possono rappresentare le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Scriviamo il vettore colonna $X \in \mathbb{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica $(e_1, ..., e_n)$:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix}$$

Poiché F è lineare, l'immagine $Y = F(X) \in \mathbb{R}^m$ si scrive:

$$Y = F(X) = x_1 F(e_1) + \cdots + x_n F(e_n) \tag{1.8.1}$$

Vediamo allora che per conoscere $F(X)$ basta conoscere i vettori $F(e_1), ..., F(e_n)$. Ora $F(e_1), ..., F(e_n)$ sono vettori di $\mathbb{R}^m$, che scriviamo come colonne:

$$F(e_1) = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots \quad F(e_n) = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{vmatrix} \tag{1.8.2}$$

Se conosciamo la matrice

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

(con m righe e n colonne) siamo in grado allora di ottenere l'immagine $Y = F(X)$ di un *qualunque* vettore $X \in \mathbb{R}^n$: da 1.8.1 e 1.8.2 segue infatti che la componente i-esima del vettore $Y = F(X)$ è data da:

$$y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \tag{1.8.3}$$

L'uguaglianza 1.8.3 (valida per ogni $i = 1, ..., m$) si può scrivere, in modo più compatto, in forma matriciale. Dalla definizione generale 1.6.1 segue che il prodotto AX della matrice A (di tipo $m \times n$) per il vettore colonna $X \in \mathbb{R}^n$ è il vettore colonna di $\mathbb{R}^m$ la cui componente i-esima è:

$$(AX)_i = a_{i1}x_1 + \cdots\cdots a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$$

Con questa notazione, possiamo concludere:

Teorema 1.8.3 *Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora esiste un'unica matrice A di tipo $m \times n$ per la quale vale, per ogni $X \in \mathbb{R}^n$,*

$$F(X) = AX \tag{1.8.4}$$

(prodotto della matrice A per il vettore colonna X).

Se vale 1.8.4, diremo che la matrice A *rappresenta l'applicazione lineare* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *rispetto alle basi canoniche di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$.

Se A è una qualunque matrice $m \times n$, definiamo *moltiplicazione a sinistra* per A l'applicazione

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

che a ogni vettore

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$$

associa il vettore di $\mathbb{R}^m$

$$L_A(X) = AX = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{vmatrix}$$

prodotto della matrice A per il vettore colonna X. (È facile verificare che l'applicazione L_A è lineare). Il teorema 1.8.3 afferma allora che *ogni applicazione lineare* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *è del tipo*

$$F = L_A$$

dove L_A *è la moltiplicazione a sinistra per un'opportuna matrice* $A \in M(m \times n)$.

Esempio. Un'applicazione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se è del tipo

$$F(x) = ax,$$

dove a è un qualunque numero reale.

Esempio. Un'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali in $\mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = ax + by = \begin{vmatrix} a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$$

per ogni (x, y).

Esempio. Le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sono esattamente le funzioni del tipo $F(X) = AX$, dove $A = \begin{vmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}$ è una qualunque matrice $1 \times n$ e $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$ è un vettore colonna di $\mathbb{R}^n$.

Le funzioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ sono dunque del tipo

$$F(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

con $a_1, ..., a_n$ costanti arbitrarie.

Esempio. Un'applicazione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è lineare se e solo se esiste una matrice $A = \begin{vmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{vmatrix}$ tale che

$$F(t) = At = (a_1t, \cdots, a_nt)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Interpretazione cinematica (per $n = 3$): $F(t) = tA$, $t \in \mathbb{R}$, è la legge oraria di un moto rettilineo uniforme; la traiettoria è la retta del vettore A, e la velocità (costante) è il vettore A.

Si vede facilmente che se $F : V \longrightarrow W$ e $G : W \longrightarrow Z$ sono applicazioni lineari, l'applicazione composta $G \circ F : V \longrightarrow Z$ è lineare (Si veda l'esercizio 1.9.4). Consideriamo in particolare il diagramma di applicazioni lineari:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G \circ F"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "G"] \\ & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

Per il teorema 1.8.3 che ciascuna di queste tre applicazioni lineari $F, G, G \circ F$ è rappresentata da una matrice opportuna, diciamo rispettivamente $A \in M(m \times n)$, $B \in M(l \times m)$ e $C \in M(l \times n)$. Se conosciamo le matrici A e B di F e G, come possiamo costruire la matrice C che rappresenta la composizione $G \circ F$? Si vede facilmente che l'elemento C_{ij} della matrice C è dato da:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj} \\ &= \sum_{s=1}^{m} b_{is}a_{sj}. \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

Date due matrici $B \in M(l \times m)$ e $A \in M(m \times n)$, ricordiamo che il prodotto (righe per colonne) BA è la matrice di tipo $l \times n$ la cui componente i, j è

$$\begin{aligned} (BA)_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj} \\ &= \sum_{s=1}^{m} b_{is}a_{sj}. \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

Abbiamo allora dimostrato la seguente

Proposizione 1.8.4 *Siano $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ applicazioni lineari, rappresentate rispettivamente dalle matrici A e B (nel senso del teorema 1.8.3). Allora l'applicazione composta $G \circ F$ è rappresentata dalla matrice prodotto BA.*

Il teorema precedente giustifica il modo in cui è definito il prodotto di matrici.

Definizione 1.8.5 *Si dice che un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ è un* isomorfismo *(lineare) o un'applicazione* invertibile*, se esiste un'applicazione lineare $G : W \longrightarrow V$ per la quale*

$$G \circ F = 1_V \quad e \quad F \circ G = 1_W$$

Diremo che G è una inversa *di F. Si dice lo spazio vettoriale V è* isomorfo allo spazio vettoriale *W se esiste un isomorfismo da V a W.*

Naturalmente, se V è isomorfo a W, allora W è isomorfo a V. (Infatti, se F è un isomorfismo da V a W, allora F^{-1} è un isomorfismo da W a V. Inoltre, se V è isomorfo a W, e W è isomorfo a Z, allora V è isomorfo a Z. (Dimostrarlo).

Un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ non può avere due inverse distinte: se $G : W \longrightarrow V$ e $G' : W \longrightarrow V$ sono inverse di F, allora $G = G'$:

$$G' = G' \circ 1_W = G' \circ (F \circ G) = (G' \circ F) \circ G = 1_V \circ G = G$$

Se F è invertibile, la sua (unica) inversa si denota con il simbolo F^{-1}.

Perché un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ sia invertibile, è sufficiente che sia biunivoca: in tal caso infatti la sua inversa, come applicazione tra insiemi, è lineare:

Proposizione 1.8.6 *Supponiamo che un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ sia biunivoca e sia $G : W \longrightarrow V$ la sua inversa come applicazione tra insiemi. Allora anche G è lineare e quindi F è un isomorfismo lineare.*

Dimostrazione. Siano $w_1, w_2 \in W$. Poiché F è biunivoca, esistono e sono unici due vettori $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = w_1$ e $F(v_2) = w_2$. Allora $w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$. Applicando G:

$$G(w_1 + w_2) = G(F(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = G(w_1) + G(w_2)$$

Questo prova che G è additiva. In modo analogo si dimostra che G è omogenea. ■

Un isomorfismo $F : V \longrightarrow V$ si dice *automorfismo*.

Esempio. Sia $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ una base di V e sia

$$\begin{aligned} [-]_{\mathcal{B}} : V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_1v_1 + ... + x_nv_n &\longmapsto [v]_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n) \end{aligned} \tag{1.8.7}$$

l'applicazione che a ogni vettore $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ di V associa la n-upla $(x_1, ..., x_n)$ delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. L'applicazione $[-]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo lineare [Esercizio]. In questo modo si dimostra che *ogni spazio vettoriale reale di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Esempio. Lo spazio vettoriale $M(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali $m \times n$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$. Trovare due diversi isomorfismi tra questi spazi.

Esempio. L'applicazione lineare $M(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(n \times m, \mathbb{R})$, $A \mapsto {}^tA$, è un isomorfismo.

Proposizione 1.8.7 *Siano V e W spazi vettoriali e sia $(v_1, ..., v_n)$ una qualunque base di V. Allora per ogni n-pla ordinata $(w_1, ...w_n)$ di vettori in W esiste un'unica applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ per la quale $F(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$.*

Dimostrazione. *Unicità.* Supponiamo che $F : V \longrightarrow W$ sia una qualsiasi applicazione lineare soddisfacente $F(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$. Ogni vettore v di V si scrive come $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ (usiamo il fatto che i vettori $v_1, ..., v_n$ generano V). Dunque:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 F(v_1) + ... + \lambda_n F(v_n) && \text{perché } F \text{ è lineare} \\ &= \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n && \text{per le ipotesi } F(v_i) = w_i \end{aligned}$$

L'immagine $F(v)$ di un qualunque vettore $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ è dunque forzata ad essere $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$. Ne segue che la definizione stessa di F è forzata: di applicazione lineari F soddisfacenti $F(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$ ne esiste al più una.

Esistenza. Per quanto visto sopra, la scelta è obbligata: per provare l'esistenza di un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ con i requisiti richiesti, poniamo, per ogni $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$,

$$F(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$$

Poiché il modo di scrivere v come combinazione lineare dei vettori $(v_1, ..., v_n)$ è unico, in questo modo si viene veramente a definire una funzione. È ora facile verificare che l'applicazione F così definita è lineare e che $F(v_i) = w_i$, $i = 1, ..., n$. ∎

Il teorema precedente afferma che per definire un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ basta definire, *in modo del tutto arbitrario*, le immagini $F(v_i)$ dei vettori di una qualunque base $(v_1, ..., v_n)$ di V. Ad esempio, è sensato dire: "Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare *definita* da F(1,0)=(1,0,2) e F(0,1)=(1,1,3), perché $(1, 0), (0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Esplicitamente, quale sarà l'immagine di un qualunque vettore (x, y) in $\mathbb{R}^2$? Come nella dimostrazione del teorema, scriviamo (x, y) come combinazione lineare dei vettori della base assegnata: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Allora

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(x(1, 0) + y(0, 1)) &= xF(1, 0)) + yF(0, 1) \\ &= x(1, 0, 2) + y(1, 1, 3) = (x + y, y, 2x + 3y) \end{aligned}$$

1.9 Esercizi

Esercizio 1.9.1 *Dimostrare che se $F : V \longrightarrow W$ è lineare, allora $F(0) = 0$.*

(Suggerimento: $F(0) = F(0 + 0) = ...$)

Esercizio 1.9.2 *Dire quali delle seguenti funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono lineari.*

a) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + 1$;

b) $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = 0$;

c) $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = -3x$.

Esercizio 1.9.3 *Dire quali delle seguenti funzioni $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sono lineari.*

a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = 2x$;

b) $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = xy$;

c) $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(x, y) = 3x + 5y$.

Esercizio 1.9.4 *Dimostrare che se $F : V \longrightarrow W$ e $G : W \longrightarrow Z$ sono applicazioni lineari, allora l'applicazione composta $G \circ F : V \longrightarrow Z$ è lineare.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G \circ F"'] & W \arrow[d, "G"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Siano v_1, v_2 vettori arbitrari in V

$$\begin{aligned} (G \circ F)(v_1 + v_2) &= G(F(v_1 + v_2)) && \text{per definizione di } G \circ F \\ &= G(F(v_1) + F(v_2)) && \text{perché } F \text{ è additiva} \\ &= G(F(v_1)) + G(F(v_2)) && \text{perché } G \text{ è additiva} \\ &= (G \circ F)(v_1) + (G \circ F)(v_2) && \text{per definizione di } G \circ F \end{aligned}$$

Questo prova che l'applicazione composta $G \circ F$ è additiva. In modo del tutto analogo si prova che $G \circ F$ è omogenea, e quindi lineare.

Esercizio 1.9.5 *Dire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ per la quale si abbia $F(1,0) = (2,0), F(0,-1) = (0,2), F(2,-3) = (3,7)$.*

Soluzione. I due vettori $(1,0)$ e $(0,-1)$ sono linearmente indipendenti. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ soddisfacente le prime due condizioni: $\varphi(1,0) = (2,0), \varphi(0,-1) = (0,2)$. Dobbiamo controllare se $\varphi(2,-3) = (3,7)$. Scriviamo il vettore $(2,-3)$ in termini della base $(1,0), (0,-1)$:

$$(2,-3) = 2(1,0) + 3(0,-1).$$

Allora, poiché φ è lineare,

$$\varphi(2,-3) = 2\varphi(1,0) + 3\varphi(0,-1) = 2(2,0) + 3(0,2) = (4,6).$$

Pertanto non esiste alcuna applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

Esercizio 1.9.6 *Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(1,0,0) = (2,0,0), F(0,1,0) = (1,2,1), F(1,1,1) = (1,0,2)$. Trovare $T(2,3,1)$.*

1.10 Applicazioni lineari e matrici

In questa sezione consideriamo solo spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostreremo che, dati due spazi vettoriali (finito-dimensionali) V e W, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, la scelta di una base $\mathcal{B}$ in V e di una base $\mathcal{C}$ in W definisce un isomorfismo tra lo spazio vettoriale $\hom(V, W)$ delle applicazioni lineari da V a W e lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(m \times n)$. Tale isomorfismo dipende dalla scelta delle basi.

1.10.1 Matrice associata a un'applicazione lineare

Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ di V e una base $\mathcal{B}' = (w_1, ..., w_m)$ di W. Scriviamo ogni immagine $F(v_1), ..., F(v_n)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{array}{ccc} F(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ F(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ ... & = & .... \\ F(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{array}$$

Associamo all'applicazione lineare F la seguente matrice $m \times n$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Si noti che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ viene costruita, per colonne, nel modo seguente:

$$\begin{gathered} \text{colonna } 1 = \text{coordinate di } F(v_1) \text{ rispetto alla base } \mathcal{B}' \\ \text{colonna } 2 = \text{coordinate di } F(v_2) \text{ rispetto alla base } \mathcal{B}' \\ .... \\ \text{colonna } n = \text{coordinate di } F(v_n) \text{ rispetto alla base } \mathcal{B}' \end{gathered}$$

Diremo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ è la *matrice che rappresenta l'applicazione lineare F rispetto alle basi $\mathcal{B}$ (del dominio) e $\mathcal{B}'$ (del codominio).*

Al prossimo teorema, premettiamo un'osservazione. Dati due qualunque spazi vettoriali V e W, l'insieme $\hom(V, W)$ di tutte le applicazioni lineari da V a W è dotato in modo naturale di una struttura di spazio vettoriale: la somma di due applicazioni lineari $F, G \in \hom(V, W)$ e la moltiplicazione di un numero λ per $F \in \hom(V, W)$ sono definite ponendo:

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v), \qquad (\lambda F)(v) = \lambda\, F(v)$$

per ogni $v \in V$ e per ogni numero λ.

Teorema 1.10.1 *Fissate una base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ di V e una base $\mathcal{B}' = (w_1, ..., w_m)$ di W, l'applicazione*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(-) : \hom(V, W) \longrightarrow \mathcal{M}(m \times n), \qquad F \longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) \tag{1.10.1}$$

che a ogni applicazione lineare F associa la matrice che la rappresenta rispetto alle basi fissate, è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dunque $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(-)$ è una bigezione per la quale valgono

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F + G) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(G)$$

e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\lambda F) = \lambda M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$$

per ogni F, G in $\hom(V, W)$ e per ogni numero λ.

Se poi $V = W$ e si sceglie $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, anziché $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ si scrive più semplicemente $M_{\mathcal{B}}(F)$.

Osservazione. Si ricordi che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$ dipende dalla scelta delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Proposizione 1.10.2 *Siano $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di W. Per ogni vettore v di V, denotiamo con*

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$$

le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora il vettore colonna

$$[F(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_m \end{vmatrix}$$

delle coordinate di $F(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ di W è dato dal prodotto (di matrici):

$$[F(v)]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)\, [v]_{\mathcal{B}} \tag{1.10.2}$$

∎

(La dimostrazione è lasciata come esercizio.)

Esempio. $V = W = \mathbb{R}^2$, $F = \rho_\vartheta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di un angolo ϑ attorno all'origine. Fissiamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ (base canonica di $\mathbb{R}^2$). Allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) = M_{(e_1,e_2)}(F) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}$$

Se si ruota il vettore $v = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ di un angolo ϑ si ottiene il vettore $\rho_\vartheta(v)$ le cui coordinate (rispetto alla base canonica) sono date dal prodotto

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

Siano $F : V \longrightarrow W$ e $G : W \longrightarrow Z$ applicazioni lineari e $G \circ F$ la loro composizione:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G \circ F"'] & W \arrow[d, "G"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Fissiamo le basi $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ di V, $\mathcal{B}' = (w_1, ..., w_m)$ di W e $\mathcal{B}'' = (z_1, ..., z_l)$ di Z. Allora, esattamente come in 1.8.4, si dimostra:

Proposizione 1.10.3 *La matrice che rappresenta l'applicazione composta $G \circ F$ è il prodotto delle matrici che rappresentano G e F:*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(G \circ F) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(G) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) \tag{1.10.3}$$

Corollario 1.10.4 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sue basi. Allora*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = I = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)$$

(1_V è l'identità di V; I è la matrice identità).

Ne segue che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)$ è invertibile e

$$[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)]^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) \tag{1.10.4}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare il precedente teorema, prendendo $U = V = W$, $F = G = 1_V$, e osservando che, per ogni base $\mathcal{B}$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(1_V) = I$. ∎

1.10.2 Cambio di base

A) Come cambia la matrice di un operatore quando cambia la base

Si tratta di un'immediata conseguenza del teorema 1.10.3.

Proposizione 1.10.5 *Sia $F : V \longrightarrow V$ un operatore di uno spazio vettoriale di dimensione finita V e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V. Allora*

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = [M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V)]^{-1}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) \tag{1.10.5}$$

Dimostrazione. Si applichi due volte il teorema 1.10.3:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(F) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F)$$

(Si ricordi che $F \circ 1_V = F = 1_V \circ F$). ∎

Semplifichiamo le notazioni: posto $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = A$, $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F) = A'$ e $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = P$, il legame fra A e A' è

$$A' = P^{-1}AP \tag{1.10.6}$$

Si dice che una matrice A' è *simile*, o *coniugata*, a una matrice A quando esiste una matrice invertibile P per la quale valga l'uguaglianza 1.10.6. Abbiamo dunque dimostrato che *due matrici che rappresentano uno stesso operatore rispetto a due basi diverse sono simili.*

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto alla bisettrice $x - y = 0$. Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ dove

$$e_1' = (1,1) = e_1 + e_2, \qquad e_2' = (1,-1) = e_1' - e_2'$$

Allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Per trovare $[M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)]^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(1_V)$ basta esprimere (e_1, e_2) in termini di (e_1', e_2'):

$$e_1 = 1/2e_1' + 1/2e_2' \qquad e_2 = 1/2e_1' - 1/2e_2'$$

Quindi:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(1_V) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Ne segue:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\sigma) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

B) Come cambiano le coordinate di un vettore quando cambia la base

Proposizione 1.10.6 *Sia V uno spazio vettoriale, e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora, per ogni vettore v in V,*

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(1_V)\,[v]_{\mathcal{B}} \tag{1.10.7}$$

Dimostrazione. Si ponga, nel teorema 1.10.2, $V = W$ e $F = 1_V$.

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1)) = (e_1, e_2)$ la base canonica, $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ la base ottenuta ruotando la base $\mathcal{B}$ di un angolo ϑ. Questo significa che:

$$\begin{aligned} e_1' &= \cos\vartheta\, e_1 + \sin\vartheta\, e_2 \\ e_2' &= -\sin\vartheta\, e_1 + \cos\vartheta\, e_2 \end{aligned}$$

La matrice dell'identità 1_V dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}$$

e la sua inversa è

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(1_V) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}$$

Ora sia $v = (x, y)$ un qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$. Allora le $\mathcal{B}$-coordinate di v sono

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

mentre le $\mathcal{B}'$-coordinate dello stesso vettore v sono

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(1_V)\,[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

1.11 Esercizi

Esercizio 1.11.1 *In uno spazio vettoriale V di dimensione due, sono date due basi $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, soddisfacenti:*

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 \\ e'_2 &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Dato un vettore $v \in V$, siano (x, y) le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$ e (x', y') le sue coordinate nella base $\mathcal{B}'$. Esprimere x, y in funzione di x', y' e viceversa.

Soluzione. La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)$ che rappresenta l'identità $1_V : V \longrightarrow V$ rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ (nel dominio) e $\mathcal{B}$ (nel codominio), è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(La prima colonna dà le componenti di $1_V(e'_1)(= e'_1)$ nella base $\mathcal{B}$; la seconda colonna dà le componenti di $1_V(e'_2)(= e'_2)$ nella base $\mathcal{B}$).

Posto:

$$X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, \qquad X' = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix},$$

si ha:

$$X = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)\, X', \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}.$$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}.$$

Risolvendo rispetto a x', y' si ottiene:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}.$$

Esercizio 1.11.2 *Nello spazio vettoriale V di dimensione tre è data una base (v_1, v_2, v_3), rispetto alla quale le coordinate sono denotate x, y, z. Dire se la trasformazione lineare omogenea*

$$x = 2x' - y', \quad y = x' + y', \quad z = x' + y' - z', \tag{1.11.1}$$

si può interpretare come legame tra le coordinate x, y, z e coordinate x', y', z' rispetto a un'opportuna base (v'_1, v'_2, v'_3). In caso affermativo, esprimere i vettori v_1, v_2, v_3 in termini dei vettori v'_1, v'_2, v'_3, e viceversa.

Soluzione. Posto $X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, $X' = \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$, la trasformazione 1.11.1 si scrive, in forma matriciale, $X = AX'$, dove

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 1.11.3 *Si consideri la base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e sia v il vettore di coordinate $(1, 2, 0)$ rispetto alla base canonica calB di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$.*

Soluzione. Le coordinate $[v]_{\mathcal{B}'}$ di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si ottengono dalle coordinate

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

dello stesso v rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}'} &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_{\mathbb{R}^3})[v]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1.12 Somme di sottospazi. Formula di Grassmann

Definizione 1.12.1 *Sia V uno spazio vettoriale e siano U_1, U_2 sottospazi di V. La* somma *di U_1 e U_2 è*

$$U_1 + U_2 = \{v \in V \mid \exists u_1 \in U_1,\, \exists u_2 \in U_2 \quad v = u_1 + u_2\}$$

In altri termini, $U_1 + U_2$ è costituito da tutti i vettori v in V che si scrivono come $v = u_1 + u_2$ per qualche $u_1 \in U_1$ e qualche $u_2 \in U_2$.

Esercizio. Si dimostri che $U_1 + U_2$ è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio. Si dimostri che $U_1 + U_2$ è *il più piccolo sottospazio di V che contiene sia U_1 che U_2*, nel senso seguente:

1) $U_1 + U_2$ contiene sia U_1 che U_2;

2) se W è un qualunque sottospazio di V che contiene sia U_1 che U_2, allora $U_1 + U_2 \subseteq W$.

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre, U_1 un sottospazio di dimensione 1 (una retta passante per l'origine) e U_2 un sottospazio di dimensione due (un piano passante per l'origine). Allora:

$$U_1 + U_2 = \begin{cases} V & \text{se } U_1 \not\subseteq U_2 \ , \\ U_2 & \text{se } U_1 \subset U_2. \end{cases}$$

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre e siano U_1, U_2 due sottospazi di dimensione uno (cioè due rette di V, ovviamente passanti per l'origine). Allora:

$$U_1 + U_2 = \begin{cases} \text{il piano contenente } U_1 \text{ e } U_2 & \text{se } U_1 \neq U_2 \ , \\ U_1 & \text{se } U_1 = U_2. \end{cases}$$

Teorema 1.12.2 (Formula di Grassmann) *Se U_1, U_2 sono sottospazi (di dimensione finita) di V, allora*

$$\dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \tag{1.12.1}$$

Non dimostriamo questo teorema. Ci limitiamo a notare un'analogia: se $A, B \subseteq X$ sono sottoinsiemi (finiti) di un qualunque insieme X, allora:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

Definizione 1.12.3 *Sia V uno spazio vettoriale e siano U, U' sottospazi di V. Si dice che V è* somma diretta *di U e U', e si scrive:*

$$V = U \oplus U'$$

se ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + u'$ con $u \in U$ e $u' \in U'$.

Se U e U' sono sottospazi vettoriali di V e V è somma diretta di U e U',

$$V = U \oplus U',$$

si dice che i sottospazi U e U' sono *supplementari* in V.

Se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finito-dimensionale V, esiste sempre un sottospazio U' tale che V sia somma diretta di U e U'. (Se $U = V$, basta prendere $U' = 0$. Altrimenti, si fissi una base $v_1, ..., v_h$ di U e la si estenda a una base $v_1, ..., v_h, v_{h+1}, ..., v_n$ di V. Chiamiamo U' il sottospazio generato dai vettori $v_{h+1}, ..., v_n$. Allora $V = U \oplus U'$.).

Esercizio. Dimostrare che $V = U \oplus U'$ se e solo se:

1) $V = U + U'$;

2) $U \cap U' = 0$ (Sottospazio nullo, costituito dal solo vettore 0).

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^3$, $U = L(e_1, e_2)$ e $U' = L(e_3)$. Allora $V = U \oplus U'$. Infatti

$$L(e_1, e_2) + L(e_3) = L(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$$

e

$$L(e_1, e_2) \cap L(e_3) = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}^3$, $U = L(e_1, e_2) =$ e $U' = L(e_2, e_3)$. Allora V *non* è somma diretta di U e U': infatti $V = U + U'$, ma $U \cap U' = L(e_2) \neq 0$.

Si noti che se $V = U \oplus U'$, allora

$$\dim U + \dim U' = \dim V \tag{1.12.2}$$

Infatti per la formula di Grassmann 1.12.1:

$$\dim V = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U') = \dim U + \dim U'$$

perché $U \cap U' = 0$. ∎

1.13 Nucleo e immagine

Definizione 1.13.1 *Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Il* nucleo $\mathrm{Ker}\ F$ *di F è il sottospazio di V:*

$$\mathrm{Ker}\ F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

*L'*immagine $\mathrm{Im}\ F$ *di F è il sottospazio di W:*

$$\mathrm{Im}\ F = \{w \in W \mid \exists v \in V \quad F(v) = w\}$$

La verifica del fatto che $\mathrm{Ker}\ F$ è un sottospazio di V e $\mathrm{Im}\ F$ è un sottospazio di W è lasciata come esercizio (Si veda 1.14.4).

Esempio. Sia $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la moltiplicazione a sinistra per una matrice A di tipo $m \times n$: $L_A(X) = AX$, per ogni vettore colonna X in $\mathbb{R}^n$. Allora il nucleo

$$\mathrm{Ker}\ L_A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

è il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$. Il sottospazio $\mathrm{Ker}\ L_A$, denotato anche più semplicemente $\mathrm{Ker}\ A$, è chiamato *nucleo della matrice A*.

L'immagine

$$\mathrm{Im}\ L_A = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \exists X \in \mathbb{R}^n \quad AX = b\}$$

è l'insieme dei vettori (colonna) b in $\mathbb{R}^m$ per i quali il sistema lineare $AX = b$ è risolubile (cioè, ha almeno una soluzione).

Esempio. Sia $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. (P associa a ogni vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale sul piano $z = 0$.) Allora

$$\mathrm{Ker}\ P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \{(0, 0, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Im}\ P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

In altre parole, $\mathrm{Ker}\ P$ è l'asse z e $\mathrm{Im}\ P$ è il piano $z = 0$. Si noti che questo esempio è un caso particolare del precedente: moltiplicazione a sinistra per una matrice (quale?).

Esempio. Siano a, b, c tre numeri reali, almeno uno dei quali diverso da zero, e sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da $F(x, y, z) = ax + by + cz$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathrm{Ker}\ F$ è il sottospazio vettoriale (di dimensione due) delle soluzioni dell'equazione $ax + by + cz = 0$, ossia è un piano passante per l'origine. L'immagine $\mathrm{Im}\ F$ è $\mathbb{R}$.

Teorema 1.13.2 *Un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ è iniettiva se e solo se* $\mathrm{Ker}\ F = 0$.

(Come al solito 0 denota il sottospazio nullo, vale a dire il sottospazio che contiene solo il vettore nullo.)

Dimostrazione. Supponiamo che F sia iniettiva (Questo significa, per definizione: Per ogni x, y in V, se $F(x) = F(y)$, allora $x = y$). Sia $x \in \mathrm{Ker}\ F$. Si ha dunque: $F(x) = 0 = F(0)$. Dall'ipotesi di iniettività, segue allora $x = 0$.

Viceversa, supponiamo Ker $F = 0$. Siano x, y in V tali che $F(x) = F(y)$, ossia, in modo equivalente, tali che $F(x - y) = 0$. Quest'ultima condizione equivale a dire $x - y \in$ Ker F. Ma Ker $F = 0$, quindi $x - y = 0$, ossia $x = y$. ∎

Sia A una qualunque matrice $m \times n$ e indichiamo con $e_1, ..., e_n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. L'ordinario prodotto righe per colonne mostra che il vettore colonna

$$Ae_j = A^j$$

è la j-esima colonna di A. Di conseguenza, se denotiamo con

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(X) = AX$$

la moltiplicazione a sinistra per la matrice A, per ogni vettore $X = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ di $\mathbb{R}^n$

$$AX = L_A(X) = x_1 A^1 + ... + x_m A^m$$

Abbiamo così dimostrato:

Proposizione 1.13.3 *Per ogni matrice A di tipo $m \times n$, l'immagine dell'applicazione lineare L_A è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.*

Definizione 1.13.4 *Il* rango *di un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$, denotato* rk F, *è la dimensione dell'immagine di F:*

$$\text{rk } F = \dim \text{Im } F$$

Il rango *di una matrice A, denotato* rk A, *è il rango dell'applicazione lineare L_A (moltiplicazione a sinistra per A); in modo equivalente, il rango di A è la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di A:*

$$\text{rk } A = \dim \text{Im } L_A$$

1.13.1 Il teorema delle dimensioni

Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Per definizione, la *nullità* di F è la dimensione di Ker F. Il seguente teorema è fondamentale:

Teorema 1.13.5 (delle dimensioni, o teorema Nullità+Rango) *Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, con V di dimensione finita. Allora:*

$$\dim \text{Ker } F + \dim \text{Im } F = \dim V \tag{1.13.1}$$

Il teorema 1.13.5 è un'immediato corollario del seguente:

Teorema 1.13.6 *Sia $V \xrightarrow{F} W$ un'applicazione lineare. Allora lo spazio vettoriale $F(V)$ (immagine di V tramite F) è isomorfo a ogni spazio vettoriale di V supplementare di* Ker F.

Dimostrazione. Sia U un sottospazio supplementare di Ker F in V. Ricordiamo che questo significa:

Ogni $x \in V$ si scrive in modo unico come

$$x = y + z \qquad y \in \text{Ker } F \qquad z \in U \tag{1.13.2}$$

Ne segue che l'intersezione $U \cap \text{Ker } F$ contiene il solo vettore nullo e che

$$\dim \text{Ker } (F) + \dim U = \dim V \tag{1.13.3}$$

Restringiamo ora il dominio di F da V a U e il codominio da W a $F(V)$. Otteniamo in questo modo la funzione (che con un abuso di notazione denotiamo ancora con F)

$$U \xrightarrow{F} F(V) \tag{1.13.4}$$

che associa a ogni elemento $z \in U$ l'elemento $F(z) \in F(V)$. Si vede facilmente che questa funzione è suriettiva (cioè i vettori $F(z)$, al variare di z in U, riempiono tutto $F(V)$). Infatti, consideriamo un qualunque elemento $F(x) \in F(V)$, con $x \in V$. Scriviamo x come in 1.13.2. Allora $F(x) = F(y)+F(z) = F(z)$, perché $F(y) = 0$. Dunque $F(x) = F(y)+F(z) = F(z)$ con $z \in U$, il che prova che 1.13.4 è suriettiva. Inoltre la funzione 1.13.4 è anche iniettiva, perché se z, z' sono vettori di U tali che $F(z) = F(z')$, allora $F(z - z') = 0$ e quindi $z - z' \in \text{Ker } F$. Dunque $z - z'$ sta sia in $U \cap \text{Ker } F$ e quindi $z - z' = 0$, cioè $z = z'$. Dunque 1.13.4 è un isomorfismo lineare. ∎

Poiché 1.13.4 è un isomorfismo, $\dim U = \dim F(V)$. Ma per definizione $\dim F(V) = \text{rk } (F)$. Da 1.13.3 segue allora il Teorema Nullità+Rango:

$$\dim V = \dim \text{Ker } (F) + \text{rk } (F) \tag{1.13.5}$$

Vediamo una conseguenza del Teorema di Nullità+Rango.

Teorema 1.13.7 *Sia* $F : V \longrightarrow W$ *un'applicazione lineare e supponiamo* $\dim V = \dim W$. *Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) F è iniettiva;

2) F è suriettiva;

3) F è un isomorfismo.

Dimostrazione. Poniamo $\dim V = \dim W = n$. Allora:

$$\begin{aligned} F \text{ iniettiva} \quad &\Longleftrightarrow \quad \dim \text{Ker } F = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim \text{Im } F = \dim V \quad \text{(per l'uguaglianza 1.13.1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim \text{Im } F = \dim W \quad (\text{perché } \dim V = \dim W) \\ &\Longleftrightarrow \quad F \text{ suriettiva} \end{aligned}$$

■

Teorema 1.13.8 *Una matrice quadrata A di ordine n è invertibile se e solo se* rk $A = n$.

Dimostrazione. Sia $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'operatore associato alla matrice A (cioè la moltiplicazione a sinistra per la matrice A). La matrice A è invertibile se e solo se L_A è un isomorfismo. Per il teorema precedente, L_A è un isomorfismo se e solo se L_A è suriettivo, cioè se e solo se rk $A = \dim L_A = n$. ■

1.14 Esercizi

Esercizio 1.14.1 *Dimostrare che ogni matrice quadrata si scrive, in modo unico, come somma di una matrice simmetrica di una matrice antisimmetrica. In altri termini, dimostrare che*

$$M(n \times n) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$$

Dimostrazione. Una qualsiasi matrice quadrata A si può scrivere come somma

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

della matrice simmetrica $\frac{A + {}^tA}{2}$ e della matrice antisimmetrica $\frac{A - {}^tA}{2}$.
Proviamo l'unicità di tale scrittura. Supponiamo dunque che A si scriva come

$$A = A_1 + A_2, \qquad A = A_1' + A_2', \tag{1.14.1}$$

dove A_1, A_1' sono simmetriche, e A_2, A_2' sono antisimmetriche. Dalle equazioni 1.14.1 segue l'uguaglianza

$$A_1' - A_1 = A_2 - A_2'. \tag{1.14.2}$$

Ora $A_1' - A_1$ è simmetrica, e $A_2 - A_2'$ antisimmetrica; poiché sono uguali, $A_1' - A_1$ e $A_2 - A_2'$ sono allora al tempo stesso simmetriche e antisimmetriche, e quindi nulle: $A_1' - A_1 = 0$ e $A_2' - A_2 = 0$. Pertanto $A_1' = A_1$ e $A_2' = A_2$. ■

Esercizio 1.14.2 *Si considerino i sottospazi di* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}, \qquad W = L(w),\ w = (1, 0, 1)$$

Trovare $\dim(U + W)$ *e una base di* $U + W$.

Esercizio 1.14.3 *Si considerino i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0\}, \qquad W = L(w),\ w = (1, 0, 1, 1)$$

Trovare: $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U + W)$, $\dim U \cap W$.

Esercizio 1.14.4 *Sia* $F : V \longrightarrow W$ *un'applicazione lineare. Dimostrare:*

a) il sottoinsieme $\text{Ker } F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* V*;*

b) il sottoinsieme $\text{Im } F = \{w \in W \mid \exists v \in V \quad F(v) = w\}$ *è un sottospazio vettoriale di* W*.*

Soluzione. a) Siano $x, y \in \text{Ker } F$; per definizione questo significa: $F(x) = 0$, $F(y) = 0$. Allora $F(x+y) = F(x)+F(y) = 0+0 = 0$ e quindi anche $x+y$ appartiene a $\text{Ker } F$; abbiamo così dimostrato che l'insieme $\text{Ker } F$ è chiuso rispetto alla somma. Se λ è un qualunque numero e $x \in \text{Ker } F$, allora $F(\lambda x) = \lambda F(x) = \lambda \cdot 0 = 0$, quindi $\lambda x \in \text{Ker } F$; l'insieme $\text{Ker } F$ è dunque chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Infine $\text{Ker } F$ non è vuoto, in quanto contiene il vettore 0: infatti $F(0) = 0$. Questo completa la dimostrazione.

b) Siano $w_1, w_2 \in \text{Im } F$; per definizione questo significa che esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $w_1 = F(v_1)$ e $w_2 = F(v_2)$. Allora

$$w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$$

e quindi anche $w_1 + w_2$ appartiene a $\text{Im } F$. Se λ è un qualunque numero, allora

$$\lambda w_1 = \lambda F(v_1) = F(\lambda v_1)$$

e quindi λw_1 appartiene a $\text{Im } F$. Inoltre $\text{Im } F$ contiene almeno il vettore nullo, perché $0 = F(0)$. Concludiamo che $\text{Im } F$ è un sottospazio di W.

Esercizio 1.14.5 *Sia* $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare* $L_A(X) = AX$*, dove* A *è la matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Trovare $\text{rk } L_A$*,* $\dim \text{Ker } L_A$ *e una base di* $\text{Im } L_A$*.*

Esercizio 1.14.6 *Trovare la dimensione dello spazio vettoriale* W *costituito da tutte le matrici* $n \times n$ *a traccia nulla. (Si ricordi che la traccia* $\text{tr } A$ *di una matrice quadrata* A *è la somma degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale).*

(Suggerimento. La traccia tr *è un'applicazione lineare definita sullo spazio vettoriale* $M_{n \times n}$ *delle matrici* $n \times n$*, a valori in* $\mathbb{R}$*. Si osservi che* $W = \text{Ker tr}$ *e si applichi il teorema nullità più rango.)*

Capitolo 2

Sistemi lineari. Rette e piani nello spazio

2.1 Sistemi lineari. Il teorema di Rouché-Capelli

Un *sistema lineare di m equazioni in n incognite* $x_1, ..., x_n$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

In forma matriciale si scrive come $AX = b$, dove

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

La matrice A si chiama *matrice dei coefficienti*,

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix}$$

è il *vettore colonna delle incognite* e

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{vmatrix}$$

è il *vettore colonna dei termini noti.*

Esempio. Il sistema lineare di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

si scrive in forma matriciale come:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Il sistema $AX = b$ è detto *omogeneo* se $b = 0$. Una *soluzione* del sistema $AX = b$ è un qualunque vettore X_0 di $\mathbb{R}^n$ (ossia una qualunque n-upla ordinata di numeri reali) tale che $AX_0 = b$. Denoteremo con

$$Sol(A, b) = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \mid AX_0 = b\}$$

l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = b$.

Il sistema $AX = b$ è detto *risolubile* se ha almeno una soluzione, cioè se $Sol(A, b) \neq \emptyset$.

Due sistemi $AX = b$ e $A'X = b'$ con lo stesso numero di incognite si dicono equivalenti se $Sol(A, b) = Sol(A', b')$, cioè se hanno esattamente le stesse soluzioni.

Consideriamo un sistema lineare $AX = b$ di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema può essere scritto anche:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{vmatrix}$$

o, in modo più conciso,

$$x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n = b,$$

dove $A^1, ..., A^n$ sono le colonne della matrice A dei coefficienti.

Vediamo allora che ogni (eventuale) soluzione $(x_1, ..., x_n)$ esprime il vettore b dei termini noti come combinazione lineare delle colonne di A e quindi *il sistema lineare $AX = b$ è risolubile se e solo se il vettore dei termini noti appartiene allo spazio generato dalle colonne della matrice dei coefficienti.* Questa condizione si verifica se e solo se lo spazio vettoriale generato dalle colonne $A^1, ..., A^n$ è uguale allo spazio vettoriale generato da $A^1, ..., A^n, b$, cioè se e solo se rk $A =$ rk $[A, b]$, dove

$$[A, b] = |A^1, ..., A^n, b| \tag{2.1.1}$$

è la matrice di tipo $m \times (n + 1)$ che si ottiene accostando alla matrice dei coefficienti di A la colonna b dei termini noti. Tale matrice si chiama *matrice completa* del sistema $AX = b$. In definitiva abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema 2.1.1 (Rouché-Capelli) *Un sistema lineare $AX = b$ è risolubile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa:*

$$AX = b \quad \textit{risolubile} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rk } A = \text{rk } [A, b]$$

2.2 Sottospazi affini

Per i nostri scopi, definiamo uno spazio affine come un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, ottenuto da un sottospazio vettoriale W di V mediante una traslazione.

Definizione 2.2.1 *Si dice che un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V è un* sottospazio affine*, o una* varietà affine*, di V se $S = \emptyset$, oppure se esistono un sottospazio vettoriale W di V e un vettore $v_0 \in V$ per i quali*

$$S = W + v_0 = \{v \in V \mid v = w + v_0 \quad \textit{per qualche } w \in W\}$$

Il sottospazio vettoriale W si chiama sottospazio vettoriale associato *a S, o* direzione *di S, e si indica anche con il simbolo $\overrightarrow{S}$.*

Per definizione, la dimensione *di uno spazio affine $S = \overrightarrow{S} + v$, denotata* $\dim S$*, è la dimensione di $\overrightarrow{S}$:*

$$\dim S = \dim \overrightarrow{S} \tag{2.2.1}$$

Ogni sottospazio affine (diverso dall'insieme vuoto) di uno spazio vettoriale V si ottiene dunque da un sottospazio vettoriale W di V mediante un'opportuna traslazione. Naturalmente ogni sottospazio vettoriale W di V (incluso V stesso) è anche un sottospazio affine (In questo caso, come vettore di traslazione si può prendere il vettore nullo, o un qualunque altro vettore $w \in W$). I sottospazi affini di dimensione zero, uno e due si dicono anche, rispettivamente, punti, rette e piani.

Esempi fondamentali sono i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo che i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono lo spazio nullo (o spazio zero) $0 = \{(0, 0, 0)\}$, cioè lo spazio che ha come unico elemento il vettore nullo[1], tutte le rette passanti per l'origine, tutti i piani passanti per l'origine e l'intero spazio $\mathbb{R}^3$. Pertanto i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ sono:

- l'insieme vuoto $\emptyset$;
- tutti i punti;

[1]Non si confonda lo spazio nullo con l'insieme vuoto $\emptyset$, che non è un sottospazio vettoriale.

- tutte le rette (passanti o meno per l'origine);
- tutti i piani (passanti o meno per l'origine);
- lo spazio stesso $\mathbb{R}^3$.

Definizione 2.2.2 (Parallelismo) *Due piani affini* $P_1 = W_1 + v_1$ *e* $P_2 = W_2 + v_2$ *di uno spazio vettoriale* V *si dicono* paralleli *se* $W_1 = W_2$.

Due rette affini $R_1 = U_1 + v_1$ *e* $R_2 = U_2 + v_2$ *di uno spazio vettoriale* V *si dicono* parallele *se* $U_1 = U_2$.

Una retta $R_1 = U_1 + v_1$ *e un piano* $P_2 = W_2 + v_2$ *si dicono* paralleli *se* $U_1 \subset W_2$.

Due sottospazi affini non vuoti sono sghembi *se non sono paralleli e la loro intersezione è l'insieme vuoto; si dicono* incidenti *se non sono paralleli e la loro intersezione non è l'insieme vuoto.*

Concetto generale di parallelismo. Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione arbitraria) e siano

$$S = \overrightarrow{S} + v, \qquad T = \overrightarrow{T} + v_2$$

due suoi sottospazi affini di dimensione arbitraria ($\overrightarrow{S}, \overrightarrow{T}$ sottospazi vettoriali di V).

Si dice che S e T sono paralleli se uno dei due sottospazi vettoriali $\overrightarrow{S}, \overrightarrow{T}$ è contenuto nell'altro:

$$\overrightarrow{S} \subseteq \overrightarrow{T} \qquad \text{oppure} \qquad \overrightarrow{T} \subseteq \overrightarrow{S} \tag{2.2.2}$$

Si noti che il parallelismo tra spazi di ugual dimensione è una relazione transitiva, mentre il parallelismo tra spazi di dimensione diversa (che possiamo chiamare parallelismo debole), non è una relazione transitiva. Ad esempio, se una retta r è parallela a un piano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}$ è parallelo a una retta s, allora non è detto che r e s siano parallele.

Teorema 2.2.3 *Sia* $AX = b$ *un qualunque sistema lineare non omogeneo in* n *incognite. Supponiamo che esista almeno una soluzione* X_0 *(ossia un vettore* $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $AX_0 = b$*). Allora l'insieme* $Sol(A, b)$ *delle soluzioni è*

$$Sol(A, b) = Sol(A, 0) + X_0$$

In altre parole, le soluzioni del sistema $AX = b$ *sono esattamente del tipo* $Y + X_0$ *dove* Y *è una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato* $AX = 0$.

Dimostrazione. Sia $Y \in Sol(A, 0)$. Questo significa che $AY = 0$. Allora

$$A(Y + X_0) = AY + AX_0 = 0 + b = b,$$

così $Sol(A,0) + X_0$ è contenuto nell'insieme $Sol(A,b)$. Viceversa, sia X una qualunque soluzione di $AX = b$. Allora

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = b - b = 0.$$

Quindi $X - X_0 \in Sol(A,0)$. Posto allora $Y = X - X_0$, abbiamo $X = Y + X_0$ con $AY = 0$ e quindi $Sol(A,b)$ è contenuto nell'insieme $Sol(A,0) + X_0$. Questo prova il teorema. ∎

Ricordando la definizione di sottospazio affine, concludiamo che *l'insieme $Sol(A,b)$ delle soluzioni di un qualunque sistema lineare in n incognite è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$.* Precisamente, $Sol(A,b)$ (se non è vuoto) si ottiene traslando il sottospazio vettoriale $Sol(A,0)$ (spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato) di un qualunque vettore X_0 che sia soluzione di $AX = b$.

Teorema 2.2.4 *Sia $AX = b$ (A matrice $m \times n$) un sistema lineare risolubile. Allora la dimensione dello spazio delle soluzioni è*

$$\dim Sol(A,b) = \textit{numero delle incognite} - \textit{rango di } A \tag{2.2.3}$$

Dimostrazione. Per ipotesi $Sol(A,b)$ non è vuoto, quindi si ottiene traslando il sottospazio vettoriale $Sol(A,0) = \text{Ker } A$. Per il teorema 1.13.5,

$$\begin{aligned} \dim Sol(A,b) = \dim Sol(A,0) = \dim \text{Ker } A &= n - \text{rk } A \\ &= \text{numero delle incognite} - \text{rango} \end{aligned}$$

∎

Esempio. Consideriamo il sistema lineare non omogeneo in tre incognite

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare del sistema è $(1/2, 0, 0)$. Il rango della matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

è 2. Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo è 1 e si vede facilmente che una sua soluzione è $(-1, 1, 1)$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è

$$Sol(A,b) = \{t(-1,1,1) + (1/2,0,0),\ t \in \mathbb{R}\}$$

Vediamo che l'insieme delle soluzioni è una retta affine di $\mathbb{R}^3$.

Esempio. Consideriamo il sistema di una sola equazione in tre incognite:

$$x - 2y + z = 1$$

Una soluzione particolare è $(1, 0, 0)$. L'equazione omogenea associata è

$$x - 2y + z = 0$$

il cui spazio delle soluzioni ha dimensione due: una sua base è $(2,1,0),(1,0,-1)$. Ne segue

$$Sol(A,b) = \{s(2,1,0) + t(1,0,-1) + (1,0,0),\ \ s,t \in \mathbb{R}\}$$

Vediamo che l'insieme delle soluzioni $Sol(A,b)$ è un piano affine di $\mathbb{R}^3$.

Esempio. Consideriamo l'equazione lineare non omogenea $x+y-z=3$. Vogliamo interpretare geometricamente nello spazio $\mathbb{R}^3$ l'insieme

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=3\}$$

delle sue soluzioni. Diamo a y e a z valori arbitrari, diciamo $y=s$, $z=t$ $(s,t \in \mathbb{R})$. Ricaviamo $x=-s+t+3$. L'insieme delle soluzioni si può scrivere allora come

$$\begin{aligned} S &= \{(-s+t+3,s,t), \quad s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(-1,1,0)+t(1,0,1)+(3,0,0), \quad s,t \in \mathbb{R}\} \\ &= L((-1,1,0),(1,0,1)) + (3,0,0) \end{aligned}$$

Vediamo allora che l'insieme delle soluzioni S si ottiene traslando il piano $W_0 = L((-1,1,0),(1,0,1))$, passante per l'origine, del vettore $(3,0,0)$. Dunque W è un piano affine di $\mathbb{R}^3$. Si noti che:

1) $W_0 = L((-1,1,0),(1,0,1))$ è lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $x+y-z=0$ associata all'equazione $x+y-z-3=0$.

2) Il vettore $(3,0,0)$ è una soluzione particolare dell'equazione $x+y-z-3=0$ (Si ottiene dall'insieme W delle soluzioni per $s=t=0$).

Proposizione 2.2.5 *Sia A una matrice $m \times n$ con $m < n$. Allora il sistema lineare omogeneo $AX=0$ ha almeno una soluzione non banale (cioè una soluzione con almeno una componente diversa da zero).*

2.3 Il metodo di eliminazione di Gauss

Con il *metodo di eliminazione di Gauss* si trasforma un sistema lineare in un sistema equivalente, ma più semplice da risolvere. Le operazioni che si effettuano sulle equazioni di un sistema per semplificarlo sono:

1. Moltiplicare un'equazione per un numero diverso da zero.
2. Sommare l'equazione i-esima all'equazione j-esima $(i \neq j)$;
3. Scambiare di posto due equazioni.

Queste operazioni si riflettono nelle seguenti operazioni elementari sulle righe della matrice completa $[A,b]$ del sistema:

1. Moltiplicare una riga per un numero $\lambda \neq 0$;
2. sommare la riga i-esima alla riga j-esima $(i \neq j)$;
3. scambiare di posto due righe.

Supponiamo di dovere risolvere un sistema lineare di m equazioni in n incognite, diciamo $AX = b$, dove A è una matrice $m \times n$, X è la colonna delle n incognite e $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti. Formiamo la matrice completa $M = [A, b]$ (di tipo $m \times (n+1)$) e effettuiamo una successione di operazioni elementari sulle righe della matrice M, per semplificarla. Sia $M' = [A', b']$ la matrice alla quale si giunge alla fine di questa successione di operazioni. Si dimostra facilmente che *i due sistemi lineari $AX = b$ e $A'X = b'$ sono equivalenti, vale a dire le soluzioni del sistema lineare $A'X = b'$ sono esattamente quelle del sistema $AX = b$.* [Esercizio].

2.3.1 Esempi

Vediamo degli esempi di risoluzione di sistemi lineari con il metodo di eliminazione di Gauss.

Esempi. Risolvere i tre seguenti sistemi lineari in tre incognite:

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - 10x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$$(B) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - 7x_2 - 11x_3 = -3 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Soluzione.

1^o *Passo.* Scrivere la matrice completa del sistema.

Le matrici complete dei sistemi $(A), (B), (C)$ sono:

$$\text{Sistema } (A): \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sistema } (B): \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sistema } (C): \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & -11 & -3 \end{vmatrix}$$

2^o *Passo.* Con operazioni elementari sulle righe, riduciamo a scala la matrice completa. A questo punto si può dire se il sistema ha soluzioni oppure no. Precisamente, se l'ultima riga non nulla della matrice a scala ha solo l'ultimo termine diverso da zero, ossia è del tipo

$$\begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & b \end{vmatrix}$$

con $b \neq 0$, allora il sistema non ha soluzioni, altrimenti ne ha.
Se il sistema non ha soluzioni, abbiamo finito. Altrimenti si passerà al successivo 3^0 Passo.

La riduzione a scala per righe delle matrici complete dei sistemi porta ai seguenti risultati.

Sistema (A):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Poiché l'ultima riga della matrice a scala è $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ il sistema (A) non ha soluzioni. Infatti il sistema associato alla matrice a scala è

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.3.4}$$

ovviamente senza soluzioni (perché la terza equazione non ha alcuna soluzione). Dunque il sistema originario (A), equivalente al sistema 2.3.4, non ha soluzioni.

Sistema (B):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{vmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

L'ultima riga della matrice a scala non è del tipo $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ con $b \neq 0$. Pertanto il sistema (B) è risolubile.

Sistema (C):

Riduciamo a scala per righe la matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & -11 & -3 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(Alla seconda riga abbiamo sommato la prima moltiplicata per -1). Poiché non compare una riga del tipo $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ con $b \neq 0$, possiamo concludere che il sistema (C) è risolubile.

Prima di descrivere il passo successivo, diamo una definizione. Consideriamo una qualunque matrice a scala

$$A = \begin{vmatrix} p_1 & * & . & . & . & . & . & * \\ & & p_2 & . & . & . & . & * \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & & p_r & . & * \\ & & & & & & & \end{vmatrix}$$

dove i numeri $p_1, ..., p_r$ sono diversi da zero, al posto degli spazi vuoti ci sono tutti zeri e al posto degli asterischi ci può essere qualunque numero. I numeri non nulli $p_1, ..., p_r$ che compaiono più a sinistra su ogni riga non nulla, sono detti *pivots* della matrice a scala.

> 3^o *Passo.* Supponiamo che il sistema abbia soluzioni. Distinguiamo le incognite $x_1, ..., x_n$ in due classi: le variabili che stanno sulle colonne dei pivots sono variabili *dipendenti*; le eventuali restanti $n - r$ incognite sono variabili *libere*. Alle variabili libere, se ce ne sono, si attribuiscono valori arbitrari. Nell'ultima equazione (non nulla) scriviamo la variabile dipendente in funzione dei termini noti e delle eventuali variabili libere. Poi risolviamo il sistema all'indietro, sostituendo nella penultima equazione e così via, fino ad arrivare alla prima equazione.
> Se non ci sono variabili libere, il sistema ha un'unica soluzione.
> Se invece ci sono variabili libere, il sistema ha infinite soluzioni.

Vediamo come effettuare in concreto questo terzo passo nel caso dei sistemi (B) e (C).

Sistema (B):

I pivots della matrice a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

sono sulla prima, seconda e terza colonna: non ci sono dunque variabili libere. Il sistema associato alla matrice a scala, equivalente al sistema (B), è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2/3x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo all'indietro, troviamo che questo sistema, e quindi il sistema originario (B), ha l'unica soluzione $(-2/3, -2/3, 1)$.

Sistema (C):

I pivots della matrice a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

sono sulla prima e sulla seconda colonna: dunque le variabili dipendenti sono x_1 e x_2. La restante variabile x_3 è libera. Poiché c'è una variabile libera, il sistema ha *infinite* soluzioni. Per risolvere il sistema, cioè per dare una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni, un modo è il seguente. Scriviamo il sistema associato alla matrice a scala, ossia il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Alla variabile libera x_3 diamo un valore arbitrario t:

$$x_3 = t.$$

Sostituendo nella seconda equazione, troviamo

$$x_2 = 3 - t,$$

e sostituendo ancora all'indietro nella prima equazione, troviamo infine

$$x_1 = 9 + 2t.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema è dato in forma parametrica da

$$\begin{cases} x_1 = 9 + 2t \\ x_2 = 3 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Un modo migliore per trovare le soluzioni consiste nel continuare la riduzione per righe all'indietro fino a ottenere una matrice *a scala per righe in forma ridotta* (*reduced row echelon form*), ossia una matrice con i pivots tutti uguali a 1, e i termini sopra i pivots tutti uguali a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 & & - & 2x_3 & = & 9 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Ora, attribuendo alla variabile libera x_3 un valore arbitrario t, ricaviamo subito:

$$\begin{cases} x_1 & = & 9+2t \\ x_2 & = & 3-t \\ x_3 & = & t \end{cases}$$

2.4 Esercizi

Esercizio 2.4.1 *Risolvere il sistema lineare in tre incognite:*

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 10x_2 & - & 11x_3 & = & 0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{vmatrix}$$

Riduciamo a scala per righe:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Il sistema associato all'ultima matrice scritta è

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 1 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

ovviamente senza soluzioni (perché la terza equazione non ha alcuna soluzione). Dunque il sistema originario 2.4.1, equivalente al sistema 2.4.2, non ha soluzioni.

Esercizio 2.4.2 *Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo di quattro equazioni in tre incognite:*

$$\begin{cases} -x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & 3y & - & z & = & 0 \\ x & & & + & 1/2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 1/2z & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione. Poiché il sistema è omogeneo, basta ridurre a scala, con operazioni elementari di riga, la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 3 & -2 & 1/2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ y + 1/2z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo z come variabile libera: $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Ricaviamo poi $y = -\frac{1}{2}t$ e $x = -\frac{1}{2}t$. Lo spazio $Sol(A, 0)$ delle soluzioni del sistema omogeneo assegnato può essere descritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Sol(A, 0) &= \{(-1/2t, -1/2t, t),\ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(-1/2, -1/2, 1),\ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Si noti che lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1; una sua base è il vettore $(-1/2, -1/2, 1)$.

Esercizio 2.4.3 *Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo in* 4 *incognite:*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il sistema è già ridotto a scala. Le variabili libere (quelle che non corrispondono alle colonne dei pivots) sono x_2 e x_4: a queste variabili possiamo assegnare valori arbitrari, diciamo $x_2 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Risolvendo il sistema all'indietro, troviamo $x_3 = t$, $x_1 = s - 2t$. Quindi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, detto anche *spazio nullo* o *nucleo* della matrice A, e denotato $\ker A$ (oppure $Sol(A, 0)$) è:

$$\begin{aligned} \ker A &= \{(s - 2t, s, t, t),\ s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 1),\ s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si noti che $\dim \ker A = 2$ (= numero delle incognite − rango). Una base di $\ker A$ è costituita dai due vettori $(1, 1, 0, 0)$, $(-2, 0, 1, 1)$.

Esercizio 2.4.4 *Risolvere il sistema* $AX = 0$*, dove*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \qquad X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

e trovare una base dello spazio nullo $\ker A$ *della matrice* A.

Soluzione. Una riduzione a scala per righe della matrice A dei coefficienti del sistema è:

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Abbiamo una sola variabile libera: la variabile x, che corrisponde all'unica colonna sulla quale non ci sono pivots. Diamo a x un valore arbitrario, $x = t$, $t \in \mathbb{R}$. Risolvendo il sistema omogeneo (in *tre* incognite)

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ \quad -z = 0 \end{cases}$$

associato alla matrice A' (equivalente al sistema assegnato), troviamo allora $x = t$, $y = 0$ e $z = 0$. In definitiva:

$$\begin{aligned} \ker A &= \{(t, 0, 0),\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1, 0, 0),\, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Una base del sottospazio $\ker A$ è $(1, 0, 0)$.

Esercizio 2.4.5 *Discutere il sistema:*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 5x + 2y + z = h \end{cases}$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Riduciamo a scala per righe la matrice completa del sistema:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & h \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -5+h \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3+h \end{vmatrix}$$

Se $-3 + h \neq 0$, cioè se $h \neq 3$, il sistema non ha soluzioni, perché l'ultima equazione è

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3 + h.$$

Se $h = 3$, il sistema assegnato è equivalente al sistema la cui matrice completa è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

Quest'ultima matrice è equivalente alla matrice a scala in forma ridotta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$

alla quale è associato il sistema

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = -1 \\ \quad\quad y - 7z = 4 \end{cases}$$

La variabile z è libera: $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Risolvendo all'indietro, ricaviamo $y = 7t + 4$, $x = -3t - 1$. Le soluzioni sono date allora da:

$$\{(-3t - 1, 7t + 4, t),\, t \in \mathbb{R}\}$$

ossia da

$$\{t(-3, 7, 1) + (-1, 4, 0),\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 2.4.6 *Trovare i numeri reali α per i quali il sistema*

$$\begin{cases} x & +y & -\alpha z & = & 2 \\ x & +y & +2z & = & 1 \end{cases} \tag{2.4.3}$$

ha soluzioni.

Soluzione. Riduciamo a scala la matrice completa associata al sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\alpha & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & -1 \end{vmatrix}$$

Se $2+\alpha = 0$, il sistema non ha soluzioni (perché l'equazione che corrisponde alla seconda riga della matrice ridotta è $0 \cdot z = -1$). Se invece $2+\alpha \neq 0$, il sistema ammette soluzioni: la variabile y è libera, e risolvendo all'indietro ricaviamo $z = -1/(2+\alpha)$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, $x = 2 - \alpha/(2+\alpha) - t$. Dunque, se $\alpha \neq -2$, le soluzioni sono:

$$t(-1,1,0) + (4+\alpha/(2+\alpha), 0, -1/(2+\alpha)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.4.7 *Consideriamo un sistema di n particelle sul piano $\mathbb{R}^2$, di masse $m_1, ..., m_n$ e vettori di posizione $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}^2$. Il vettore di posizione del* centro di massa *del sistema è*

$$r_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 r_1 + \cdots m_n r_n),$$

dove $M = m_1 + \cdots + m_n$. Si consideri il triangolo di vertici

$$r_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad r_3 = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Dire se è possibile distribuire fra i tre vertici del triangolo la massa totale di un 1 kg, in modo tale che il centro di massa del sistema sia $r_{cm} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$. Quante soluzioni ci sono?

Soluzione. Siano m_1, m_2, m_3 le tre masse da determinare.. Le richieste sono:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \tag{2.4.4}$$

$$m_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + m_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} + m_3 \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} \tag{2.4.5}$$

Inoltre, per il loro significato fisico, sono accettabili solo valori non negativi di m_1, m_2, m_3:

$$m_1 \geq 0, \quad , m_2 \geq 0, \quad m_3 \geq 0. \tag{2.4.6}$$

Risolvendo il sistema costituito dalle equazioni 2.4.4 e 2.4.5 otteniamo $m_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{4}, m_3 = \frac{1}{4}$, che è una soluzione accettabile, in quanto soddisfa anche la condizione 2.4.6.

Esercizio 2.4.8 *Dato nello spazio $\mathbb{R}^3$ un sistema di particelle di masse $m_1, ..., m_n$ e velocità $v_1, ..., v_n$, definiamo il* momento P *del sistema come*

$$P = m_1 v_1 + \cdots m_n v_n.$$

Supponiamo ora che due particelle con velocità

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{vmatrix}$$

collidano. Si osserva che, dopo la collisione, le loro rispettive velocità sono

$$v_1' = \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad v_2' = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Assumendo il principio di conservazione del momento, trovare il rapporto tra la massa m_1 e la massa m_2.

Soluzione. Per il principio di conservazione del momento abbiamo

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

ossia

$$m_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + m_2 \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{vmatrix} = m_1 \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{vmatrix} + m_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} m_1 + 4m_2 = 4m_1 + 2m_2 \\ m_1 + 7m_2 = 7m_1 + 3m_2 \\ m_1 + 10m_2 = 4m_1 + 8m_2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{3}$.

Esercizio 2.4.9 *Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia b un qualunque vettore di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se A è invertibile, allora il sistema lineare $AX = b$ ha esattamente una soluzione, precisamente $X = A^{-1}b$.*

2.5 Rette e piani nello spazio

Cominciamo con il richiamare dei risultati già dimostrati, che saranno utilizzati in questa sezione:

Un sistema lineare $AX = b$ è risolubile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa:

$$AX = b \quad \textit{risolubile} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rk } A = \text{rk } [A, b]$$

In tal caso la dimensione $\dim Sol(A, b)$ *dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle incognite meno il rango.* (Si veda 2.1.1 e 2.2.3).

Equazione cartesiana di un piano. Un'equazione del tipo

$$ax + by + cz = d, \tag{2.5.1}$$

dove almeno uno dei coefficienti a, b, c è diverso da zero, rappresenta un piano (affine) nello spazio. Chiamiamo π il piano 2.5.1. Il piano

$$\pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

è parallelo a π e passa per l'origine. Poiché un vettore (x, y, z) appartiene a π' se e solo se $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz = 0$, il piano π' è il complemento ortogonale della retta generata dal vettore (a, b, c). Abbiamo così una interpretazione geometrica dei coefficienti di x, y, z nell'equazione di un piano: *il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$.*

Naturalmente ogni altra equazione del tipo

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = (\lambda d),$$

per ogni $\lambda \neq 0$, rappresenta ancora lo stesso piano π.

Equazioni cartesiane di una retta. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio sono:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \tag{2.5.2}$$

a condizione che

$$\operatorname{rk} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 2$$

Le equazioni cartesiane 2.5.2 esprimono la retta come intersezione di due piani non paralleli.

Equazioni parametriche di un piano. Equazioni parametriche di un piano π sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ z = z_0 + ns + n't \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad X = P_0 + s \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix} \tag{2.5.3}$$

dove

$$\operatorname{rk} \begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = 2,$$

cioè $v_1 = (l, m, n)$, $v_2 = (l', m', n')$ sono due qualunque vettori linearmente indipendenti. I vettori v_1, v_2 costituiscono una base del piano passante per l'origine e parallelo a π e il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartienel piano π.

Un piano può essere rappresentato in forma parametrica in infiniti modi, in quanto è arbitraria la scelta di una base del piano parallelo a π e passante per l'origine e la scelta del punto P_0.

Equazioni parametriche di una retta. Equazioni parametriche di una retta r nello spazio sono

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad X = X_0 + t \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} \tag{2.5.4}$$

dove $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$ è una base della retta parallela a r e passante per l'origine. Si dice che il vettore (l, m, n) è un *vettore di direzione* della retta r.

Piani paralleli. Due piani

$$\pi : \quad ax + by + cz = d, \qquad\qquad \pi' : \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

sono paralleli se e solo se i vettori (a, b, c), (a', b', c') (ortogonali a π e π', rispettivamente) appartengono alla stessa retta, cioè se e solo se esiste un numero λ per il quale

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c$$

Rette parallele. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad\qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases} \tag{2.5.5}$$

sono parallele se e solo se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono proporzionali, cioè se esiste un numero λ per il quale

$$l' = \lambda\, l, \quad m' = \lambda\, m, \quad n' = \lambda\, n$$

Piani ortogonali. Due piani

$$\pi : \quad ax + by + cz = d, \qquad\qquad \pi' : \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

sono ortogonali se e solo se i vettori (a, b, c), (a', b', c') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$a\, a' + b\, b' + c\, c' = 0$$

Rette ortogonali. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad\qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases} \tag{2.5.6}$$

sono ortogonali se e solo se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$l\, l' + m\, m' + n\, n' = 0$$

Piano e retta ortogonali. Un piano

$$\pi : \qquad ax + by + cz = d$$

e una retta

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{2.5.7}$$

sono ortogonali tra loro se e solo se il vettore (a, b, c), ortogonale a π, e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono multipli, cioè se e solo se esiste un numero ρ per il quale

$$a = \rho\, l, \qquad b = \rho\, m, \qquad c = \rho\, n$$

Piano e retta paralleli. Un piano

$$\pi: \qquad ax + by + cz = d$$

e una retta

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{2.5.8}$$

sono paralleli tra loro se e solo se il vettore (a, b, c), ortogonale a π, e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono ortogonali:

$$a\, l + b\, m + c\, n = 0$$

Fissata una retta r, l'insieme dei piani π dello spazio che contengono r (nel senso che $r \subset \pi$) si dice *fascio* di piani di *sostegno* la retta r.

Proposizione 2.5.1 *I piani del fascio il cui sostegno è la retta*

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{2.5.9}$$

sono esattamente quelli la cui equazione è del tipo:

$$\lambda\, (ax + by + cz + d) + \mu\, (a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{2.5.10}$$

dove λ e μ sono numeri non entrambi nulli.

Dimostrazione. 1) Dimostriamo che ogni piano di equazione cartesiana 2.5.10 appartiene al fascio il cui sostegno è la retta r. Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto qualunque della retta r. Questo significa:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad \text{e} \quad a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0$$

Allora, per ogni λ, μ, anche

$$\lambda\, (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \mu\, (a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d') = 0$$

Quindi tutti i piani 2.5.10 contengono P_0.

2) Viceversa, sia π un piano che contiene la retta r. Dimostriamo che π ha equazione del tipo 2.5.10. Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto di π non appartenente a r.

Fra tutti i piani che hanno equazione del tipo 2.5.10, ce n'è sempre uno, diciamo π', che passa per P_1: basta scegliere i parametri λ e μ in modo che valga

$$\lambda\,(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) + \mu\,(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d') = 0$$

Le soluzioni λ, μ dell'equazione di sopra sono infinite, ma tutte proporzionali tra loro, e quindi individuano uno stesso piano. I due piani π e π' contengono interamente sia la retta r che il punto P_1, quindi coincidono. ■

2.6 Esercizi

Esercizio 2.6.1 *Scrivere un'equazione parametrica per la retta passante per i punti* $P = (2, 0, -1)$ *e* $Q = (1, -1, -3)$

Esercizio 2.6.2 *Stabilire se i punti* $P = (2, 0, 1)$, $Q = (1, 0, -3), R = (2, 3, 1)$ *sono allineati. Trovare un'equazione cartesiana per un piano passante per* P, Q *e* R. *Quanti piani siffatti esistono?*

Esercizio 2.6.3 *Scrivere equazioni parametriche per la retta* r *di equazioni cartesiane*
$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2.6.4 *Scrivere un'equazione cartesiana per il piano* π *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = s - t + 2 \\ y = s + 2t \\ z = -s + t \end{cases}$$

Esercizio 2.6.5 *Trovare equazioni parametriche per il piano di equazione cartesiana* $x - 2y + z - 3 = 0$.

Esercizio 2.6.6 *Sia* r *la retta di equazioni cartesiane* $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

1) Trovare un vettore di direzione di r*;*

2) Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per l'origine e ortogonale a r.

Esercizio 2.6.7 *Sia* r *la retta di equazioni cartesiane* $r : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$.

1) Trovare un vettore di direzione di r.

2) Scrivere equazioni parametriche per la retta s *passante per* $P = (1, 2, 5)$ *e parallela alla retta* r.

Esercizio 2.6.8 *Scrivere un'equazione cartesiana per un piano passante (ammesso che ne esista uno) per l'origine e parallelo sia alla retta* $r : \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ *che alla retta* $s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2.6.9 *Scrivere un'equazione cartesiana per un piano passante per* $P = (2, 3, 6)$ *e ortogonale alla retta* $r : \begin{cases} y + z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2.6.10 *Scrivere un'equazione cartesiana per un piano passante per* $P = (1, -2, 3)$ *e contenente la retta* $r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2.6.11 *Scrivere un'equazione cartesiana per un piano (ammesso che esista) contenente la retta* $r : \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ *e parallelo al piano* σ *di equazione* $2x - 3y + z - 1 = 0$. *Quanti piani siffatti esistono?*

Esercizio 2.6.12 *Due rette* r *e* s *nello spazio si dicono* sghembe *se non sono parallele e* $r \cap s = \emptyset$*; si dicono* incidenti *se la loro intersezione è un punto. Stabilire se le rette* r *e* s *sono parallele, incidenti o sghembe:*

$$r : \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Esercizio 2.6.13 *Stabilire se le rette* r *e* s *sono parallele, incidenti o sghembe:*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

Esercizio 2.6.14 *Trovare la distanza del piano* π *di equazione* $x - 3y + 2z - 1 = 0$ *dall'origine.*

Esercizio 2.6.15 *Nello spazio affine euclideo* $\mathbb{R}^3$ *sono assegnati la retta*

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t - 1 \\ z = 2t \end{cases} \tag{2.6.1}$$

il piano π *di equazione*

$$\pi : \quad x - 2y + z - 1 = 0 \tag{2.6.2}$$

e il punto $P = (5, 0, 1)$.

a) Dire se esiste una retta passante per il punto P, *parallela al piano* π, *incidente la retta* r *e ad essa ortogonale. In caso affermativo, si scrivano equazioni parametriche per una qualunque di tali rette.*

b) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ *la retta* r *è parallela al piano* π' *di equazione* $2x - 2y + hz - 1 = 0$.

Esercizio 2.6.16 *Nello spazio affine euclideo* $\mathbb{R}^3$ *sono assegnati il punto* $P = (0, 3, 4)$ *e i due piani* π *e* π' *di rispettive equazioni:*

$$\pi : \quad x - y - z - 1 = 0, \qquad \pi' : \quad 3x - y + z - 1 = 0.$$

a) Trovare equazioni parametriche per una qualunque retta (se ne esiste una) passante per P *e parallela sia al piano* π *che al piano* π'.

b) Trovare la distanza di P *dal piano* π'.

Esercizio 2.6.17 *Si scrivano delle equazioni cartesiane per la retta r passante per i punti $P = (0, 6, 4)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Trovare le coordinate di un qualunque punto di r distinto da P e Q.*

Esercizio 2.6.18 *Nello spazio affine euclideo, sia π il piano di equazione:*

$$\pi : \qquad x - 3y - z - 1 = 0.$$

a) Scrivere un'equazione cartesiana di un qualunque piano passante per l'origine e ortogonale al piano π.

b) Scrivere equazioni cartesiane di una qualunque retta che sia contenuta nel piano π.

Esercizio 2.6.19 *Nello spazio affine euclideo sono dati il piano π di equazione $x - y = 0$ e la retta*

$$r : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

a) *Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il piano e la retta sono paralleli.*

b) *Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il piano e la retta sono ortogonali.*

Esercizio 2.6.20 *Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le rette sono sghembe, per quali sono parallele e per quali sono incidenti.

Esercizio 2.6.21 *Nello spazio affine euclideo si considerino la retta*

$$r : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $y - 3z - 1 = 0$.

a) Scrivere un'equazione cartesiana di un qualunque piano contenente la retta r e ortogonale al piano π. Quanti piani siffatti esistono?

b) Scrivere equazioni parametriche del piano π.

Esercizio 2.6.22 *Nello spazio affine euclideo sono dati il punto $Q = (3, 0, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} x = -3t \\ y = 3 \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

a) Trovare un'equazione cartesiana di un piano passante per il punto Q e contenente la retta r.

b) Trovare la distanza di Q dall'origine.

Esercizio 2.6.23 *Nello spazio affine sono assegnate le rette*

$$r : \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Scrivere un'equazione parametrica per la retta parallela a r e passante per l'origine.

b) Scrivere un'equazione per un piano (se esiste) passante per r e parallelo a s.

Esercizio 2.6.24 *Sia r la retta di equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

a) Scrivere un'equazione cartesiana di un piano che contiene la retta r e il punto $P = (0, 1, 0)$.

b) Scrivere un'equazione parametrica di una qualunque retta passante per l'origine, incidente la retta r e ad essa ortogonale.

Esercizio 2.6.25 *Siano*

$$r : \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 6 = 0 \\ 4x + y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} y - 3 = x - 7 \\ x - 4 = z + 2 \end{cases}$$

due rette dello spazio affine $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare parametri di direzione della retta r.

b) Trovare le coordinate di un qualunque punto di r'.

c) Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per r e parallelo a r'.

Esercizio 2.6.26 *Una retta r contiene il punto $P = (-1, 0, -1)$ ed è ortogonale al piano π di equazione $3x - 5y + z = 2$. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per r.*

Esercizio 2.6.27 *Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ sono assegnati il punto $P = (2, 0, 1)$ e la retta r di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Trovare un'equazione cartesiana per un piano contenente sia P che r.

b) Trovare un'equazione cartesiana per un piano contenente P e ortogonale alla retta r.

Esercizio 2.6.28 *Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano π di equazione $x+y+z = 0$ e i punti $P = (1, 0, -1)$ e $Q = (1, 2, \alpha)$.*

a) Scrivere gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la retta PQ è parallela al piano π.

b) Dire per quali eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la retta PQ è perpendicolare al piano π.

Capitolo 3

Spazi vettoriali euclidei

3.1 Spazi vettoriali euclidei

Definizione 3.1.1 *Un* prodotto interno *su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \langle\ ,\ \rangle : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & \langle v, w \rangle \end{array}$$

($\langle v, w \rangle$ si legge: "v interno w" o "v scalare w"), che soddisfa:

1. Bilinearità. *Per ogni fissato $x \in V$, le applicazioni*

   $$\langle -, x \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \langle v, x \rangle$$

   e

   $$\langle x, - \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \langle x, v \rangle$$

   sono lineari.

2. Simmetria. *Per ogni v, w in V*

   $$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

3. Definita positività.

   $$\langle v, v \rangle > 0 \quad \textit{per tutti i vettori} \quad v \neq 0.$$

Uno spazio vettoriale reale V insieme a un fissato prodotto interno g su V costituiscono uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

Esempio. L'esempio fondamentale di spazio vettoriale euclideo è $\mathbb{R}^n$ con il *prodotto interno standard*, o *euclideo*,

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

che ad ogni coppia $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ associa il numero reale

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Per denotare il prodotto interno useremo anche la notazione con il punto ('dot product'):

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

La semplice verifica delle seguenti proprietà è lasciata come esercizio (X e Y sono arbitrari vettori di $\mathbb{R}^n$):

Bilinearità:
$$\begin{aligned} (X+Y)\cdot Z &= X\cdot Z + Y\cdot Z \\ (\lambda X)\cdot Y &= \lambda(X\cdot Y) \\ X\cdot(Y+Z) &= X\cdot Y + X\cdot Z \\ X\cdot(\lambda Y) &= \lambda(X\cdot Y) \end{aligned}$$

Simmetria: $X\cdot Y = Y\cdot X$

Definita positività: $\forall X \neq 0 \quad X\cdot X > 0$

Esempio. Lo spazio vettoriale $V = C[a,b]$ di tutte le funzioni continue con dominio l'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale euclideo (infinito-dimensionale) rispetto al prodotto interno definito da

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{3.1.1}$$

per ogni coppia di funzioni $f, g \in V$.

Nel seguito di questa sezione, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ designerà uno spazio vettoriale euclideo finito-dimensionale.

Definizione 3.1.2 *La* norma*, o* lunghezza*, di un vettore v di V è il numero reale*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Un vettore $v \in V$ si dice unitario *se $\|v\| = 1$.*

La distanza $d(v,w)$ fra due punti $v, w \in \mathbb{R}^n$ è il numero $d(v,w) = \|v - w\|$.

Per ogni $v, w \in V$, diciamo che v e w sono ortogonali *se $\langle v, w\rangle = 0$.*

Una base $(v_1, ..., v_n)$ di V si dice ortonormale *se i vettori $v_1, ..., v_n$ sono tutti unitari e sono a due a due ortogonali tra loro, cioè se*

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & se\ i = j, \\ 0 & se\ i \neq j. \end{cases}$$

Esempio. La norma del vettore $A = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ è $\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Esempio. La base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

è ortonormale.

Esempio. Per ogni numero reale ϑ, $((\cos\vartheta, \sin\vartheta), (-\sin\vartheta, \cos\vartheta))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.1.3 *Sia W un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale euclideo V. Il* complemento ortogonale $W^\perp$ *di W è il sottospazio vettoriale di V*

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$$

(Si vede facilmente che $U^\perp$ è un sottospazio di V [Esercizio 3.2.6]).

Esempio. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore non nullo (a, b, c). Il complemento ortogonale di W è il piano (sottospazio vettoriale di dimensione due)

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

Esempio. Consideriamo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$, dove $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, ossia il sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$. Le soluzioni (x, y, z) del sistema sono i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali alle righe $(1, 2, -1)$, $(2, 3, 1)$ della matrice A. Ne segue che lo spazio delle soluzioni $Sol(A, 0)$ è il complemento ortogonale del sottospazio vettoriale W (di dimensione due) di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe di A. Dunque $Sol(A, 0)$ è la retta (passante per l'origine) ortogonale al piano W.

L'esempio precedente si generalizza in modo ovvio e fornisce una interpretazione geometrica dei sistemi lineari omogenei:

Proposizione 3.1.4 *Per ogni matrice A di tipo $m \times n$, lo spazio*

$$Sol(A, 0) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$$

delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$ è il complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A.

3.2 Esercizi

Esercizio 3.2.1 *Dimostrare che l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ che è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è il vettore nullo.*

Esercizio 3.2.2 *Siano A, B vettori arbitrari di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che*

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot (A + B) &= \|A\|^2 + 2(A \cdot B) + \|B\|^2 \\ (A - B) \cdot (A + B) &= \|A\|^2 - 2(A \cdot B) + \|B\|^2 \end{aligned}$$

Dedurre che $\|A + B\| = \|A - B\|$ se e solo se $A \cdot B = 0$. Con l'aiuto di una figura, ci si convinca allora che la definizione "A, B sono ortogonali se $A \cdot B = 0$ *è ragionevole.*

Esercizio 3.2.3 *Dimostrare che la funzione norma $\|\ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *Per ogni $A \in \mathbb{R}^n$, $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.*
2. *Per ogni $A \in \mathbb{R}^n$ e per ogni λ in $\mathbb{R}$, $\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|$.*

Dimostrazione. 1. *Poniamo* $A = (a_1, ..., a_n)$. *Poiché* $\|A\|^2 = a_1^2 + ... + a_n^2$ *è somma di quadrati di numeri reali,* $\|A\| = 0$ *se e solo se tutte le componenti* a_i *sono nulle.*

2. *La proprietà segue immediatamente dalla definizione di norma.*

Esercizio 3.2.4 *Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa: "Per tutti i vettori* A, B, C *di* $\mathbb{R}^n$, $C \neq 0$, *se* $A \cdot C = B \cdot C$ *allora* $A = B$.

Esercizio 3.2.5 *Dimostrare che se i vettori di* $\mathbb{R}^n$ $v_1, ..., v_k$ *costituiscono un sistema ortonormale, nel senso che* $v_i \cdot v_i = 1$ *per ogni* i *e* $v_i \cdot v_j = 0$ *per ogni* $i \neq j$, *allora essi sono linearmente indipendenti. Dedurre che un sistema (ordinato e) ortonormale di* n *vettori di* $\mathbb{R}^n$ *costituisce una base di* $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 3.2.6 *Sia* W *un qualunque sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo* V. *Dimostrare che il complemento ortogonale* $W^\perp$ *di* W *è un sottospazio vettoriale di* V.

Esercizio 3.2.7 *Sia* W *un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo* V. *Dimostrare che* $W^{\perp\perp} = W$.

3.3 Matrici ortogonali

Definizione 3.3.1 *Una matrice quadrata* A *di ordine* n *si dice* ortogonale *se è invertibile e* $A^{-1} = A^t$.

In modo equivalente, una matrice quadrata A di ordine n è ortogonale se

$$A^t\, A = I = A\, A^t \tag{3.3.1}$$

Osservazione. Se A, B sono matrici quadrate dello stesso ordine e $AB = I$, allora anche $BA = I$. (Omettiamo la dimostrazione). Quindi, se vale una delle due uguaglianze $A^t\, A = I$ oppure $A\, A^t = I$, allora vale anche l'altra, e la matrice A è ortogonale.

Esempio. La matrice $\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$ è ortogonale.

Esercizio. Dimostrare:

1) Una matrice A è ortogonale se, e solo se, le colonne (o le righe) di A costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. (*Suggerimento*: Basta leggere l'uguaglianza $A^t A = I$ nel modo seguente: il prodotto scalare di due colonne di A è uguale a 1 se le due colonne coincidono, altrimenti è uguale a 0).

2) Il prodotto di due matrici ortogonali è ortogonale.

Definizione 3.3.2 *Sia V uno spazio vettoriale euclideo (finito-dimensionale). Un operatore lineare $V \xrightarrow{Q} V$ si chiama* ortogonale*, o una* isometria lineare*, se preserva il prodotto interno di V:*

$$\langle Q(v_1), Q(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \tag{3.3.2}$$

per ogni v_1, v_2 in V.

Ovviamente gli operatori ortogonali di V preservano anche le lunghezze dei vettori:

$$\|Q(v)\|^2 = \langle Q(v), Q(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

e preservano l'angolo α tra due vettori v, w. Infatti, il coseno dell'angolo α si esprime in termini del prodotto scalare:

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\|v\| \cos\alpha$$

In particolare, le isometrie lineari dello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono gli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^n$ che preservano il prodotto euclideo standard.

L'importanza delle matrici ortogonali deriva dalla caratterizzazione seguente.

Teorema 3.3.3 *Per una matrice quadrata A le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) A è ortogonale;

2) L'operatore lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$, $X \longmapsto AX$, preserva il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$:

$$(AX) \cdot (AY) = X \cdot Y \tag{3.3.3}$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$. ■

Dimostrazione. Conviene scrivere il prodotto scalare standard $X \cdot Y$ di due vettori colonna in $\mathbb{R}^n$ come prodotto (di matrici) della matrice riga X^t per la matrice colonna Y:

$$X \cdot Y = (X^t)\, Y$$

In particolare, si ha $(AX) \cdot (AY) = (AX)^t\,(AY) = X^t(A^t\,A)Y$. Quindi la condizione 3.3.3 si riscrive:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \qquad X^t(A^t\,A)Y = X^t\,Y \tag{3.3.4}$$

A questo punto, l'implicazione 1) $\Longrightarrow$ 2) è immediata: se A è ortogonale, si ha $A^t\,A = I$ e quindi

$$(AX) \cdot (AY) = (AX)^t\,(AY) = X^t(A^t\,A)Y = X^t\,I\,Y = X^t\,Y$$

Viceversa, supponiamo che valga la (3.3.4). Scegliamo $X = e_i$, $Y = e_j$ (vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$). Dalla definizione del prodotto (righe per colonne) di matrici, segue subito che $e_i^t(A^t\,A)e_j$ è uguale all'entrata di posto i, j della matrice $A^t\,A$. Con questa scelta di X e Y, l'uguaglianza (3.3.4)

$$e_i^t(A^t\,A)e_j = e_i \cdot e_j$$

(uguale a 1 se $i = j$, uguale a 0 altrimenti) implica che $A^t\,A$ è la matrice identità I. Ne segue (si veda l'osservazione dopo la definizione 3.3.1) che anche $A\,A^t = I$ e quindi A è ortogonale.

Dunque le matrici ortogonali rappresentano le isometrie lineari dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Matrici ortogonali di ordine due. Le matrici ortogonali 2×2, ossia le matrici che descrivono le isometrie lineari del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, possono essere facilmente descritte in modo esplicito con uno studio diretto.

Proposizione 3.3.4 *Le matrici ortogonali* 2×2 *sono di uno dei seguenti due tipi:*

$$R = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \tag{3.3.5}$$

oppure

$$S = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{vmatrix} \tag{3.3.6}$$

per un opportuno $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia A una matrice ortogonale 2×2. La prima colonna di A è l'immagine Ae_1 del vettore unitario $e_1 = (1, 0)^t$. Poiché A preserva le lunghezze, si deve avere $\|Ae_1\| = 1$. Esiste allora un $\vartheta \in \mathbb{R}$ (unico, se si richiede $0 \leq \vartheta < 2\pi$) per il quale

$$Ae_1 = \begin{vmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{vmatrix}$$

La seconda colonna Ae_2 deve essere un vettore di lunghezza 1 ortogonale a Ae_1. Ci sono allora soltanto due casi possibili:

$$Ae_2 = \begin{vmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad Ae_2 = \begin{vmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

Nel primo caso, si ha una matrice del tipo (3.3.5), mentre nel secondo caso si ha una matrice del tipo (3.3.6). ∎

Interpretazione geometrica. Una matrice ortogonale del tipo

$$R_\vartheta = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \tag{3.3.7}$$

rappresenta la rotazione di un angolo ϑ.

Una matrice ortogonale del tipo

$$S_{\vartheta/2} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

rappresenta invece la simmetria rispetto alla retta vettoriale $L(w)$ generata dal vettore

$$w = (\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2))$$

Infatti, si vede facilmente che la simmetria rispetto alla retta $L(w)$ trasforma il vettore $(1, 0)$ nel vettore $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, e trasforma trasforma il vettore $(0, 1)$ nel vettore $(\sin\vartheta, -\cos\vartheta)$. [Esercizio].

Esercizio. Verificare che una matrice di simmetria del tipo (3.3.6),

$$S = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

(simmetria rispetto alla retta generata dal vettore $(\cos\vartheta/2, \sin\vartheta/2)$), si può scrivere in uno dei seguenti modi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{vmatrix} &= R_\vartheta \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} R_{-\vartheta} \\ &= R_{\vartheta/2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} R_{-\vartheta/2} \end{aligned}$$

(dove R_α denota, per ogni α, la matrice (del tipo (3.3.7)) di rotazione di un angolo α). Interpretare geometricamente questi risultati.

3.4 Proiezioni ortogonali e matrici associate

3.4.1 Proiezioni ortogonali su rette

Proposizione 3.4.1 (Proiezione ortogonale lungo una retta) *Sia $(V, \langle\, , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia w un vettore non nullo di V. Allora ogni vettore v di V si decompone in modo unico come*

$$v = \lambda w + v' \tag{3.4.1}$$

dove λ è un numero reale e v' è un vettore ortogonale a w.

Dimostrazione. Se vale 3.4.1, con v' ortogonale a w, si deve avere necessariamente:

$$0 = \langle v', w\rangle = \langle v - \lambda w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \lambda \langle w, w\rangle$$

e quindi

$$\lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

e $v' = v - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w$. Questo prova l'unicità della scrittura 3.4.1. Per provare l'esistenza di una tale decomposizione, basta scrivere proprio

$$v = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w + v'$$

(dove $v' = v - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w$) e poi verificare, con un conto diretto, che $\langle v', w\rangle = 0$:

$$\langle v', w\rangle = \langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \langle w, w\rangle = 0$$

∎

Il teorema precedente permette di definire la proiezione ortogonale su una retta:

Definizione 3.4.2 *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W = L(w)$ la retta generata dal vettore (non nullo) $w \in V$. La* proiezione ortogonale P_W *(denotata anche P_w)* sulla retta W *è l'applicazione lineare*

$$P_W : V \longrightarrow V, \qquad v \longmapsto P_W(v)$$

dove $P_W(v)$ è l'unico vettore di V che soddisfa:

a) $P_W(v) \in W$;

b) $v - P_W(v) \in W^{\perp}$.

Se $W = L(w)$, dalla dimostrazione del teorema 3.4.1 abbiamo allora

$$P_W(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w \tag{3.4.2}$$

Si noti che se il vettore $\tilde{w}$ è unitario ($\langle \tilde{w}, \tilde{w}\rangle = 1$), la proiezione di v lungo la retta $W = L(\tilde{w})$ si scrive più semplicemente:

$$P_W(v) = \langle v, \tilde{w}\rangle\, \tilde{w} \qquad (\tilde{w} \text{ unitario}) \tag{3.4.3}$$

Esempio. Cerchiamo la proiezione ortogonale di $v = (0, 0, 1)$ sulla retta generata dal vettore $w = (1, 0, 1)$. Abbiamo: $v \cdot w = 1, \ \ w \cdot w = 2$. Quindi:

$$P_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w = \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

3.4.2 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angoli

Sia V uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale, dotato di un prodotto interno (definito positivo). Denotiamo con $x \cdot y$ il prodotto interno di vettori $x, y \in V$. Ad esempio, possiamo pensare a $V = \mathbb{R}^n$, con il prodotto euclideo standard. Ricordiamo che la norma $\|x\|$ di un vettore x in V è il numero non negativo definito da

$$\|x\|^2 = x \cdot x \tag{3.4.4}$$

Teorema 3.4.3 ("Teorema di Pitagora") *Siano x e y vettori di V. Se x e y sono ortogonali, allora*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + 2(x \cdot y) + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \text{se } x \cdot y = 0 \end{aligned}$$

■

Il teorema seguente generalizza il fatto che in ogni triangolo rettangolo un cateto ha lunghezza minore o uguale a quella dell'ipotenusa:

Proposizione 3.4.4 *Sia W una retta vettoriale V (cioè un sottospazio vettoriale di V di dimensione 1), x un vettore di V e indichiamo con $P_W(x)$ la proiezione ortogonale di x su W. Allora*

$$\|P_W(x)\| \leq \|x\| \tag{3.4.5}$$

Dimostrazione. Scriviamo $x = P_W(x) + (x - P_W(x))$. I due vettori $P_W(x)$ e $x - P_W(x)$ sono ortogonali (teorema 3.4.1). Per il teorema di Pitagora 3.4.3

$$\|x\|^2 = \|P_W(x)\|^2 + \|x - P_W(x)\|^2$$

Si deduce allora che $\|P_W(x)\| \leq \|x\|$. ∎

Siano x e y vettori non nulli di V. Proiettiamo x sulla retta $W = L(y)$:

$$P_W(x) = \frac{(x \cdot y)}{y \cdot y} y = \frac{(x \cdot y)}{\|y\|^2} y$$

Per la disuguaglianza 3.4.5:

$$\|x\| \geq \|P_W(x)\| = \|\frac{(x \cdot y)}{\|y\|^2} y\| = |x \cdot y| \, \| \frac{1}{\|y\|^2} y \, \| = |x \cdot y| \frac{1}{\|y\|^2} \|y\| = |x \cdot y| \frac{1}{\|y\|}$$

Per giustificare questi passaggi, si noti che $\|kv\| = |k|\|v\|$ ($|k|$= valore assoluto di k) per tutti i vettori v e tutti i numeri k. In definitiva:

$$\|x\| \geq |x \cdot y| \frac{1}{\|y\|}$$

equivalente a

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Abbiamo allora dimostrato:

Teorema 3.4.5 (Disuguaglianza di Schwarz) *Per tutti i vettori x, y di V vale la disuguaglianza*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{3.4.6}$$

Definizione 3.4.6 *Siano $x, y \in V$, entrambi diversi dal vettore nullo. Si definisce* angolo $\alpha(x, y)$ formato da x e y *il numero*

$$\alpha(x, y) = \arccos \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$$

(Per la disuguaglianza di Schwarz 3.4.6,

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

Poiché la funzione $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ è invertibile e la sua inversa per definizione è arccos, l'angolo α è ben definito).

Esempio. In $V = \mathbb{R}^4$, trovare l'angolo tra i vettori $x = (1, 0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$.

Soluzione.

$$\alpha(x, y) = \arccos \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} = \arccos \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{\pi}{3}$$

Esercizio. Dimostrare che la funzione norma $\| \ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa la seguente proprietà:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \textit{(Disuguaglianza triangolare)} \tag{3.4.7}$$

Dimostrazione. Poiché i termini a primo e secondo membro della 3.4.7 sono non-negativi, la 3.4.7 equivale a

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

che, facendo i conti, si scrive

$$\|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2$$

Quest'ultima disuguaglianza è vera per la disuguaglianza di Schwarz (si confrontino i termini di mezzo).
∎

3.4.3 Matrici di proiezioni su rette

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^n$ è un vettore unitario, allora

$$P_W(v) = (w \cdot v) \, w \qquad (w \in \mathbb{R}^n \text{ unitario})$$

Scriviamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ come vettori colonna (matrici $n \times 1$). Allora si vede subito che

$$w \cdot v = {}^t w \ v$$

dove il secondo membro è il prodotto (di matrici) del vettore riga ${}^t w$ per il vettore colonna v. In termini di prodotto di matrici, il vettore $P_W(v)$ si scrive allora come

$$\begin{aligned} P_W(v) &= w(w \cdot v) \\ &= \underbrace{w}_{n \times 1} \underbrace{({}^t w \ v)}_{1 \times 1} \\ &= \underbrace{(w \ {}^t w)}_{n \times n} \underbrace{v}_{n \times 1} \end{aligned}$$

(Nell'ultimo passaggio si è usata la proprietà associativa del prodotto di matrici.) Vediamo allora che $(w\ {}^t w)$ è la matrice $n \times n$ per la quale si deve moltiplicare un qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^n$ per ottenere la sua proiezione $P_W(v)$ sulla retta $W = L(w)$, cioè la matrice che rappresenta l'operatore $P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo così dimostrato il

Teorema 3.4.7 *Sia W una retta di $\mathbb{R}^n$ e sia w un vettore unitario di W. Sia A la matrice $n \times 1$ che ha come unica colonna il vettore w. Allora la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è $A\ ({}^t A)$.*

Esempio. Sia W la retta di $\mathbb{R}^3$ generata dal vettore $(1, 1, 1)$. Trovare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale P_W e trovare la proiezione su W del vettore $(1, 0, 2)$.

Soluzione. Una vettore unitario di W è $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Poniamo

$$A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

La matrice che rappresenta il proiettore P_W è

$$A\ ({}^t A) = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

La proiezione ortogonale di $(1, 0, 2)$ sulla retta W è il vettore

$$P_W(v) = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

3.4.4 Il procedimento di Gram-Schmidt

Teorema 3.4.8 (Gram-Schmidt) *Data una qualunque base $(v_1, ..., v_n)$ di uno spazio vettoriale euclideo V, si può costruire un'altra base $(v'_1, ..., v'_n)$ di V con le proprietà seguenti:*

(1) $(v'_1, ..., v'_n)$ è una base ortogonale, ossia $\langle v'_i, v'_j \rangle = 0$ se $i \neq j$;

(2) per ogni $k = 1, ..., n$, $\quad L(v_1, ..., v_k) = L(v'_1, ..., v'_k)$.

Si ottiene poi una base ortonormale dividendo ogni vettore della base ortogonale $(v'_1, ..., v'_n)$ così costruita per la sua norma.

Dimostrazione. Poniamo

$$v'_1 = v_1$$

Per costruire v'_2, sottraiamo da v_2 la sua proiezione su v'_1, ossia poniamo

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1, \tag{3.4.8}$$

Allora:

1) v_1' e v_2' sono ortogonali. Infatti:

$$\langle v_1', v_2' \rangle = \langle v_1', v_2 \rangle - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} \langle v_1', v_1' \rangle = \langle v_1', v_2 \rangle - \langle v_2, v_1' \rangle = 0$$

2) $L(v_1', v_2') = L(v_1, v_2)$. Infatti da $v_1 = v_1'$ e da 3.4.8 segue che $v_2 \in L(v_1', v_2')$ e $v_2' \in L(v_1, v_2)$. Di qui l'uguaglianza $L(v_1', v_2') = L(v_1, v_2)$.

Costruiamo ora v_3' sottraendo da v_3 le sue proiezioni su v_2' e v_1':

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Si dimostra come sopra che v_3' è ortogonale a v_1' e v_2'. Inoltre dalla definizione di v_3' e da $L(v_1', v_2') = L(v_1, v_2)$ segue $L(v_1, v_2, v_3) = L(v_1', v_2', v_3')$. Si procede poi ricorsivamente in modo del tutto analogo, fino a considerare infine il vettore

$$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'.$$

■

Riassumendo, supponiamo che $(v_1, ..., v_n)$ sia una base qualunque di V. Per costruire una base *ortogonale* di V, si pone:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \\ v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1', \\ v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1', \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Allora la base $(v_1', ..., v_n')$ è ortogonale. Se poi si vuole una base *ortonormale*, basta dividere ogni vettore v_i' per la sua norma.

Esempio. Applichiamo il metodo di Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base $v_1 = (2, -1, 2), v_2 = (1, 1, 4), v_3 = (2, 1, 3)$ di $\mathbb{R}^3$. Otteniamo:

$$v_1' = v_1 = (2, -1, 2)$$

$$\begin{aligned} v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (1, 1, 4) - \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2, -1, 2) \\ &= (1, 1, 4) - (2, -1, 2) = (-1, 2, 2) \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' \\
&= (2,1,3) - \frac{2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 2}{9}(2,-1,2) - \frac{2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 3\cdot 2}{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}(-1,2,2) \qquad (3.4.11) \\
&= (2,1,3) - (2,-1,2) - \tfrac{2}{3}(-1,2,2) \\
&= \tfrac{1}{3}(2,2,-1)
\end{aligned}$$

Esempio. Troviamo una base ortogonale (v_1', v_2') dello spazio vettoriale generato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,1)$ e $v_2 = (1,-2,0,0)$. Poniamo $v_1' = v_1$. Per costruire v_2' sottraiamo da v_2 la sua proiezione ortogonale sul sottospazio generato da v_1':

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' = (1,-2,0,0) + \frac{1}{3}(1,1,0,1) = (4/3, -5/3, 0, 1/3) \qquad (3.4.12)$$

Se vogliamo una base ortonormale basta dividere i vettori v_1', v_2' per la loro norma. Si ottiene:

$$\frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1) \qquad \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1)$$

3.4.5 Proiezioni ortogonali

In tutto questo paragrafo e nel successivo, ci riferiamo sempre a spazi vettoriali finito-dimensionali. Utilizzando l'esistenza di basi ortonormali (assicurata dal procedimento di Gram-Schmidt) generalizziamo ora il teorema 3.4.1 definendo le proiezioni ortogonali su sottospazi arbitrari di uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\,,\,\rangle)$. Il teorema chiave è il seguente:

Teorema 3.4.9 *Sia $(V, \langle\,,\,\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia W un suo sottospazio. Allora*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Ricordiamo che $V = W \oplus W^{\perp}$ significa che ogni vettore v di V *si scrive in modo unico* come somma

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

con $v_{\parallel}$ in W e $v_{\perp}$ in $W^{\perp}$.

Dimostrazione. Sia $(w_1, ..., w_k)$ una qualunque base ortonormale di W. Per ogni v in V poniamo

$$v_{\parallel} = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_k\rangle w_k \qquad (3.4.13)$$

Ovviamente $v_{\parallel} \in W$. Inoltre $v - v_{\parallel}$ è ortogonale a ciascuno dei vettori $w_1, ..., w_k$ [Esercizio] e pertanto è ortogonale a W, cioè appartiene a $W^{\perp}$. Abbiamo allora provato che ogni $v \in V$ si scrive come $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, con $v_{\parallel}$ in W e $v_{\perp} = v - v_{\parallel}$ in $W^{\perp}$. Supponiamo ora che v si possa scrivere in due modi

$$v = v_1 + v_2 \qquad v = v_1' + v_2'$$

con $v_1, v_1' \in W$ e $v_2, v_2' \in W^{\perp}$. Uguagliando le scritture si ricava

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

dove $v_1 - v_1' \in W$ e $v_2' - v_2 \in W^\perp$. Il vettore $v_1 - v_1'$ appartiene così a W e anche a $W^\perp$ (perché è uguale a $v_2' - v_2 \in W^\perp$). Ne segue $v_1 - v_1' \in W \cap W^\perp$. Ora l'unico vettore che sta nell'intersezione $W \cap W^\perp$ è il vettore nullo [Esercizio] e quindi $v_1 - v_1' = 0$, cioè $v_1 = v_1'$. Se ne deduce $v_2 = v_2'$ e quindi la scrittura di v come somma di una componente lungo W e una lungo $W^\perp$ è unica. ∎

Si osservi che dall'uguaglianza

$$V = W \oplus W^\perp$$

segue che, per ogni sottospazio W di V,

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V \tag{3.4.14}$$

Il teorema 3.4.9 permette di definire la proiezione ortogonale su un sottospazio, come segue.

Definizione 3.4.10 *Sia* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *uno spazio vettoriale euclideo e sia* W *un suo sottospazio. La* proiezione ortogonale P_W sul sottospazio W *è l'applicazione lineare*

$$P_W : V \longrightarrow V, \qquad v \longmapsto P_W(v)$$

dove $P_W(v)$ *è l'unico vettore di* V *che soddisfa:*

a) $P_W(v) \in W$*;*

b) $v - P_W(v) \in W^\perp$.

Dalla dimostrazione del precedente teorema 3.4.9 segue che, se $(w_1, ..., w_k)$ è una base ortonormale del sottospazio W, la proiezione su W di un qualunque vettore $v \in V$ è data da

$$P_W(v) = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_k\rangle w_k \tag{3.4.15}$$

Da 3.4.15 e da 3.4.3 segue

$$P_W(v) = P_{W_1}(v) + \cdots + P_{W_k}(v) \tag{3.4.16}$$

dove $P_{W_1}, ..., P_{W_k}$ sono le proiezioni ortogonali sulle rette $W_i = L(w_i)$, $i = 1, ..., k$:

La proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio W *è uguale alla somma delle proiezioni ortogonali di* v *sulle rette generate dai vettori di una qualunque base ortonormale di* W*.*

Esempio. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, -1, 0)$ sul sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a_1 = (1, -2, 1), a_2 = (2, -2, 0)$.

Soluzione. A partire dai due vettori a_1, a_2 costruiamo una base ortonormale di W con il procedimento di Gram-Schmidt. Poniamo:

$$a_1' = a_1/\|a_1\| = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

$$a_2' = a_2 - (a_2 \cdot a_1')a_1' = (2, -2, 0) - (1, -2, 1) = (1, 0, -1)$$

Una base ortonormale di W è

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

La proiezione ortogonale di v su W è

$$\begin{aligned} P_W(v) &= \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 \\ &= ((1,-1,0)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1))\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) + ((1,-1,0)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1))\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \\ &= (1,-1,0) \end{aligned}$$

Vediamo dunque che $(1,-1,0)$ appartiene al sottospazio W.

3.4.6 Matrici di proiezioni

Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $(w_1, ..., w_k)$ una base ortonormale di W e siano $W_i = L(w_i)$, $i = 1, ..., k$, le rette generate dai vettori w_i. Dall'uguaglianza 3.4.16 segue che (fissata comunque una base di $\mathbb{R}^n$) la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale P_W è la somma delle matrici che rappresentano (rispetto alla stessa base) le singole proiezioni $P_{W_i}, i = 1, ..., k$. Per semplificare le notazioni, supponiamo $k = 2$. Poniamo $w_1 = (x_1, ..., x_n), w_2 = (y_1, ..., y_n)$. Dal teorema 3.4.7 segue che la matrice che rappresenta $P_W = P_{W_1} + P_{W_2}$ è

$$\left|\begin{array}{c} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccc} x_1 & \cdot & \cdot & x_n \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccc} y_1 & \cdot & \cdot & y_n \end{array}\right|$$

La matrice scritta sopra è uguale a

$$\left|\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{cccc} x_1 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_n & \cdot & \cdot & y_n \end{array}\right|$$

(Il termine di posto i, j per entrambe le matrici è $x_i x_j + y_i y_j$.) Concludiamo dunque con il seguente teorema, che generalizza 3.4.7.

Teorema 3.4.11 *Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia $(w_1, ..., w_k)$ una base ortonormale di W. Sia A la matrice $n \times k$ che ha come colonne ordinatamente i vettori $w_i, i = 1, ..., k$. Allora la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è $A\ ({}^tA)$.*

Esempio. Scrivere la matrice della proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sul sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a_1 = (1,-2,1), a_2 = (2,-2,0)$.

Soluzione. Abbiamo visto nell'esempio precedente che una base ortonormale di W è

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

Dunque la matrice (rispetto alla base canonica) di P_W è

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix}$$

3.5 Uguaglianza dei ranghi per righe e per colonne.

In questo paragrafo rivediamo il concetto di rango per righe e di rango per colonne di una matrice. Ora siamo in grado di dimostrare che questi due ranghi sono uguali. L'interesse della dimostrazione che daremo[1] sta nell'interpretazione geometrica degli spazi generati dalle righe e dalle colonne di una matrice A, e al legame tra di essi e il nucleo di A.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ a coefficienti reali. Ricordiamo che le colonne $A_1, ..., A_n$ di A generano il sottospazio Im A (immagine di A) di $\mathbb{R}^m$. Tale sottospazio è l'immagine dell'applicazione lineare (che denoteremo ancora A)

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

che a ogni $X \in \mathbb{R}^n$ associa $AX \in \mathbb{R}^m$. Sappiamo che la dimensione di Im A è detta *rango per colonne* di A. Dunque:

$$\text{Spazio generato dalle colonne di } A = \text{Im } A \tag{3.5.1}$$

$$\text{rango per colonne di } A = \dim \text{Im } A \tag{3.5.2}$$

Analogamente, le righe $A^1, ..., A^m$ di A generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, la cui dimensione è detta *rango per righe* di A. Ovviamente lo spazio generato dalle righe di una matrice A è lo spazio generato dalle colonne della matrice trasposta A^t:

$$\text{Spazio generato dalle righe di } A = \text{Im } A^t \tag{3.5.3}$$

$$\text{rango per righe di } A = \dim \text{Im } A^t \tag{3.5.4}$$

Teorema 3.5.1 *Sia A una qualunque matrice di tipo $m \times n$. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *Il rango per righe è uguale al rango per colonne. Tale valore comune si chiama* rango *della matrice A.*

2. *Lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare* omogeneo

$$AX = 0 \tag{3.5.5}$$

[1]Si veda: S. Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri.

ha dimensione $n - r$, dove n è il numero delle incognite e r è il rango di A:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{dimensione dello spazio delle soluzioni di (3.5.5)} \\ = \\ \textit{numero delle incognite} - \operatorname{rk} A\end{array}}$$

Dimostrazione. Chiamiamo S il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\} \tag{3.5.6}$$

(Ovviamente AX denota il prodotto righe per colonne della matrice A (di tipo $m \times n$) per il vettore colonna X (di tipo $n \times 1$) e 0 è il vettore nullo di $\mathbb{R}^m$).

Lo spazio S si può vedere in due modi diversi:

a) $S = \text{Ker } A$.

Infatti, per la stessa definizione di nucleo, S è il nucleo Ker A dell'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m, \qquad X \longmapsto AX$$

b) $S = (\text{Spazio generato dalle righe di } A)^\perp = (\text{Im } A^t)^\perp$

A parole, S è il *complemento ortogonale* in $\mathbb{R}^n$ dello spazio generato dalle righe di A.

Infatti, la i-esima equazione, per ogni $i = 1, ..., m$,

$$a_{i1}x_1 + \cdots\cdots + a_{in}x_n = 0$$

del sistema $AX = 0$ dice che $X = (x_1, ..., x_n)$ è ortogonale alla i-esima riga $A^i = (a_{i1}, \cdots\cdots, a_{in})$ della matrice A. Dunque X soddisfa l'uguaglianza $AX = 0$ se e solo se X è ortogonale a ogni riga di A (e quindi a ogni loro combinazione lineare), cioè se e solo se X appartiene al complemento ortogonale dello sottospazio generato dalle righe di A.

Adottiamo la prima delle due interpretazioni: $S = \text{Ker } A$. Poiché

$$n = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A$$

(teorema delle dimensioni), si ha:

$$\begin{aligned} n &= \dim \text{ Ker } A + \dim \text{ Im } A \\ &= \dim S + \dim (\text{Spazio generato dalle colonne di } A) \\ &= \dim S + \text{ rango per colonne di } A \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Veniamo ora alla seconda interpretazione: $S = (\text{Im } A^t)^\perp$. Poiché

$$\mathbb{R}^n = (\text{Im } A^t) \oplus (\text{Im } A^t)^\perp$$

si ha [2]

$$n = \dim(\mathrm{Im}\ A^t) + \dim(\mathrm{Im}\ A^t)^\perp \tag{3.5.8}$$

Ma $\dim(\mathrm{Im}\ A^t) =$ rango per righe di A e $(\mathrm{Im}\ A^t)^\perp = S$. Dunque da 3.5.8 si ottiene

$$n = \text{rango per righe di } A + \dim S \tag{3.5.9}$$

Le due uguaglianze 3.5.7 e 3.5.9 dimostrano contemporaneamente entrambe le affermazioni del teorema. □

Esempi. Seguendo le idee della dimostrazione del teorema 3.5.1, vediamo l'interpretazione geometrica di un sistema di equazioni omogenee, in termini di ortogonalità tra spazio delle soluzioni e spazio generato dalle righe.

1) Consideriamo il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{3.5.10}$$

(Un'unica equazione lineare omogenea in n incognite). Supponiamo che il rango della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \end{vmatrix}$$

sia 1, vale a dire che almeno uno dei numeri $a_{11}, ..., a_{1n}$ non sia nullo. Allora, per il teorema 3.5.1, lo spazio S delle soluzioni di 3.5.10 ha dimensione uguale a

$$\text{numero delle incognite} - \text{rango} = n - 1$$

i valori alle $n-1$ variabili $a_{12}, ..., a_{1n}$. Diremo anche che S ha *codimensione* uno, o che è un *iperpiano* di $\mathbb{R}^n$. Si noti che S è il sottospazio ortogonale alla retta L generata dal vettore riga $(a_{11}, ..., a_{1n})$.

Ad esempio, se $n = 3$, lo spazio delle soluzioni in $\mathbb{R}^3$ dell'equazione

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{3.5.11}$$

ha dimensione 2, ossia è un piano. Precisamente tale piano è il complemento ortogonale della retta generata dal vettore riga (a, b, c).

2) Consideriamo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Esplicitamente

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 \end{cases}$$

[2]Si ricordi che se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora $V = W \oplus W^\perp$ e quindi $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Se i due vettori riga (a, b, c), (a', b', c') sono linearmente indipendenti, ossia se rk $A = 2$, la dimensione dello spazio (vettoriale) delle soluzioni di $AX = 0$ è uguale a

$$\text{numero delle incognite} - \text{rango} = 3 - 2 = 1$$

Dunque, se rk $A = 2$, lo spazio delle soluzioni di 3.5 è una retta. Si noti che tale retta è il complemento ortogonale dello spazio (di dimensione due, dunque un piano) generato da (a, b, c), (a', b', c').

3) Consideriamo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad\qquad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Esplicitamente

$$\begin{cases} ax_1 & + & bx_2 & + & cx_3 & = & 0 \\ a'x_1 & + & b'x_2 & + & c'x_3 & = & 0 \\ a''x_1 & + & b''x_2 & + & c''x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Se i tre vettori riga di A sono linearmente indipendenti, ossia se rk $A = 3$, la dimensione dello spazio delle soluzioni di 3.5 è uguale a

$$\text{numero delle incognite} - \text{rango} = 3 - 3 = 0$$

Dunque, se rk $A = 3$, lo spazio delle soluzioni di 3.5 è costituito da un singolo punto, il vettore nullo $(0, 0, 0)$.

Capitolo 4

I determinanti

Introduciamo con un approccio geometrico il determinante di una matrice quadrata, facendo ricorso alle proprietà intuitive delle aree e dei volumi.

Il determinante di una matrice 2×2 (o di una 3×3) sarà l'area del parallelogramma (o il volume del parallelepipedo) generato dalle colonne della matrice.

Il determinante - a differenza delle aree e dei volumi della geometria elementare - fornisce però un'area (o un volume) *con segno*, ossia può assumere anche valori negativi. Ne daremo un'interpretazione, in termini di orientamento dello spazio.

Infine interpreteremo il determinante di un operatore $T : V \longrightarrow V$ come il numero che esprime il fattore di scala per il quale cambiano i volumi delle figure di V sotto l'effetto della trasformazione T. Il segno del determinante dirà se T preserva o meno l'orientamento.

4.1 Proprietà caratteristiche del determinante.

La funzione determinante, denotata det, ad ogni n-pla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ associa un numero reale. Dunque il suo dominio è $\mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \mathbb{R}^n$ (n fattori) e il suo codominio è $\mathbb{R}$:

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v_1, ..., v_n) \longmapsto \det[v_1, ..., v_n]$$

Nel seguito denoteremo con

$$A = [v_1, ..., v_n]$$

la matrice quadrata $n \times n$ le cui colonne sono i vettori $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ e scriveremo anche $\det A$ al posto di $\det[v_1, ..., v_n]$. In particolare, se $e_1, ..., e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, la matrice $[e_1, ..., e_n]$ è la matrice identità I_n. Ma per studiare le proprietà della funzione determinante, occorre ricordare che det è una funzione degli n argomenti $v_1, ..., v_n$, vale a dire è una funzione definita sul prodotto $\mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \mathbb{R}^n$.

Se vogliamo che la funzione det si possa interpretare in termini di area del parallelogramma generato da $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ (se $n = 2$) o di volume del parallelepipedo generato da $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ (se $n = 3$), è ragionevole richiedere che essa debba soddisfare le tre proprietà di omogeneità, invarianza per scorrimento e normalizzazione, che ora definiamo. Dimostreremo che tali proprietà in realtà bastano a caratterizzare la funzione det in modo completo[1].

[1]Seguiamo: G. Prodi, *Metodi Matematici e Statistici*, McGraw-Hill, Milano, 1992

1) *Omogeneità.* Per ogni numero $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det[\lambda v_1, ..., v_n] = \lambda \det[v_1, ..., v_n]$$

Lo stesso vale per ogni altra colonna.

A parole, questa proprietà esprime il fatto seguente: se si moltiplica uno spigolo di un parallelepipedo per un numero λ, il volume del parallelepipedo risulta moltiplicato per λ. Si noti che, potendo essere λ di segno arbitrario, la funzione det assume anche valori negativi. Dalla proprietà di omogeneità si deduce che *se uno dei vettori colonna è nullo, anche il determinante è nullo*:

$$\det[0, v_2, ..., v_n] = \det[0 \cdot 0, v_2, ..., v_n] = 0 \det[0, v_2, ..., v_n] = 0$$

2) *Invarianza per scorrimento.* Sommando a una colonna un'altra diversa colonna moltiplicata per un qualunque numero, il valore del determinante non cambia:

$$\det[v_1 + \lambda v_2, v_2, ..., v_n] = \det[v_1, v_2, ..., v_n] \qquad (i = 2, 3..., n)$$

(Si disegni una figura: nel piano si ottengono parallelogrammi che hanno la stessa base e la stessa altezza). In particolare, se due colonne sono uguali, il valore del determinante è zero: se, ad esempio, $v_1 = v_2$

$$\det[v_1, v_2, ..., v_n] = \det[v_1 - v_2, v_2, ..., v_n] = \det[0, v_2, ..., v_n] = 0$$

Dalla proprietà di invarianza per scorrimento, iterando il procedimento, si vede che *il valore del determinante non cambia se si somma a una colonna una qualsiasi combinazione lineare delle restanti colonne.*

3) *Normalizzazione.* Se $(e_1, ..., e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\det[e_1, ..., e_n] = 1$$

In altri termini, il determinante della matrice identità è 1:

$$\det I_n = \det[e_1, ..., e_n] = 1$$

Con la condizione $\det I_n = 1$ veniamo a fissare una "unità di misura" per i volumi, richiedendo che il cubo che ha come spigoli la base canonica $(1, ..., 0), ..., (0, ..., 1)$ abbia volume 1.

Dalle proprietà che abbiamo enunciato, se ne deducono altre due importanti.

4) *Multilinearità.* La funzione det è lineare in ciascuno dei suoi argomenti.

Questo significa che la funzione det, oltre a essere omogenea rispetto a ogni argomento, è anche additiva. Ad esempio:

$$\det[v_1' + v_1'', v_2, ..., v_n] = \det[v_1', v_2, ..., v_n] + \det[v_1'', v_2, ..., v_n] \tag{4.1.1}$$

Dimostrazione. Se i vettori $v_2, v_3, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti, tutti i determinanti che compaiono in 4.1.1 sono nulli e quindi l'uguaglianza vale. Supponiamo allora che $v_2, v_3, ..., v_n$ siano linearmente indipendenti e sia z un vettore di $\mathbb{R}^n$ tale che $(z, v_2, v_3, ..., v_n)$ sia una base di $\mathbb{R}^n$. Si potrà allora scrivere

$$v_1' = \lambda_1' z + \lambda_2' v_2 + \lambda_3' v_3 + \cdots + \lambda_n' v_n \qquad v_1'' = \lambda_1'' z + \lambda_2'' v_2 + \lambda_3'' v_3 + \cdots + \lambda_n'' v_n$$

Si noti che

$$v_1' = \lambda_1' z + \text{combinazione lineare di } v_2, v_3, ..., v_n \qquad v_1'' = \lambda_1'' z + \text{combinazione lineare di } v_2, v_3, ..., v_n$$

Per le proprietà 2) e 1) si ha allora

$$\det[v_1', v_2, ..., v_n] = \det[\lambda_1' z, v_2, ..., v_n] = \lambda_1' \det[z, v_2, ..., v_n]$$

Analogamente

$$\det[v_1'', v_2, ..., v_n] = \det[\lambda_1'' z, v_2, ..., v_n] = \lambda_1'' \det[z, v_2, ..., v_n]$$

e

$$\det[v_1' + v_1'', v_2, ..., v_n] = \det[\lambda_1' z + \lambda_1'' z, v_2, ..., v_n] = (\lambda_1' + \lambda_1'') \det[z, v_2, ..., v_n]$$

Sostituendo le espressioni calcolate nell'uguaglianza 4.1.1, si vede allora che essa vale.

5) *Alternanza.* Se la matrice A' si ottiene dalla matrice A scambiando di posto due colonne, allora $\det A' = -\det A$. Ad esempio

$$\det[v_2, v_1, ..., v_n] = -\det[v_1, v_2, ..., v_n]$$

Dimostrazione. Ricordando che il determinante vale zero quando due colonne sono uguali, risulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \det[v_1 + v_2, v_1 + v_2, ..., v_n] \\ &= \det[v_1, v_1, ..., v_n] + \det[v_1, v_2, ..., v_n] + \det[v_2, v_1, ..., v_n] + \det[v_2, v_2, ..., v_n] \\ &= \det[v_1, v_2, ..., v_n] + \det[v_2, v_1, ..., v_n] \end{aligned}$$

Di qui la tesi. ∎

Si noti che la proprietà di multilinearità implica ovviamente sia l'omogeneità (proprietà 1) che l'invarianza per scorrimento (proprietà 2).

Quindi, in definitiva, possiamo riassumere le nostre richieste nel modo seguente:

La funzione det

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v_1, ..., v_n) \longmapsto \det[v_1, ..., v_n]$$

deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. Deve essere multilineare alternante.

2. Deve assumere il valore 1 sulla matrice identità.

A priori non sappiamo se una funzione con queste proprietà esista o meno. E, ammesso che ne esista una, non sappiamo se ne esista una sola. Nella prossima sezione dimostreremo che *esiste esattamente una funzione*

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v_1, ..., v_n) \longmapsto \det[v_1, ..., v_n]$$

multilineare alternante che assume il valore 1 sulla matrice identità.

Per il momento assumiamo che tale funzione "det" esista e utilizziamola allo scopo di stabilire se n vettori di $\mathbb{R}^n$ siano linearmente indipendenti. È evidente che due vettori nel piano $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'area del parallelogramma da essi generato è diversa da zero: quest'ultima condizione infatti equivale a dire che i due vettori non stanno su una stessa retta. In modo analogo, tre vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti se e solo se il volume del parallelepipedo da essi generato non è nullo. Ricordando il significato geometrico del determinante come area o volume orientato, queste considerazioni rendono ragionevole la seguente generalizzazione: n vettori $v_1, ..., v_n$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\det[v_1, ..., v_n] \neq 0$. In modo equivalente:

Teorema 4.1.1 *Siano $v_1, .., v_n$ vettori arbitrari di $\mathbb{R}^n$. Allora $v_1, .., v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\det(v_1, .., v_n) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che i vettori $v_1, ..., v_n$ siano linearmente dipendenti. Allora tra di essi ce n'è uno, diciamo v_1, che è combinazione lineare degli altri:

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \det(v_1, ...v_n) &= \det(\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, v_2, ..., v_n) \\ &= \lambda_2 \det(v_2, v_2, ..., v_n) + \cdots + \lambda_n \det(v_n, v_2, ..., v_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(I determinanti sono tutti nulli perché in ciascuno di essi ci sono due colonne uguali).

Viceversa, supponiamo $\det(v_1, ..., v_n) = 0$. Se i vettori $v_1, ..., v_n$ fossero linearmente indipendenti, essi costituirebbero una base di $\mathbb{R}^n$; in particolare i vettori $e_1, ...e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si scriverebbero come combinazione lineare

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$(j = 1, ..., n)$. Sostituendo queste uguaglianze in $\det(e_1, ..., e_n)$, e sviluppando per linearità, otteniamo una somma di determinanti tutti nulli o perché due colonne sono uguali, o perché coincidono (a meno del segno) con $\det(v_1, ..., v_n)$, che è nullo per ipotesi. In definitiva, otteremmo $\det(e_1, ..., e_n) = 0$. Ma questo è assurdo: infatti $\det(e_1, ..., e_n) = 1$, per la proprietà di normalizzazione. I vettori $v_1, ...v_n$ sono dunque linearmente dipendenti. ∎

Ricordiamo che se le colonne di una matrice quadrata A sono $v_1, ..., v_n$, con $\det A$ intendiamo il numero $\det[v_1, ..., v_n]$.

Proposizione 4.1.2 *Sia A una matrice $n \times n$. Sono equivalenti le proprietà :*

1) $\mathrm{rk}\ A = n$.

2) $\det A \neq 0$.

3) A è invertibile.

Dimostrazione. Sappiamo già che A è invertibile se e solo se $\mathrm{rk}\ A = n$ (1.13.8). Per il teorema precedente, le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti, cioè $\mathrm{rk}\ A = n$, se e solo se $\det A \neq 0$. ■

4.1.1 Esistenza e unicità del determinante.

Teorema 4.1.3 (Esistenza e unicità del determinante) *Per ogni intero positivo n esiste un'unica funzione*

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v_1, ..., v_n) \longmapsto \det[v_1, ..., v_n] \tag{4.1.2}$$

multilineare alternante tale che $\det I_n = 1$.

Dimostrazione. Unicità. Dimostriamo quanto segue: ammesso che una funzione con le proprietà di multilinearità e alternanza richieste al determinante esista, allora essa deve necessariamente associare a ogni matrice quadrata di ordine n una ben determinata espressione, data dalla 4.1.3 scritta di sotto. Questo non proverà ancora che la funzione determinante esiste, ma ne proverà soltanto l'unicità, in questo senso: o la funzione non esiste affatto, oppure, se esiste, essa non può che essere data da 4.1.3. Cominciamo a dimostrare l'unicità della funzione det per le matrici 2×2. Questo darà un'idea di come si procede nel caso generale. Più precisamente, dimostriamo che le proprietà di multilinearità e alternanza che abbiamo richiesto al determinante impongono, per una qualunque matrice 2×2

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Scriviamo le colonne di A come combinazione lineare dei vettori (colonna) e_1, e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora:

$$\begin{aligned}
\det[v_1, v_2] &= \det[a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2] \\
&= a_{11}a_{12}\det[e_1, e_1] + a_{11}a_{22}\det[e_1, e_2] + a_{21}a_{12}\det[e_2, e_1] + a_{21}a_{22}\det[e_2, e_2] \\
&= a_{11}a_{22}\det[e_1, e_2] + a_{21}a_{12}\det[e_2, e_1] \\
&= a_{11}a_{22}\det[e_1, e_2] - a_{21}a_{12}\det[e_1, e_2] \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\det[e_1, e_2] \\
&= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Osservazione. Si noti che la condizione di normalizzazione $\det[e_1, e_2] = 1$ è stata sfruttata solo nell'ultimo passaggio. Se si stabilisse $\det[e_1, e_2] = k$ (k numero qualunque) la funzione determinante risulterebbe moltiplicata per k. In altri termini, *le proprietà di multilinearità e di alternanza da sole bastano a caratterizzare il determinante a meno di una costante moltiplicativa.*

Con le matrici di ordine n arbitrario si procede in modo del tutto analogo. Si vede allora che (sempre ammesso che una funzione det con le proprietà richieste esista) per ogni matrice $A = (a_{ij})$ si deve avere:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathit{segno}\,(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \tag{4.1.3}$$

dove σ varia nel gruppo S_n delle permutazioni dell'insieme di indici $\{1, ..., n\}$. Il numero $\mathit{segno}\,(\sigma)$, detto il *segno* della permutazione σ, vale 1 oppure -1, a seconda che per passare dalla permutazione $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ alla permutazione fondamentale $1, 2, ..., n$ occorra un numero pari o un numero dispari di scambi.

Esistenza. A questo punto, per provare l'esistenza, c'è un'unica scelta possibile: non resta che porre *per definizione*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathit{segno}\,(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Resta però da dimostrare che la funzione determinante, definita in questo modo, è multilineare, alternante e il suo valore sulla matrice identità è 1. La verifica di questi fatti non è difficile[2]). ∎

Osservazione. Le coppie di indici che compaiono in ogni termine della somma 4.1.3 possono essere così disposte:

$$\begin{matrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{matrix} \tag{4.1.4}$$

Per la proprietà commutativa del prodotto, è possibile riordinare i termini $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ in modo tale che i primi indici descrivano la permutazione fondamentale $1, 2, ..., n$. Otterremo allora termini del tipo $a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)}$. La disposizione delle coppie degli indici sarà allora:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \tau(n) \end{matrix} \tag{4.1.5}$$

Per passare dallo schema 4.1.4 allo schema 4.1.5 si eseguono simultaneamente scambi tra indici sovrapposti. Dunque le due permutazioni σ e τ hanno lo stesso segno. Ne segue:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathit{segno}\,(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)} \tag{4.1.6}$$

L'espressione 4.1.6 non è che il determinante della trasposta della matrice A. Abbiamo allora dimostrato che, per ogni matrice quadrata A, il detrminante di A è uguale al determinante della trasposta:

$$\det A = \det\, A^t \tag{4.1.7}$$

4.1.2 Calcolo del determinante

Il calcolo diretto del determinante di una matrice mediante l'espressione 4.1.3 non è per niente pratico (tranne che per $n = 2$).

Il determinante di una matrice $n \times n$ si può calcolare in termini di determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$ mediante un procedimento ricorsivo detto *sviluppo di Laplace* (usato talvolta per definire il determinante stesso). Sia A una matrice di ordine n e sia A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene cancellando la riga di posto i e la colonna di posto j di A. La

[2]Si veda: S.Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri.

matrice A_{ij} è detta un *minore* di ordine $n-1$ della matrice A; precisamente, A_{ij} è detta il *minore complementare* dell'elemento a_{ij} di A. Ad esempio, se

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

allora

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Vale allora il seguente teorema, che non dimostriamo (per la dimostrazione si veda: S.Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri):

Proposizione 4.1.4 (Sviluppo di Laplace) *Sia A una qualunque matrice $n \times n$ e i un qualunque indice (di riga) tra 1 e n. Allora*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \tag{4.1.8}$$

(Sviluppo di Laplace secondo la riga i-esima)

Poiché $\det A = \det {}^tA$, vale anche lo *sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \tag{4.1.9}$$

Se chiamiamo *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, concludiamo che *il determinante di una matrice è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o colonna) per i propri complementi algebrici.*

Esempio. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Sviluppando secondo la seconda colonna, troviamo

$$\det A = 2 \det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(6 - (-1)) - 4(15 - 1) = -42$$

Ma il metodo più efficace per il calcolo di un determinante di una matrice consiste nel trasformarla in una matrice triangolare superiore mediante *operazioni elementari sulle righe*. (*Riduzione per righe*). Occorre però tenere conto dell'effetto che queste operazioni hanno sul determinante:

1. Se si moltiplica una riga per un numero $\lambda \neq 0$ il determinante viene moltiplicato per λ;

2. Se si somma alla riga i-esima un multiplo della riga j-esima, con $i \neq j$, il determinante non cambia;

3. Se si scambiano di posto due righe il determinante cambia segno.

Vediamo degli esempi.

Esempio.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{vmatrix} = A'$$

Abbiamo compiuto solo operazioni che non alterano il determinante, quindi

$$\det A = \det A' = 1 \cdot (-6) \cdot (-5/3) = 10$$

Esercizio. Dimostrare che il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

4.1.3 Il determinante del prodotto

Teorema 4.1.5 (di Binet) *Se A e B sono due qualunque matrici quadrate dello stesso ordine, allora*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \tag{4.1.10}$$

Dimostrazione. Sia A una qualunque matrice fissata $n \times n$. Consideriamo la funzione

$$\Phi : M(n \times n) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad X \longmapsto \Phi(X) = \det(AX)$$

Proviamo che Φ, pensata come funzione delle colonne $(X_1, ..., X_n)$ di X, soddisfa le due proprietà di omogeneità e invarianza per scorrimento.

1. (*Omogeneità*). Se $X = [X_1, ..., X_n]$, dove $X_1, ..., X_n$ sono le colonne della matrice X, allora la matrice prodotto AX è data da: $AX = [AX_1, ..., AX_n]$. Se λ è un qualunque numero, abbiamo allora:

$$\Phi([\lambda X_1, ..., X_n]) = \det[\lambda AX_1, ..., AX_n] = \lambda \Phi([X_1, ..., X_n]).$$

2. (*Invarianza per scorrimento*) Per ogni numero λ e per ogni indice $j \neq 1$

$$\begin{aligned} \Phi([X_1 + \lambda X_j, X_2, ..., X_n]) &= \det[A(X_1 + \lambda X_j), AX_2, ..., AX_n] \\ &= \det[AX_1 + \lambda AX_j, AX_2, ..., AX_n] \\ &= \det[AX_1, AX_2, ..., AX_n] = \Phi([X_1, ..., X_n]) \end{aligned}$$

Ne segue, per quanto si è visto nella dimostrazione del teorema 4.1.3, che la funzione Φ è proporzionale alla funzione determinante:

$$\det(AX) = k \det X$$

Ponendo $X = I$, si ricava $k = \det A$ e quindi

$$\det(AX) = \det A \det X$$

uguaglianza che coincide con la 4.1.10. ■

Per una dimostrazione più concettuale del teorema di Binet si veda la sezione 4.3.

Definizione 4.1.6 *Sia $T : V \longrightarrow V$ un operatore lineare*[3] *di uno spazio vettoriale finito-dimensionale V. Il* determinante di T *è il determinante di una qualunque matrice che rappresenta T (rispetto a qualche base di V): lo denoteremo* $\det T$.

Il determinante di un operatore è indipendente dalla scelta di una base, e quindi la definizione data sopra è corretta, perché matrici che rappresentano lo stesso operatore hanno lo stesso determinante. Infatti se A e B rappresentano lo stesso operatore T rispetto a due basi diverse, allora sono simili (si veda 1.10.6) cioè esiste una matrice invertibile P per la quale $B = P^{-1}AP$, e quindi, per il teorema di Binet 4.1.10:

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = \det A$$

Il significato intrinseco del determinante di un operatore sarà illustrato più avanti.

Proposizione 4.1.7 *Sia $T : V \longrightarrow V$ un operatore di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora T è un isomorfismo se e solo se* $\det T \neq 0$.

Dimostrazione. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V e sia A la matrice che rappresenta T rispetto a tale base. Allora T è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile, cioè se e solo se $\det A \neq 0$. (Si veda 4.1.2).

Notiamo esplicitamente che (se una matrice è invertibile) il determinante della matrice inversa è l'inverso del determinante:

Proposizione 4.1.8 *Se A è una matrice invertibile, allora* $\det A \neq 0$ *e*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{4.1.11}$$

Dimostrazione.

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = (\det A)(\det A^{-1})$$

Dunque $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

4.2 Spazi vettoriali orientati

4.2.1 Basi equiorientate

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, di dimensione > 0 finita. Ricordiamo che una base di V è un insieme *ordinato* di vettori linearmente indipendenti che generano V.

[3] Ricordiamo che un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ il cui dominio coincide con il codominio, si chiama anche operatore lineare, o endomorfismo lineare.

Dunque, se $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{B}' = (v'_1, ..., v'_n)$ sono due basi di V, esiste un unico operatore lineare $V \xrightarrow{T} V$ che *trasforma* $\mathcal{B}$ *in* $\mathcal{B}'$*, preservando l'ordine.* Intendiamo l'operatore lineare definito da

$$T(v_i) = v'_i$$

per $i = 1, ..., n$.

Definizione 4.2.1 *Si dice che la base* $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ ha la stessa orientazione *della base* $\mathcal{B}' = (v'_1, ..., v'_n)$*, e si scrive*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \tag{4.2.1}$$

se l'operatore lineare $V \xrightarrow{T} V$ *che trasforma la base* $\mathcal{B}$ *nella base* $\mathcal{B}'$ *ha determinante positivo.*

Si dice che $\mathcal{B}$ ha orientazione opposta *rispetto a* $\mathcal{B}'$ *se* $\det T < 0$.

Ad esempio, le due basi $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{B}' = (-v_1, ..., v_n)$ hanno sempre orientazioni opposte[4]

Si vede facilmente che la relazione "$\mathcal{B}$ ha la stessa orientazione di $\mathcal{B}'$" è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathrm{B}(V)$ di tutte le basi di V. Questo significa che valgono le proprietà seguenti:

1. (Proprietà riflessiva). $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$
2. (Proprietà simmetrica). $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ implica $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$
3. (Proprietà transitiva). Le due relazioni $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$ implicano $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$

Diremo anche che due basi con la stessa orientazione sono *equiorientate.*

La prima proprietà è ovvia, perché l'operatore che porta $\mathcal{B}$ in sé è l'operatore identità I, e $\det I = 1 > 0$. Quanto alla simmetria, se T porta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$, allora T^{-1} porta $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$. Quindi se $\det T$ è positivo, anche $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$ è positivo. Infine, per dimostrare la proprietà transitiva, si noti che se T trasforma $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ e S trasforma $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}''$, allora $S \circ T$ trasforma $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}''$. Dunque se $\det T$ e $\det S$ sono entrambi positivi, anche $\det S \circ T = (\det S)(\det T)$ è positivo.

L'insieme $\mathrm{B}(V)$ di tutte le basi di V viene ripartito esattamente in *due* classi di equivalenza, chiamate le due *orientazioni* di V.

Infatti, fissata una base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, ogni altra base è equivalente a $\mathcal{B}$ oppure a $\mathcal{B}' = (-v_1, ..., v_n)$. Ovviamente, per transitività , tutte le basi equivalenti a $\mathcal{B}$ sono equivalenti tra loro, e tutte le basi equivalenti a $\mathcal{B}'$ sono equivalenti tra loro, ma non alle precedenti.

Uno *spazio vettoriale orientato* $(V, \mathcal{O})$ consiste in uno spazio vettoriale V in cui è stata scelta una delle due possibili orientazioni. Dato uno spazio vettoriale orientato $(V, \mathcal{O})$, diremo *positivamente orientate* le basi che appartengono all'orientazione fissata $\mathcal{O}$, e *negativamente orientate* le altre.

Per assegnare un orientazione $\mathcal{O}$ di uno spazio vettoriale V, basta fissare una base $\mathcal{B}$. Ovviamente si intende scegliere l'orientazione $\mathcal{O}$ alla quale $\mathcal{B}$ appartiene.

[4]In tale caso, infatti, la matrice che rappresenta T nella base $(v_1, ..., v_n)$ è diagonale, con il primo termine uguale a -1 e tutti gli altri uguali a 1. Quindi il suo determinante è $-1 < 0$.

La scelta di una delle due possibili orientazioni è del tutto arbitraria.

Anche per ogni spazio vettoriale di dimensione zero si definiscono due orientazioni opposte: i numeri $+1$ e -1.

4.2.2 Deformazioni continue di basi

Del concetto di "basi con la stessa orientazione" si può dare una caratterizzazione topologica interessante ed intuitiva. Ne diamo solo un cenno, sorvolando su alcuni aspetti più tecnici.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Consideriamo una base $\mathcal{B}_t = (a_1(t), ..., a_n(t))$ di V costituita da vettori $a_1(t), ..., a_n(t)$ variabili in modo continuo in funzione di un parametro t, che possiamo pensare come il "tempo". Il parametro t descrive un intervallo $[a, b]$ dell'asse reale; non è restrittivo assumere che $[a, b]$ sia l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. In termini più rigorosi:

Definizione 4.2.2 *Una* base variabile con continuità *di V è un'applicazione*

$$\mathcal{B} : [0, 1] \longrightarrow V^n, \qquad t \longmapsto \mathcal{B}_t = (a_1(t), ..., a_n(t)) \tag{4.2.2}$$

con le proprietà seguenti:

1) l'applicazione $\mathcal{B}$ è continua;

2) per ogni istante $t \in [0, 1]$, i vettori $(a_1(t), ..., a_n(t))$ costituiscono una base di V.

Se $\mathcal{B} : [0, 1] \longrightarrow V^n$ è una base variabile con continuità, si dice che la base

$$\mathcal{B}_0 = (a_1(0), ..., a_n(0))$$

viene *deformata* con continuità nella base

$$\mathcal{B}_1 = (a_1(1), ..., a_n(1))$$

Esempio. $\mathcal{B}_t = ((1 + t, 0), (1 - t, 1))$, con $t \in [0, 1]$, è una base variabile con continuità di $\mathbb{R}^2$. Possiamo pensare a $\mathcal{B}_t$ come a una deformazione della base $\mathcal{B}_0 = ((1, 0), (1, 1))$ nella base $\mathcal{B}_1 = ((2, 0), (0, 1))$.

Esempio. $\mathcal{B}_t = ((1, 0, 0), (0, \cos \pi t, \sin \pi t), (0, -\sin \pi t, \cos \pi t))$, $t \in [0, 1]$, è una base di $\mathbb{R}^3$ variabile con continuità che deforma la base

$$\mathcal{B}_0 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

nella base

$$\mathcal{B}_1 = (1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)$$

Due basi $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ di V si dicono *omòtope* se sono deformabili con continuità l'una nell'altra, cioè se esiste una base variabile con continuità

$$\mathcal{B} : [0, 1] \longrightarrow V^n, \qquad t \longmapsto \mathcal{B}_t = (a_1(t), ..., a_n(t))$$

tale che all'istante $t = 0$ coincida con $\mathcal{A}_0$ e all'istante $t = 1$ coincida con $\mathcal{A}_1$.

Esempio. Due basi del piano $\mathbb{R}^2$ che si ottengono una dall'altra mediante una rotazione (nel piano) sono omotope. Invece le due basi $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, -1)$ e $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ non sono omotope. Ne daremo una dimostrazione più avanti. Intuitivamente: con una deformazione continua si può certamente portare v_1 su e_1 e v_2 su e_2: ma, nel corso della deformazione, i due vettori v_1 e v_2 devono trovarsi, in almeno un istante, lungo una stessa retta. E quando questo accade, essi non costituiscono più una base di $\mathbb{R}^2$.

Nell'insieme di tutte le basi di V, la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza (ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva). Si dimostra che *le classi di equivalenza sono esattamente due.* Detto altrimenti, l'insieme delle basi è ripartito in due classi e, date due basi, esse possono essere deformate l'una nell'altra se e solo se esse appartengono alla stessa classe. Più precisamente si dimostra[5] il seguente:

Teorema 4.2.3 *Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di uno spazio vettoriale V. Allora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono omotope se e solo se sono equiorientate (nel senso della definizione 4.2.1) cioè se e solo se* $\det P > 0$, *dove P è l'isomorfismo che porta la prima base nella seconda.*

Quando $V = \mathbb{R}^n$ la scelta standard consiste nel dichiarare che la base canonica $(e_1, ..., e_n)$ è positivamente orientata.

Il teorema 4.2.3 permette ora di stabilire facilmente, attraverso il calcolo di un determinante, se due basi di $\mathbb{R}^n$ sono equiorientate.

Esempio. La base $((1, -1), (2, 2))$ di $\mathbb{R}^2$ è positivamente orientata, vale a dire è orientata come la base canonica, in quanto $\det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$. (Basta infatti una rotazione di $\pi/4$, seguita da opportune contrazioni delle lunghezze, per portare la base data a sovrapporsi a quella canonica, preservando a ogni istante l'indipendenza lineare.)

Esempio. Siano $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, -1)$. Allora la base (v_1, v_2) è negativamente orientata perché $\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

4.3 Interpretazione geometrica del determinante

Generalizzando la nozione di parallelogramma in $\mathbb{R}^2$ e di parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$, chiamiamo *parallelepipedo* (o n-parallelepipedo) con spigoli $v_1, ..., v_n \in R^n$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$:

$$\{c_1 v_1 + ... + c_n v_n \mid 0 \leq c_i \leq 1 \quad i = 1, ...n\}$$

Per $n = 2$ il parallelepipedo si chiamerà *parallelogramma.* Possiamo così sintetizzare le nostre nozioni sul determinante.

[5] Si veda: M. Berger, Geometry I, Springer, 1994.

1) Il determinante di una matrice quadrata A è il volume orientato del parallelepipedo i cui spigoli sono le colonne di A.

Il valore assoluto del numero $\det A$ è dunque il volume del parallelepipedo i cui spigoli sono le colonne della matrice A. Inoltre:

- $\det A > 0$ se $(v_1, ..., v_n)$ è una base positivamente orientata di $\mathbb{R}^n$;
- $\det A < 0$ se $(v_1, ..., v_n)$ è una base negativamente orientata di $\mathbb{R}^n$;
- $\det A = 0$ se le colonne di A sono linearmente dipendenti, cioè se non costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio. Per $n = 2$, il determinante $\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ è l'area del parallelogramma generato dai vettori colonna $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, presa con il segno positivo se la base v_1, v_2 dà lo stesso orientamento della base canonica (e_1, e_2), e presa con il segno negativo altrimenti. (Si intende che il determinante è zero se le colonne sono linearmente dipendenti.)

Data una matrice A di ordine n, consideriamo l'operatore $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, X \longmapsto AX$ (moltiplicazione a sinistra per A). La colonna i-esima della matrice A è l'immagine Ae_i del vettore e_i della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Quindi A trasforma il cubo unitario $(e_1, ..., e_n)$ (i cui spigoli sono la base canonica di $\mathbb{R}^n$) nel parallelepipedo i cui spigoli sono le colonne della matrice A. Pertanto:

2) Il determinante dell'operatore $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è il volume orientato dell'immagine del cubo unitario.

Si ha $\det A > 0$ se la base $(Ae_1, ..., Ae_n)$ è orientata come la base $(e_1, ..., e_n)$. Si ha $\det A < 0$ se la base $(Ae_1, ..., Ae_n)$ e la base $(e_1, ..., e_n)$ non sono equiorientate. Infine si ha $\det A = 0$ se i vettori $Ae_1, ..., Ae_n$ non sono una base, cioè sono linearmente dipendenti.

Tenuto conto che il cubo unitario ha volume uno, l'ultima affermazione va letta nel modo seguente: a meno del segno, $\det A$ è un *rapporto fra volumi*:

$$\text{Valore assoluto di } \det A \ = \frac{\text{Volume dell'immagine del cubo unitario}}{\text{Volume del cubo unitario}}$$

Sotto questa forma l'affermazione si generalizza, sulla base delle seguenti considerazioni euristiche. Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ una qualunque figura di $\mathbb{R}^n$. Si approssimi il volume della figura inscrivendo in essa tanti cubetti sempre più piccoli (metodo di esaustione di Archimede). Se si trasforma la figura mediante un operatore lineare A, il volume di ogni cubetto viene moltiplicato per $\det A$. Di conseguenza il volume dell'intera figura cambia per lo stesso fattore moltiplicativo $\det A$:

$$\text{Valore assoluto di } \det A \ = \frac{\text{Volume dell'immagine } A(\mathcal{F})}{\text{Volume di } \mathcal{F}} \tag{4.3.1}$$

In breve:

3) Il determinante di un operatore A è il coefficiente di scala per il quale cambiano i volumi.

Si noti che la forma di una figura può cambiare notevolmente per effetto di una trasformazione lineare: non è affatto ovvio geometricamente (nemmeno nel caso del piano) che il volume di tutte le figure venga moltiplicato per una stessa costante moltiplicativa.

Esempio. Sia $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore. La condizione $\det A = 1$ equivale al fatto che A preserva i volumi e l'orientamento. Questo è il caso, ad esempio, delle matrici di rotazione

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

o delle matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dove a è un qualunque numero. (Si dia un'interpretazione geometrica di questi operatori.) Gli operatori rappresentati dalle matrici

$$A = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

($\det A = -1$) preservano i volumi, ma non l'orientamento. Essi rappresentano una rotazione di un angolo t, seguita dalla riflessione rispetto alla retta generata da $(\sin t, \cos t)$.

Esempio. Consideriamo l'operatore $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

Per effetto dell'operatore A, il punto generico (x, y) ha come immagine $(u, v) = (ax, by)$. La circonferenza unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ si trasforma nell'*ellisse*

$$A(S^1) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\}$$

Il rapporto fra l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse e l'area del cerchio unitario (uguale a $\pi 1^2 = \pi$) è uguale a $\det A = ab$:

$$\frac{\text{area della regione di piano racchiusa dall'ellisse}}{\pi} = \det A = ab$$

Ne segue che l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse è πab.

Osservazione. L'uguaglianza $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ (si veda 4.1.10) può essere ora facilmente spiegata: abbiamo visto che il valore assoluto del determinante è il fattore di scala per cui cambiano i volumi. Se si effettua la trasformazione composta AB (prima la trasformazione B, seguita dalla trasformazione A) i volumi cambieranno allora per un fattore di scala uguale a $(\det A)(\det B)$. (Ad esempio, se l'operatore A ingrandisce i volumi di un fattore 2 e l'operatore B li ingrandisce di un fattore 3, l'operatore composto AB ingrandisce i volumi di un fattore $2 \cdot 3$.) Tenuto conto che l'operatore composto AB cambia l'orientamento se e solo se esattamente uno degli operatori A, B lo cambia, si vede poi che l'uguaglianza 4.1.10 vale anche in segno.

3) Il determinante di un operatore A è il coefficiente di scala per il quale cambiano i volumi.

4.4 Esercizi

Esercizio 4.4.1 *Sia A una matrice $n \times n$ e sia λ un numero. Quanto vale* $\det(\lambda A)$*?*

Esercizio 4.4.2 *Siano A e B matrici $n \times n$. È vero che* $\det(A+B) = \det A + \det B$*?*

Esercizio 4.4.3 *Stabilire i valori del parametro k per i quali i vettori* $(1,0,2),(1,k,-1),(k,0,3)$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 4.4.4 *Trovare l'area del triangolo con vertici* $(4,3),(8,1),(5,5)$.

Esercizio 4.4.5 *Trovare il legame tra l'area A del triangolo con vertici*

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$$

e il volume V del tetraedro definito dai vettori

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4.4.6 *Siano $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ due punti distinti del piano. Spiegare perché*

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

è l'equazione della retta che passa per i punti A e B.

Esercizio 4.4.7 *Scrivere sotto forma di determinante un'equazione per la retta passante per i punti $A = (3,2)$ e $B = (1,-2)$.*

Esercizio 4.4.8 *Trovare l'area con segno del parallelogramma $P(v_1, v_2)$ nei casi seguenti:*

1) $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$.

2) $v_1 = (a,0)$, $v_2 = (0,b)$, dove a, b sono numeri reali qualsiasi.

3) $v_1 = (a,b)$, $v_2 = (0,c)$, dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi.

Esercizio 4.4.9 *Dimostrare che, se la matrice A è invertibile, allora*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Si dia un'interpretazione geometrica.

Esercizio 4.4.10 *(*Determinante di matrici triangolari.*) Facendo uso di un disegno e dell'interpretazione geometrica del determinante come volume orientato, spiegare perché i determinanti*

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 \quad e \quad \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3.$$

dipendono solo dagli elementi sulla diagonale.

Esercizio 4.4.11 *Dimostrare che*

$$\det \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b)$$

Esercizio 4.4.12 *Sia A una matrice ortogonale, vale a dire una matrice quadrata che soddisfa la condizione $A^t = A^{-1}$. Dimostrare che $\det A = 1$ oppure $\det A = -1$. Perché questo fatto è geometricamente ovvio? (Suggerimento. Le matrici ortogonali rappresentano isometrie lineari).*

Esercizio 4.4.13 *Dare un esempio di una matrice 2×2 che preservi le aree, ma non rappresenti una isometria di $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 4.4.14 *Sia A una matrice $n \times n$. Dimostrare che se $A^n = 0$ per un intero $n > 0$, allora $\det A = 0$.*

Esercizio 4.4.15 *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia W un suo sottospazio di dimensione $d < n$. Dimostrare che la proiezione ortogonale*

$$P_W : V \longrightarrow V$$

ha determinante nullo. (Suggerimento. Si scelga una base ortonormale $(v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ..., v_n)$ di V in cui i primi d vettori siano in W. Com'è fatta la matrice che rappresenta P_W rispetto a tale base?)

Capitolo 5

Autovettori e Autovalori

5.1 Introduzione

Ricordiamo come si rappresenta un operatore $F : V \longrightarrow V$ di uno spazio vettoriale finito-dimensionale V mediante una matrice:

1) si fissa una (qualunque) base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ di V;

2) si scrive ogni vettore $F(v_j)$, $j = 1, ..., n$, come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ stessa:

$$F(v_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{nj}v_n$$

La matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$ ha come colonna di posto j le coordinate $\begin{vmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{vmatrix}$ di $F(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Naturalmente, se si cambia la base, cambia in generale anche la matrice che rappresenta l'operatore. Precisamente, se $\mathcal{B}'$ è un'altra base e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(1_V)$, allora la nuova matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(F)$ è data da

$$A' = P^{-1}AP.$$

Se l'operatore descrive una trasformazione rispetto alla quale alcune direzioni dello spazio giocano un ruolo privilegiato (ad esempio per motivi di simmetria), la scelta di vettori di base lungo quelle direzioni rende la matrice dell'operatore di più facile lettura. In particolare, supponiamo che esista un vettore non nullo v_1 di V che venga trasformato da F in un multiplo di se stesso: $F(v_1) = \lambda_1 v_1$. Diremo in tal caso che v_1 è un autovettore di F. Se si sceglie una base in cui il primo vettore è un autovettore (ammesso che ne esista uno), la prima colonna di $M_{\mathcal{B}}(F)$ sarà

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il caso più favorevole si ha quando esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ di V in cui ogni v_j è un autovettore: $F(v_j) = \lambda_j v_j$, $j = 1, ..., n$. La matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ è allora in forma diagonale:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

In tal caso l'operatore F si dice *diagonalizzabile*.

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione due (diciamo il piano ordinario della geometria euclidea, in cui si sia fissata un'origine) e sia W un sottospazio di dimensione uno (una retta per l'origine). Sia $F : V \longrightarrow V$ la simmetria ortogonale rispetto alla retta W, cioè l'unico operatore che fissa i vettori di W e manda ogni vettore di $W^\perp$ nel suo opposto. Due direzioni, W e $W^\perp$, sono ovviamente privilegiate per motivi di simmetria. Conviene allora scegliere una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ con $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$. Poiché

$$F(v_1) = v_1 \quad \text{e} \quad F(v_2) = -v_2,$$

la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Si noti che ognuno dei due vettori v_1, v_2 è un autovettore (viene mandato in un multiplo di se stesso). L'operatore F è dunque diagonalizzabile.

Esempio. Rotazione nel piano. Sia $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di un angolo θ attorno all'origine, ossia l'operatore rappresentato, rispetto alla base ortonormale (e_1, e_2) di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Se $0 < \theta < \pi$, non esiste alcun vettore non nullo che venga trasformato dalla rotazione di un angolo θ in un suo multiplo, quindi l'operatore R_θ non è diagonalizzabile. Se invece $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$, l'operatore R_θ è diagonalizzabile ed è rappresentato, rispetto a una qualsiasi base, rispettivamente dalle matrici diagonali

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

In questo capitolo vediamo sotto quali condizioni un operatore si può rappresentare, rispetto a opportune basi, mediante una matrice diagonale.

5.2 Autovalori e autovettori

Sia $F : V \longrightarrow V$ un operatore di uno spazio vettoriale V.

Definizione 5.2.1 *Un vettore v di V si dice un* autovettore *dell'operatore F se:*

1) $v \neq 0$

2) esiste un numero λ per il quale $F(v) = \lambda v$.

Un numero λ si dice autovalore *di F se esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $F(v) = \lambda v$. Per ogni autovalore λ di F si chiama* autospazio V_λ *relativo all'autovalore λ il sottospazio*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} \tag{5.2.1}$$

Autovettori e autovalori di una matrice quadrata A, di tipo $n \times n$, sono definiti come autovettori e autovalori dell'operatore $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, moltiplicazione a sinistra per A:

Definizione 5.2.2 *Un vettore v di $\mathbb{R}^n$ si dice un* autovettore *della matrice quadrata A, di tipo $n \times n$, se:*

1) $v \neq 0$;

2) esiste un numero λ per il quale $Av = \lambda v$.

Un numero λ si dice autovalore *di A se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $Av = \lambda v$. Per ogni autovalore λ di una matrice A si chiama* autospazio V_λ *relativo all'autovalore λ il sottospazio*

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\} \tag{5.2.2}$$

L'autospazio V_λ è dunque costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori relativi a λ.

Esercizio. Dimostrare che un autospazio V_λ è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione. Sia v un autovettore di un operatore F (o di una matrice A). Allora esiste un *unico* numero λ per il quale $F(v) = \lambda v$. Infatti, da $F(v) = \lambda v$ e $F(v) = \mu v$, segue $(\lambda - \mu)v = 0$, da cui $\lambda = \mu$ (Qui è essenziale l'ipotesi $v \neq 0$). Se $v \neq 0$ e $F(v) = \lambda v$, diremo che λ è l'*autovalore associato* all'autovettore v, oppure che v è un autovettore relativo all'autovalore λ.

Esempio. Siano $A = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$, $u = \begin{vmatrix} 6 \\ -5 \end{vmatrix}$, $v = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$. Vogliamo stabilire se u e v sono autovettori di A. Ora:

$$Au = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -24 \\ 20 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 6 \\ -5 \end{vmatrix} = -4u.$$

Dunque u è un autovettore di A, relativo all'autovalore $\lambda = -4$.

$$Av = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 \\ 11 \end{vmatrix}$$

Ne segue che v non è autovettore di A, perché Av non è multiplo di v.

Esempio. Sia $V = C^\infty(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente differenziabili e sia $F = \frac{d}{dt}$ l'operatore di derivata. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ la funzione definita da $f(t) = \exp(\lambda t)$. Abbiamo $\frac{d}{dt} f(t) = \lambda f(t)$. Dunque, per ogni λ, la funzione $\exp(\lambda t)$ è un autovettore dell'operatore di derivata, relativo all'autovalore λ.

Esempio. Gli autovettori di una matrice diagonale. Si consideri la matrice diagonale

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

È immediato verificare che i vettori $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ sono autovettori di A; i relativi autovalori sono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Dato un operatore $F : V \longrightarrow V$ (con V di dimensione finita), supponiamo che esista una base $(v_1, ..., v_n)$ di V costituita da autovettori di F. In tal caso, poiché

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1, ..., F(v_n) = \lambda_n v_n,$$

la matrice che rappresenta F rispetto alla base di autovettori $(v_1, ..., v_n)$ è la matrice diagonale:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Definizione 5.2.3 *Si dice che un operatore $F : V \longrightarrow V$ è* diagonalizzabile *se esiste una base $\mathcal{B}$ di V costituita da autovettori di F, ovvero, in modo equivalente, se esiste una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è diagonale. In tal caso diremo che $\mathcal{B}$ è una base che* diagonalizza *l'operatore F.*

Una matrice quadrata A, $n \times n$, si dice diagonalizzabile *se è diagonalizzabile l'operatore $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, X \longmapsto AX$ (moltiplicazione a sinistra per A). In modo equivalente, una matrice A è diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.*[1]

(Se $\mathcal{B}$ è una base che diagonalizza L_A e $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^n})$ è la matrice dell'identità di $\mathbb{R}^n$ dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$).

5.3 Il polinomio caratteristico

Nella ricerca degli autovettori di un operatore $F : V \longrightarrow V$, occorre distinguere il caso di spazi vettoriali reali da quello di spazi vettoriali sul campo complesso. Nel seguito, salvo avviso contrario, supporremo che V sia uno spazio vettoriale *reale*. Sia $F : V \longrightarrow V$ un operatore di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(F)$ la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$. In questo modo la ricerca di un autovettore dell'operatore F si trasforma nella ricerca di un autovettore della matrice A: bisogna vedere per quali numeri λ esistano soluzioni non nulle $X \in \mathbb{R}^n$ del sistema $AX = \lambda X$, che equivale a

$$(A - \lambda I)X = 0 \tag{5.3.1}$$

dove I è la matrice identità. Ora la condizione necessaria e sufficiente perché il sistema lineare omogeneo 5.3.1 abbia una soluzione non nulla è che sia

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{5.3.2}$$

[1]Ovviamente una tale matrice P, se esiste, deve essere quadrata, dello stesso ordine di A.

(Infatti se $\det(A - \lambda I)$ fosse diverso da 0, la matrice $A - \lambda I$ sarebbe invertibile, quindi il sistema 5.3.1 avrebbe l'unica soluzione $X = (A - \lambda I)^{-1}0 = 0$.) Si dice che l'equazione 5.3.2 è *l'equazione caratteristica* della matrice A. Il polinomio

$$\Phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{5.3.3}$$

si chiama *polinomio caratteristico* della matrice A. Abbiamo allora dimostrato:

Proposizione 5.3.1 *Sia λ un numero reale e sia A una matrice quadrata. Allora λ è autovalore di A se e solo se è radice del polinomio caratteristico* $\det(A - \lambda I)$.

Esempio. Il polinomio caratteristico della generica matrice 2×2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

è

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - (\mathrm{tr}\ A)\lambda + \det A$$

Esempio. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 6$$

Esempio. Gli autovalori di una matrice triangolare sono i termini sulla diagonale principale. Ad esempio, gli autovalori di

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

sono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Nel calcolo degli autovalori, non importa quale base $\mathcal{B}$ si scelga, e quindi quale sia la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(F)$ che si usa per rappresentare l'operatore. Infatti se si sceglie un'altra base $\mathcal{B}'$, l'operatore F si rappresenta con la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(F) = P^{-1}AP$, simile alla matrice A, e matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, come ora proviamo:

Proposizione 5.3.2 *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Sia $A' = P^{-1}AP$. Allora

$$\begin{aligned}
\Phi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I) \\
&= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) \\
&= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] \\
&= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I) = \Phi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

■

5.4 Matrici e operatori diagonalizzabili

Teorema 5.4.1 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ un operatore. Siano $v_1, ..., v_m$ autovettori di F, con autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_m$ rispettivamente. Supponiamo che questi autovalori siano distinti, cioè*

$$\lambda_i \neq \lambda_j \qquad \text{se } i \neq j.$$

Allora $v_1, ..., v_m$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Per induzione su m. Se $m = 1$, un autovettore v_1 è un vettore non nullo, e quindi è linearmente indipendente. Sia $m > 1$. Supponiamo che $c_1, .., c_m$ siano numeri per i quali

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_m v_m = 0 \tag{5.4.1}$$

Dobbiamo dimostrare che $c_1 = ... = c_m = 0$. Applicando F ai due membri di 5.4.1 e ricordando che $F(v_j) = \lambda_j v_j$, otteniamo

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + ... + c_m \lambda_m v_m = 0 \tag{5.4.2}$$

Moltiplicando 5.4.1 per λ_1 otteniamo

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_1 + ... + c_m \lambda_1 v_m = 0$$

Sottraendo le ultime due espressioni:

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + ... + c_m(\lambda_m - \lambda_1) v_m = 0$$

L'ipotesi induttiva implica

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = ... = c_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$$

Siccome $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$ per $j = 2, .., m$, concludiamo che $c_2 = ... = c_m = 0$. Tornando alla relazione iniziale 5.4.1, vediamo che $c_1 v_1 = 0$ e quindi anche $c_1 = 0$. ■

Dal teorema precedente segue in particolare:

Teorema 5.4.2 *Se una matrice $n \times n$ (o un operatore di uno spazio vettoriale di dimensione n) ha n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Siano $v_1, ..., v_n$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ rispettivamente. Per il teorema precedente, gli n vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di autovettori. ■

Si noti che la condizione che gli autovalori siano distinti è sufficiente, ma non necessaria per la diagonalizzabilità, cioè una matrice può essere diagonalizzabile anche se possiede autovalori non tutti distinti fra loro. Esempio: la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

è diagonalizzabile (è anzi già diagonale) pur avendo autovalori non tutti distinti.

Esempio. Nel piano $\mathbb{R}^2$ sia S la simmetria rispetto alla bisettrice $x-y=0$, rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$. La matrice A ha due autovalori distinti $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Questo basta per dire che A è diagonalizzabile. Cerchiamo ora una base di autovettori. L'autospazio

$$V_{\lambda_1} = V_1 = \text{Ker } (A - I) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I)X = 0\}$$

relativo all'autovalore λ_1 è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Dunque $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = t(1, 1) \ \ t \in \mathbb{R}\}$.

Analogamente si trova $V_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = t(1, -1) \ \ t \in \mathbb{R}\}$. Allora una base di autovettori è, ad esempio, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$. Rispetto a tale base, la matrice che rappresenta la simmetria S è la matrice diagonale

$$A' = P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dove

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

è la matrice (del cambio di base) le cui colonne sono la base di autovettori scelti.

Esempio. Consideriamo la rotazione di $\pi/2$ attorno all'origine del piano $\mathbb{R}^2$, rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. La matrice A non ha autovalori reali (il polinomio caratteristico ha due radici distinte complesse $i, -i$) e quindi non è diagonalizzabile (sui reali).

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $(4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$ e quindi la matrice ammette un autovalore semplice $\lambda_1 = 4$ e un autovalore doppio $\lambda_2 = 1$. L'autospazio V_4 è la retta $L(0, 0, 1)$ e quindi ha dimensione 1; anche $V_1 = L(3, 0, -1)$ ha dimensione 1. Allora si riesce a trovare al piú due autovettori linearmente indipendenti e quindi la matrice A non è diagonalizzabile.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $(4-\lambda)(1-\lambda)^2$. La matrice ammette un autovalore semplice $\lambda_1 = 4$ e un autovalore doppio $\lambda_2 = 1$. L'autospazio $V_4 = L(0,0,1)$ ha dimensione 1. L'autospazio V_1 è il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+3z=0$, e quindi ha dimensione 2. Possiamo allora trovare tre autovettori linearmente indipendenti, uno relativo all'autovalore $\lambda_1 = 4$ e gli altri due relativi all'autovalore $\lambda_2 = 4$. Dunque esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice A e quindi A è diagonalizzabile.

Sia A una matrice e λ un suo autovalore. La *molteplicità algebrica* di λ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$. (Ad esempio, il numero 1 è radice doppia del polinomio $(\lambda-1)^2(\lambda-4)$, è radice di molteplicità tre di $(\lambda-1)^3(\lambda-2)$ eccetera. Più precisamente, si dice che un numero λ_0 è radice di molteplicità r di un polinomio $P(\lambda)$ se $P(\lambda) = (\lambda - x_0)^r Q(\lambda)$, dove $Q(\lambda)$ è un polinomio che non si annulla in λ_0.) Si dice invece *molteplicità geometrica* di un autovalore λ la dimensione dell'autospazio V_λ. Si dimostra che la molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale alla molteplicità algebrica. Un autovalore λ si dice *regolare* se la sua molteplicità geometrica è uguale alla sua molteplicità algebrica. Premesse queste definizioni, enunciamo, senza dimostrazione, una condizione necessaria e sufficiente perché una matrice, o un operatore, sia diagonalizzabile.

Teorema 5.4.3 *Sia A una matrice reale. Allora A è diagonalizzabile (sul campo reale) se e solo se:*

1) A ammette n autovalori reali;

2) ogni autovalore è regolare (cioè le sue molteplicità algebrica e geometrica coincidono).

Enunciamo anche un altro teorema che garantisce la diagonalizzabilità di un'importante classe di matrici, quelle simmetriche. Per tali matrici è garantita inoltre l'esistenza di una base di autovettori che sia ortonormale.

Teorema 5.4.4 *Sia A una qualunque matrice simmetrica reale di ordine n. Allora:*

1) Gli autovalori di A sono tutti reali;

2) Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali;

3) Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.

Per la dimostrazione di questo teorema, si veda il capitolo seguente.

Esempio. Si consideri la matrice simmetrica $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. I suoi autovalori sono 1 e 3. L'autospazio $V_1 = \text{Ker } (A - I)$ è costituito dai multipli del vettore $(1,1)$, mentre $V_3 = \text{Ker } (A - 3I)$ è costituito dai multipli del vettore $(1,-1)$. Si noti che i due autospazi sono ortogonali. Una base ortonormale di autovettori è, ad esempio, da $((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))$.

5.4.1 Esercizi

Esercizio 5.4.5 *Dire se il vettore* $v = \begin{vmatrix} -2 \\ -8 \end{vmatrix}$ *è autovettore della matrice* $A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$. *In caso affermativo, trovare l'autovalore.*

Soluzione. Abbiamo $Av = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \\ -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -58 \end{vmatrix}$. Il vettore v non è autovettore della matrice A, perché Av non è multiplo di v.

Esercizio 5.4.6 *Dire se* $v = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$ *è autovettore di* $A = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$. *In caso affermativo, trovare l'autovalore.*

Soluzione. $Av = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$. Poiché $Av = 0 = 0 \cdot v$, v è autovettore di A, relativo all'autovalore 0. In generale si noti che un qualunque vettore non nullo appartenente al nucleo di una matrice (o di un operatore) è autovettore relativo all'autovalore 0.

Esercizio 5.4.7 *Dimostrare che gli autovettori della matrice* $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ *sono esattamente tutti i multipli non nulli di* $(1, 0)$ *e che pertanto* A *non è diagonalizzabile.*

Esercizio 5.4.8 *Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: "Se due matrici quadrate* A, B *hanno lo stesso polinomio caratteristico e* A *è diagonalizzabile, allora anche* B *è diagonalizzabile. (Suggerimento: Si consideri* $A = I$ *e si tenga conto dell'esercizio 5.4.7).*

Esercizio 5.4.9 *L'operatore ortogonale rappresentato, rispetto a una base ortonormale, dalla matrice*

$$S = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{5.4.3}$$

è la simmetria ortogonale ripetto alla retta (passante per l'origine) generata dal vettore di coordinate $(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2})$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di S è $\lambda^2 - 1$, le cui radici sono $1, -1$. Siano v_1, v_2 autovettori relativi a 1 e -1: $Sv_1 = v_1$, $Sv_2 = -v_2$. Allora v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro. Infatti

$$v_1 \cdot v_2 = Sv_1 \cdot Sv_2 = v_1 \cdot (-v_2) = -(v_1 \cdot v_2)$$

da cui segue $v_1 \cdot v_2 = 0$. Allora la matrice S rappresenta un operatore lineare che lascia fissi i vettori della retta $L(v_1)$ e trasforma ogni vettore della retta $L(v_2)$, ortogonale a $L(v_1)$, nel proprio opposto. Dunque S rappresenta la simmetria ortogonale rispetto alla retta $s = L(v_1)$.

Per determinare infine l'asse di simmetria $s = L(v_1)$ (cioè l'autospazio relativo all'autovalore 1), si osservi che $S(1, 0) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Ne segue che l'asse di simmetria s è la bisettrice dell'angolo individuato dai vettori $(1, 0)$ e $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, vale a dire è la retta costituita dai multipli del vettore $(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2})$. ∎

Teorema 5.4.10 (Eulero) *Ogni matrice ortogonale di ordine tre con determinante uguale a 1 rappresenta una rotazione attorno a un asse (passante per l'origine).*

In termini più meccanici, ogni movimento rigido che fissa un punto è una rotazione attorno a una retta passante per quel punto.

Dimostrazione. Sia A una matrice che soddisfa le ipotesi del teorema. Dimostriamo che A ammette l'autovalore 1. Il polinomio caratteristico di A è di terzo grado e quindi ha necessariamente almeno una radice reale λ_1. Se le altre due radici λ_2 e λ_3 non sono reali, allora λ_1 deve essere positivo perché $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det A = 1$ e il prodotto delle radici λ_2 e λ_3, che sono complesse coniugate, è positivo. Del resto la lunghezza dei vettori non cambia, quindi se v è un autovettore relativo a λ_1, si ha

$$\|v\| = \|Av\| = \|\lambda_1 v\| = |\lambda_1|\ \|v\| \tag{5.4.4}$$

Si deduce $\lambda_1 = 1$. Se il polinomio caratteristico ha tre radici reali deduciamo (ancora da 5.4.4 che il loro valore assoluto è 1. I casi possibili sono $(1, 1, 1)$ oppure $(1, -1, -1)$, dato che il loro prodotto deve essere $\det A = 1$. Come si vede, in ogni caso la matrice A ha l'autovalore 1. Esiste dunque una retta, chiamiamola r, che viene fissata dalla matrice A. Sul piano ortogonale a questa retta l'operatore L_A induce una trasformazione rappresentata da una matrice ortogonale di ordine due con determinante 1 (Omettiamo i dettagli); sappiamo già che una tale trasformazione è una rotazione. La matrice A rappresenta allora una rotazione attorno alla retta r. ∎

Esercizio 5.4.11 *Sia* $A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Stabilire se A è diagonalizzabile per similitudine (sui reali).

b) Trovare una base per ogni autospazio di A.

Soluzione. *a)* Il polinomio caratteristico di A è $(1+\lambda)^2(\lambda-7)$. Gli autovalori sono: $\lambda_1 = -1$ (doppio) e $\lambda_2 = 7$. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$ è:

$$\begin{aligned} m.g.(-1) &= \dim\ker(A-(-1)I) \\ &= 3 - \mathrm{rk} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(nullità + rango)} \\ &= 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Poiché $m.g.(-1) = m.a.(-1)$, la matrice A è diagonalizzabile per similitudine (sui reali).

b) Per definizione, l'autospazio $V_{-1} = \mathrm{Ker}\ (A+I)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalla soluzioni del sistema omogeneo $(A+I)X = 0$. La matrice $A+I = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ha rango 1 e il sistema $(A+I)X = 0$ si riduce alla singola equazione $2x + z = 0$. Una base di V_{-1} è :

$$(0, 1, 0),\ (1, 0, -2).$$

Analogamente, l'autospazio $V_7 = \mathrm{Ker}\ (A - 7I)$ è rappresentato in forma cartesiana dalle equazioni:

$$\begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -8y = 0 \end{cases} . \tag{5.4.5}$$

Una base di V_7 è una qualunque soluzione non nulla di 5.4.5. Ad esempio, $(3, 0, 2)$.

Capitolo 6

Operatori autoaggiunti. Il teorema spettrale.

6.1 Operatori autoaggiunti

Ricordiamo alcune definizioni. Un *prodotto scalare definito positivo* o *prodotto interno* su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & \langle v, w \rangle \end{array}$$

che a ogni coppia di vettori (v, w) associa un numero reale $\langle v, w \rangle$, e che soddisfa le proprietà seguenti:

1. *Bilinearità.* La funzione che alla coppia di vettori (v, w) associa il numero $\langle v, w \rangle$ è lineare in entrambi i suoi argomenti. Esplicitamente:

   $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

   $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

   $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$

   $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

   comunque si scelgano $v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *Simmetria.* Per ogni v, w in V
$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

3. *Positività.*
$$\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{per tutti i vettori} \quad v \neq 0.$$

Uno *spazio vettoriale euclideo* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ consiste in uno spazio vettoriale V, dotato di un prodotto interno. Nel seguito, indicheremo un prodotto scalare indifferentemente come (v, w) o $\langle v, w \rangle$.

Un esempio di spazio vettoriale euclideo è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, insieme al prodotto scalare standard:

$$\langle X, Y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

dove $X = (x_1, ..., x_n)$ e $Y = (y_1, ..., y_n)$.

Sia V un fissato spazio vettoriale euclideo. Una base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ di V si dice *ortonormale* se

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Esercizio 6.1.1 *Siano $(x_1, ..., x_n)$ le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto a una base ortonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$:*

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Dimostrare che $x_i = \langle v, e_i\rangle$. A parole: la i-esima coordinata di un vettore v rispetto a una base ortonormale $(e_1, ..., e_n)$ è il prodotto scalare di v con e_i.

Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Un operatore[1] lineare $V \xrightarrow{L} V$ si dice *simmetrico*, o *auto-aggiunto, rispetto al fissato prodotto scalare*, se vale l'uguaglianza

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle \tag{6.1.1}$$

per ogni v, w in L.

Osservazione. Si noti che la nozione di operatore simmetrico è definita solo in relazione a un fissato prodotto scalare in V. In altri termini, se in V non è fissato un prodotto scalare, non ha senso dire che un operatore di V è simmetrico. Si potrebbe essere tentati di dire, erroneamente, che un operatore L di uno spazio vettoriale V (non euclideo) è simmetrico quando "è rappresentato da una matrice simmetrica", ma questa definizione non ha alcun senso. Infatti, la matrice che rappresenta un operatore di V può essere simmetrica oppure no, a seconda della base che si sceglie.

Il legame tra operatori simmetrici di uno spazio euclideo (finito-dimensionale) $(V, (\ ,\ ))$ e matrici simmetriche è il seguente:

Un operatore di uno spazio vettoriale euclideo (finito-dimensionale) $(V, (\ ,\ ))$ è simmetrico se e solo se la matrice che rappresenta L rispetto a una (e, quindi, rispetto a ogni) base ortonormale, è simmetrica.

Per la dimostrazione, si veda l'esercizio seguente.

Esercizio 6.1.2 *Sia $V \xrightarrow{L} V$ un operatore di uno spazio vettoriale euclideo $(V, (\ ,\ ))$.*

a) Dimostrare: Se L è auto-aggiunto, allora la matrice che rappresenta L rispetto a una qualunque base ortonormale $\mathcal{B}$ è simmetrica.

[1]Un *operatore* lineare - o, semplicemente, *operatore* - di uno spazio vettoriale V è un'applicazione lineare con dominio e codominio coincidenti con V.

b) Dimostrare: Sia $\mathcal{B}$ una fissata base ortonormale. Se la matrice A che rappresenta L rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica, allora L è auto-aggiunto.

(Suggerimento per a). Sia $A = (A_{ij})$ la matrice che rappresenta L rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$. Allora $A_{ij} = (Lv_j, v_i) = (v_j, Lv_i) = A_{ji}$.

Suggerimento per b). Si ha $A_{ij} = (Lv_j, v_i)$ e $A_{ji} = (v_j, Lv_i)$. Se A è simmetrica (cioè $A_{ji} = A_{ji}$), si ha allora $(Lv_j, v_i) = (v_j, Lv_i)$ per ogni i, j. Quindi, per bilinearità, $(Lv, w) = (v, Lw)$ per ogni v, w in V.)

6.1.1 Forme quadratiche

Sia $V \xrightarrow{L} V$ un operatore simmetrico. La funzione

$$V \xrightarrow{q} \mathbb{R} \qquad \forall v \in V \qquad q(v) = (Lv, v) \tag{6.1.2}$$

è detta la *forma quadratica associata a L.*

Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V. In tal modo, identifichiamo V con $\mathbb{R}^n$ mediante l'isomorfismo lineare $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che a ogni vettore v associa il vettore colonna $X = (x_1, ..., x_n)^t$ delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$. Sia A la matrice simmetrica che rappresenta L rispetto a $\mathcal{B}$. Diremo che A è la matrice che rappresenta la forma quadratica q rispetto a tale base. Nelle coordinate $(x_1, ..., x_n)$, la forma quadratica q si scrive allora

$$q(X) = (AX, X) \tag{6.1.3}$$

dove $(\ ,\ )$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$, o anche, in modo equivalente

$$q(X) = X^t AX \tag{6.1.4}$$

Esplicitamente,

$$q(X) = q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1,\ldots,n} a_{ij} x_i x_j \tag{6.1.5}$$

Le funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ del tipo 6.1.3 o, equivalentemente, del tipo 6.1.4 o 6.1.5, si dicono *forme quadratiche in n variabili reali, o su $\mathbb{R}^n$.* Dunque una forma quadratica in n variabili reali è un *polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili* $(x_1, ..., x_n)$.

Esempio. Consideriamo una matrice simmetrica 2×2

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \tag{6.1.6}$$

La forma quadratica associata ad A è la funzione di due variabili $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{q} \mathbb{R}$

$$q(X) = X^t AX \tag{6.1.7}$$

dove $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$. Esplicitamente

$$X^t AX = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \tag{6.1.8}$$

è un polinomio omogeneo di secondo grado in x_1, x_2.

6.1.2 Cambio di coordinate in una forma quadratica

È importante sapere come si trasforma la matrice che rappresenta una forma quadratica quando si cambia la base, ossia quando si opera un cambio di variabili.

Non è restrittivo mettersi in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con X il vettore colonna delle coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ e consideriamo la forma quadratica $q(X) = X^t AX$, con A matrice simmetrica $n \times n$. Scegliamo ora una nuova base $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ di $\mathbb{R}^n$ (non necessariamente ortonormale) e denotiamo con X' le coordinate rispetto a tale nuova base. In altri termini, operiamo il cambio di variabili

$$X = PX' \tag{6.1.9}$$

dove P è la matrice $n \times n$ invertibile le cui colonne sono le $\mathcal{B}$-coordinate dei vettori $e'_1, ..., e'_n$. Se nel polinomio omogeneo $X^t AX$ operiamo la sostituzione 6.1.9, otteniamo:

$$(PX')^t A(PX') = (X')^t (P^t AP)(X') \tag{6.1.10}$$

Quindi la matrice che rappresenta la stessa forma quadratica q nelle nuove coordinate X' (cioè rispetto alla nuova base $\mathcal{B}'$) è la matrice

$$A' = P^t AP \tag{6.1.11}$$

che è ovviamente simmetrica.[2] Se, in particolare, anche la base $\mathcal{B}'$ è ortonormale, allora la matrice P è ortogonale, vale a dire soddisfa l'uguaglianza $P^t = P^{-1}$. In tal caso la matrice che rappresenta la forma quadratica si trasforma *per similitudine*, o *per coniugio*, cioè nello stesso modo in cui si trasforma la matrice di un operatore lineare:

$$A' = P^t AP = P^{-1} AP \tag{6.1.12}$$

6.2 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti

Un'importante proprietà degli operatori autoaggiunti (=simmetrici) di uno spazio euclideo reale $(V, (\ ,\ ))$ è la seguente.

Teorema 6.2.1 (Teorema Spettrale) *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita con un prodotto scalare $(\ ,\ )$ e sia $V \xrightarrow{L} V$ un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di L.*

Esplicitiamo il contenuto di questo teorema. Se L è un operatore autoaggiunto su V, $\dim V = n$, allora:

1. L ha esattamente n autovalori reali $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (se contati con la relativa molteplicità).
2. Esistono n rette $V_1, ..., V_n$ (detti *assi principali* [3] di L) passanti per l'origine e a due a due *ortogonali* tra loro, tali che su ogni asse V_i, $i = 1, ..., n$, l'operatore L agisce come moltiplicazione per il fattore λ_i.

[2] Dimostrazione: $(P^t AP)^t = P^t A^t (P^t)^t = P^t AP$.

[3] Gli assi principali sono determinati in modo unico dall'operatore L se gli autovalori sono distinti tra loro.

Su ogni retta V_i, $i = 1, ..., n$, scegliamo un vettore unitario v_i. Allora $(v_1, ..., v_n)$ è una base ortonormale di autovettori di L. La matrice che rappresneta L rispetto a tale base ortonormale è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In modo equivalente, si può formulare il Teorema Spettrale in termini di matrici.

Teorema 6.2.2 (Teorema Spettrale: formulazione matriciale) *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora esiste una matrice $n \times n$ ortogonale P per la quale la matrice $P^{-1}AP = P^tAP$ è diagonale.*

Proviamo l'equivalenza delle due formulazioni.

a) 6.2.1 $\Longrightarrow$ 6.2.2 Sia A una qualunque matrice simmetrica e sia $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ l'operatore simmetrico di $\mathbb{R}^n$ (rispetto all'usuale prodotto scalare standard) rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice A. Il teorema spettrale 6.2.1 assicura che esiste una base ortonormale $(v_1, ..., v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di L. Sia P la matrice le cui colonne sono le coordinate di $v_1, ..., v_n$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Poiché le sue colonne costituiscono una base ortonormale, la matrice P è ortogonale (cioè $P^{-1} = P^t$). Allora la matrice che rappresenta L rispetto alla base $(v_1, ..., v_n)$ è la matrice $P^{-1}AP = P^tAP$, che ovviamente è diagonale, perché la base $(v_1, ..., v_n)$ è costituita da autovettori.

b) 6.2.2 $\Longrightarrow$ 6.2.1 Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V e sia A la matrice simmetrica che rappresenta L rispetto a tale base. Per il teorema 6.2.2 esiste una matrice ortogonale P per la quale la matrice $P^{-1}AP = A'$ è diagonale. Le colonne di P sono le coordinate, rispetto a $\mathcal{B}$, di una base ortonormale $\mathcal{B}' = (v_1, ..., v_n)$ di V. Il fatto che la matrice A' sia diagonale significa che i vettori $(v_1, ..., v_n)$ sono autovettori di L.

Dimostrazione del Teorema Spettrale 6.2.1. Per aiutare l'intuizione, supponiamo $\dim V = 3$, ma la stessa dimostrazione vale in dimensione arbitraria. Denotiamo con

$$q(X) = (LX, X), \qquad X \in V \tag{6.2.1}$$

la forma quadratica associata all'operatore L e con $S^2 = S^2(V)$ la sfera unitaria di V, cioè l'insieme di tutti i punti X di V tali che $\|X\| = 1$. Poiché la sfera S^2 è un insieme compatto (ossia chiuso e limitato) e la forma quadratica $S^2 \xrightarrow{q} \mathbb{R}$ è una funzione continua, esiste un vettore unitario $v_1 \in S^2$ nel quale la funzione q raggiunge il suo valore massimo, che denotiamo con λ_1:

$$\lambda_1 = q(v_1) \geq q(X) = (LX, X) \qquad \text{per ogni } X \text{ in } S^2. \tag{6.2.2}$$

Dimostriamo che v_1 è autovettore di L e che il relativo autovalore è λ_1. Sia w un qualunque vettore del piano tangente a S^2 nel punto v_1. Possiamo identificare tale piano con il sottospazio $W_1 = v_1^\perp$ di V costituito da tutti i vettori di V ortogonali a v_1. Sia

$$I \xrightarrow{C} S^2$$

una curva liscia sulla sfera, definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ contenente l'origine, che all'istante $t = 0$ passi per il punto $v_1 \in S^2$ con velocità w:

$$C(0) = v_1, \qquad C'(0) = w \tag{6.2.3}$$

Ad esempio, si può scegliere $C(t) = (\cos t)v_1 + (\sin t)w$. Per 6.2.2 la funzione

$$t \mapsto (q \circ C)(t) = (L\,C(t), C(t)) \tag{6.2.4}$$

ha un massimo nell'origine. Quindi la sua derivata si annulla in zero:

$$(q \circ C)'(0) = 0$$

La derivata $(q \circ C)'(t)$ è data da

$$\begin{aligned} (q \circ C)'(t) &= \frac{d}{d\,t}(L\,C(t), C(t)) \\ &= (L\,C'(t), C(t)) + (L\,C(t), C'(t)) \qquad \text{(per la regola di Leibniz)} \\ &= (C'(t), L\,C(t)) + (L\,C(t), C'(t)) \qquad \text{(perché } L \text{ è simmetrico)} \\ &= 2(L\,C(t), C'(t)) \end{aligned}$$

Dunque

$$0 = (q \circ C)'(0) = 2(L\,C(0), C'(0)) = 2(Lv_1, w)$$

e quindi Lv_1 è ortogonale a ogni vettore w ortogonale a v_1. Ne segue che Lv_1 è multiplo di v_1:

$$Lv_1 = hv_1 \tag{6.2.5}$$

per un opportuno $h \in \mathbb{R}$. Questo dimostra che v_1 è un autovettore di L, con autovalore h. Ma è facile vedere che tale autovalore h è uguale a λ_1. Infatti

$$\lambda_1 = q(v_1) = (Lv_1, v_1) = (hv_1, v_1) = h(v_1, v_1) = h \cdot 1 = h$$

perché v_1 è unitario.

Si vede facilmente che, come conseguenza della proprietà di essere autoaggiunto, l'operatore L trasforma il piano $v_1^{\perp} = W_1$ in se stesso. Infatti, se w è in W_1, si ha

$$(Lw, v_1) = (w, Lv_1) = (w, \lambda_1 v_1) = \lambda_1(w, v_1) = 0$$

e quindi $L(w)$ appartiene a W_1. Dunque la restrizione $W_1 \xrightarrow{L} W_1$ di L a W_1 è ancora un operatore simmetrico. Possiamo ripetere l'argomentazione di sopra. Denotiamo con $S^1 = S_{W_1}$ la circonferenza unitaria di W_1. Per il teorema di Weierstrass, la restrizione della forma quadra tica q a S^1 raggiungerà il suo valore massimo, diciamo λ_2, in punto v_2 di S^1. Argomentando come sopra, si dimostra che v_2 è un autovettore di L con autovalore λ_2. Ovviamente $\lambda_1 \geq \lambda_2$, perché il massimo di q sulla sfera è maggiore o uguale al massimo di q sulla circonferenza. Iterando il procedimento, arriviamo alla fine a considerare il sottospazio vettoriale W_2 costituito da tutti i vettori ortogonali sia a v_1 che a v_2. Tale sottospazio ha dimensione uno. Detto v_3 uno dei suoi due vettori unitari, sempre ragionando come sopra si ha che v_3 è autovettore di L:

$$Lv_3 = \lambda_3 v_3$$

Inoltre, poiché
$$q(v_3) = (Lv_3, v_3) = (\lambda_3 v_3, v_3) = \lambda_3(v_3, v_3) = \lambda_3$$
si ha $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. In questo modo abbiamo costruito una base ortonormale (v_1, v_2, v_3) di V costituita da autovettori dell'operatore L e il teorema è dimostrato. □

6.3 Proprietà di massimo e minimo degli autovalori di una matrice simmetrica

Scriviamo esplicitamente l'enunciato del teorema spettrale in termini di forme quadratiche.

Teorema 6.3.1 (Teorema Spettrale per forme quadratiche) *Sia q una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ che diagonalizza q. Questo significa che, dette $(x_1, ..., x_n)$ le coordinate rispetto a tale base, si ha*
$$q(x_1, ..., x_n) = \lambda_1(x_1)^2 + \cdots + \lambda_n(x_n)^2 \tag{6.3.1}$$

Non è restrittivo pensare che i coefficienti $\lambda_1, ..., \lambda_n$ siano ordinati in modo tale che
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

Si vede facilmente che λ_1 è il massimo della forma quadratica q sulla sfera unitaria
$$S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
di R^n.

Dimostrazione. Infatti, se $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, si ha
$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_1 x_n^2 \leq \lambda_1(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \lambda_1 \tag{6.3.2}$$
Queste disuguaglianze dimostrano che i valori che q assume su S^{n-1} sono tutti $\leq \lambda_1$. Inoltre, il valore λ_1 è effettivamente assunto da q su S^{n-1}, in quanto $\lambda_1 = q(1, 0, ..., 0)$. Ne segue che λ_1 è il massimo di q su S^{n-1}.

In modo analogo si dimostra che λ_2 è il massimo di q sulla sfera unitaria del sottospazio W_1 di $\mathbb{R}^n$ di equazione $x_1 = 0$; λ_3 è il massimo di q sulla sfera unitaria del sottospazio W_2 di $\mathbb{R}^n$ di equazioni $x_1 = x_2 = 0$ eccetera. [Esercizio]

Dualmente, valgono le analoghe proprietà di minimo, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio: λ_n è il minimo della forma quadratica q sulla sfera unitaria S^{n-1} di $\mathbb{R}^n$; λ_{n-1} è il minimo di q sulla sfera unitaria del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di equazioni $x_n = 0$; λ_{n-2} è il minimo di q sulla sfera unitaria del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di equazioni $x_n = x_{n-1} = 0$ eccetera.

Esercizio 6.3.2 *Dimostrare nei dettagli le proprietà di minimo e massimo dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ della forma quadratica in tre variabili*
$$q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$
dove $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

6.4 Esercizi

Negli esercizi seguenti, consideriamo $V = \mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale euclideo, rispetto al prodotto scalare standard. In $\mathbb{R}^n$, fissiamo la base (ortonormale) canonica $(e_1, ..., e_n)$.

Esercizio 6.4.1 *Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica su* $\mathbb{R}^2$

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$$

Esercizio 6.4.2 *Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica su* $\mathbb{R}^3$

$$q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.4.3 *Scrivere la forma quadratica su* $\mathbb{R}^3$ *associata alla matrice simmetrica*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 6.4.4 *Sia* $A = (a_{ij})$ *una matrice simmetrica* $n \times n$. *Allora, per ogni* $i, j = 1, ..., n$,

$$a_{ij} = e_i^t A e_j \tag{6.4.1}$$

Esercizio 6.4.5 *Trovare il massimo della forma quadratica* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

sulla circonferenza unitaria $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Esercizio 6.4.6 *Trovare il minimo e il massimo valore che la forma quadratica* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_3^2$$

assume sulla sfera unitaria S^2 *in* R^3.

Esercizio 6.4.7 (Forme quadratiche definite positive) *Sia* q *una forma quadratica su* $\mathbb{R}^n$, $q(X) = (AX, X)$ *per ogni* X *in* $\mathbb{R}^n$, A *matrice simmetrica. Si dice che* q *è* definita positiva *se* $q(X) > 0$ *per ogni* $X \neq 0$. *Dimostrare che* q *è definita positiva se e solo se gli autovalori di* A *sono tutti positivi.*

Analogamente, si dice che q *è* definita negativa *se* $q(X) < 0$ *per ogni* $X \neq 0$. *Si dimostri che* q *è definita negativa se e solo se gli autovalori di* A *sono tutti negativi.*

Esercizio 6.4.8 (Forme quadratiche semidefinite positive) *Sia* q *una forma quadratica su* $\mathbb{R}^n$, $q(X) = (AX, X)$ *per ogni* X *in* $\mathbb{R}^n$, A *matrice simmetrica. Si dice che* q *è* semidefinita positiva *se* $q(X) \geq 0$ *per ogni* X. *Dimostrare che* q *è semidefinita positiva se e solo se gli autovalori di* A *sono tutti maggiori o uguali a zero. Dare la definizione di forma quadratica* semidefinita negativa *e caratterizzare tali forme in termini di segni degli autovalori.*

Esercizio 6.4.9 (Forme quadratiche indefinite) *Una forma quadratica q su $\mathbb{R}^n$, $q(X) = (AX, X)$ per ogni X in $\mathbb{R}^n$, A matrice simmetrica. si dice* indefinita *se q assume sia valori positivi che valori negativi. Dimostrare che q è indefinita se e solo A ha sia autovalori positivi che autovalori negativi.*

Esercizio 6.4.10 (Forme quadratiche degeneri) *Sia $V \xrightarrow{L} V$ un operatore simmetrico e sia q la forma quadratica associata a L. Fissata una base ortonormale di V, sia A la matrice simmetrica che rappresenta q rispetto a tale base. La forma quadratica q si dice* degenere *se* $\det A = 0$. *Si dimostri che questa definizione è corretta, nel senso che non dipende dalla scelta della base. Dimostrare che q è degenere se e solo se nella segnatura di q compare almeno un autovalore nullo.*

Esercizio 6.4.11 *Di ciascuna delle seguenti forme quadratiche, si dica se è definita positiva, definita positiva, semidefinita positiva, semidefinita positiva, indefinita o degenere.*

$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2, \qquad q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2, \qquad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_3^2, \qquad q(x_1, x_2) = x_1^2$$

Appendice A

Esercizi

A.1 Tema 1

Vero o Falso?

1. *L'applicazione* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x$ *per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *è iniettiva.*

2. *Il vettore* $v = (0, 1)$ *è autovettore della matrice* $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. *Ogni sistema lineare di due equazioni in tre incognite rappresenta una retta di* $\mathbb{R}^3$.

4. *Se* A *è una matrice* $n \times n$ *e* $\operatorname{rk} A \leq n - 1$, *allora* $\det A = 0$.

5. *Siano* V *uno spazio vettoriale e* W *un sottoinsieme di* V *che non sia un sottospazio vettoriale. Allora esistono almeno due vettori* $w, w' \in W$ *la cui somma* $w + w'$ *non appartiene a* W.

Risposte

1. Falso. Ad esempio, i due punti distinti $(0, 0)$ e $(0, 1)$ hanno la stessa immagine: $F(0, 0) = 0 = F(0, 1)$.

2. Falso. Il prodotto della matrice A per il vettore (colonna) $v = (0, 1)$ è $(1, 0)$, che non è multiplo di v.

3. Falso. Ad esempio l'insieme delle soluzioni del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right.$ è l'insieme vuoto.

4. Vero. Se $\operatorname{rk} A \leq n - 1$, allora le n colonne di A sono linearmente dipendenti e quindi $\det A = 0$.

5. Falso. Ad esempio, il semipiano $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, però è chiuso rispetto alla somma, vale a dire, se w e w' appartengono a W, allora anche $w + w'$ appartiene a W.

Esercizi

Esercizio A.1.1 *Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice* $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1) *Scrivere (se esiste) un qualunque vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^3$ per il quale si abbia $T(w) = w$.*

2) *Trovare $Sol(A, b)$, dove* $b = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$.

3) *Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice A?*

4) *Dire se il vettore $(1, 3, 1)$ appartiene al sottospazio* $\mathrm{Im}\, T$.

Soluzione. 1) Un vettore w non nullo tale che $T(w) = w$ è un autovettore di T relativo all'autovalore 1. Dalla prima colonna di A, leggiamo che $\lambda = 1$ è autovalore della matrice A e un relativo autovettore è $w = (1, 0, 0)$.

2) $Sol(A, b) = \{(2, 0, 1)\}$.

3) L'operatore T ha tre autovalori distinti: $-1, 1, 2$. Questo è sufficiente per garantire che T è diagonalizzabile.

4) $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^3$, perché $\det A \neq 0$. In particolare $w = (1, 3, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\, T$.

Esercizio A.1.2 *Sia $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L(x, y) = (-x - y, x - y, x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

1) *Trovare* $\dim \mathrm{Im}\, L$.

2) *Trovare* $\ker L$.

3) *Fissate le basi $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ di $\mathbb{R}^2$ e*

$$\mathcal{C} = (e_1', e_2', e_3') = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)),$$

di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)$.

Soluzione. 1) La matrice che rappresenta L rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Allora $\dim \mathrm{Im}\, L = \mathrm{rk}\ A = 2$.

2) $\ker L = Sol(A, 0) = \{(0, 0)\}$.

3) Abbiamo:

$$e_1 = e_2', \quad e_2 = e_1', \quad e_3 = e_3',$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora:

$$\begin{array}{lllllll} T(1,0) & = & (-1,1,1) & = & -e_1 + e_2 + e_3 & = & e_1' - e_2' + e_3' \\ T(0,1) & = & (-1,-1,0) & = & -e_1 - e_2 & = & -e_1' - e_2'. \end{array}$$

Ne segue:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio A.1.3 *Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$ sono assegnati il punto $P = (0, 3, 4)$ e i due piani π e π' di equazioni $x - y - z - 1 = 0$ e $3x - y + z - 1 = 0$.*

1) *Scrivere equazioni parametriche per una retta passante per P e parallela a entrambi i piani π e π'.*

2) *Trovare la distanza del piano $x - y - z - 1 = 0$ dall'origine.*

Soluzione. 1) L'intersezione $\pi \cap \pi' = s$ è una retta di vettore di direzione $(1, 2, -1)$. La retta cercata deve essere parallela a s, e quindi ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

2) La distanza del piano $x - y - z - 1 = 0$ dall'origine è $1/\sqrt{3}$.

Esercizio A.1.4 *Motivando la risposta, si dica se la seguente proposizione è vera o falsa:* "Se A è una matrice quadrata di ordine n e $\det A = 0$, allora il sistema lineare $AX = 0$ ha almeno una soluzione non nulla.

Soluzione. L'affermazione è vera. Se $\det A = 0$, allora le colonne $A^1, ..., A^n$ della matrice A sono linearmente dipendenti. Esistono allora n numeri $c_1, ..., c_n$ non tutti nulli, tali che

$$c_1 A^1 + \cdots + c_n A^n = 0 \tag{A.1.1}$$

Questo equivale a dire che il vettore $(c_1, ..., c_n)$ è una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

Esercizio A.1.5 *Sia*

$$\mathcal{D} = \{A = (A_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A_{ij} = 0 \quad se \;\; i \neq j\}.$$

Motivando le risposte, si dica se le affermazioni seguenti sono vere o false.

1) *Per ogni $A \in \mathcal{D}$, A è invertibile.*

2) *Per ogni $A, B \in \mathcal{D}$, anche $AB \in \mathcal{D}$.*

Soluzione. 1) Falso. Per esempio, la matrice nulla appartiene a $\mathcal{D}$, ma non è invertibile.

2) Vero. Siano $A, B \in \mathcal{D}$ e $C = AB$. Se $i \neq j$, gli addendi della somma

$$C_{ij} \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{sj}$$

sono tutti nulli: infatti, se $s \neq i$, il numero $A_{is} = 0$ è zero, mentre se $s = i$ è $B_{ij} = 0$.

A.2 Tema 2

Vero o Falso?

1. *Denotiamo con I_n la matrice identità $n \times n$. Allora, per ogni n,* $\det(-I_n) = -1$.

2. *Se A, B sono matrici arbitrarie $n \times n$, allora* $\det(AB) = \det(BA)$.

3. *L'insieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0, y = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*

4. *L'angolo tra i vettori $v = (1, 0, 2)$ e $w = (0, 1, -1)$ è minore di un angolo retto.*

5. *Se x, y sono soluzioni di un sistema lineare non omogeneo, allora $x + y$ non è mai soluzione dello stesso sistema.*

Risposte

1. Falso. $\det(-I_n) = (-1)^n \det(I_n) = (-1)^n$.

2. Vero. Abbiamo

$$\det AB = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det BA.$$

($\det A$ e $\det B$ sono due *numeri* e quindi $(\det A)(\det B) = (\det B)(\det A)$).

3. Falso. U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *non omogeneo*, e quindi non è un sottospazio: ad esempio, non contiene il vettore nullo.

4. Falso. Basta calcolare il prodotto scalare $v \cdot w$: se tale numero è positivo, allora l'angolo è minore di un angolo retto; se invece è negativo, allora l'angolo è compreso tra un angolo retto e un angolo piatto. Nel nostro caso $v \cdot w = -2$, e quindi l'angolo tra v e W non è minore di un angolo retto.

5. Vero. Supponiamo che $x, y \in Sol(A, b)$ siano soluzioni di uno stesso sistema lineare non omogeneo, con matrice dei coefficienti A e termine noto $b \neq 0$. Questo significa che $Ax = b$ e $Ay = b$. Allora

$$A(x + y) = Ax + Ay = b + b = 2b \neq b$$

e quindi $x + y \notin Sol(A, b)$.

Esercizi

Esercizio A.2.1 *Siano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$ e*

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y - z = 0\}$.

1) *Trovare una base ortonormale del sottospazio vettoriale $U \cap W$.*

2) *Trovare* $\dim(U + W)$.

Soluzione. 1) Poiché il sottospazio $U \cap W$ è una retta passante per l'origine, una sua base è una qualunque soluzione non nulla del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ad esempio: $(-2, 1, 5)$. Una base ortonormale di $U \cap W$ è costituita dal vettore normalizzato

$$\frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 1, 5).$$

2) Per la formula di Grassmann,

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Esercizio A.2.2 *Sia $V = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$ lo spazio vettoriale delle matrici diagonali 3×3. Scrivere una base di V*

Soluzione. Una base di V è data dalle tre matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio A.2.3 *Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due e sia W il sottospazio generato dai polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x^2, \quad p_2(x) = -x^2, \quad p_3(x) = 2 + x^2.$$

Scrivere una base di W.

Soluzione. La matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

le cui righe sono le componenti di $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ rispetto alla base canonica $1, x, x^2$, ha rango due. Le prime due righe sono linearmente indipendenti; quindi una base di W è costituita, ad esempio, dai due polinomi $p_1(x) = 1 + x^2, p_2(x) = -x^2$.

Esercizio A.2.4 *Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, si considerino i punti $A = (1,0,1), B = (0,0,1), C = (0,1,1)$.*

1) *Dire se A, B, C sono allineati.*

2) *Scrivere un'equazione cartesiana di un piano contenente A, B e C.*

Soluzione. 1) I tre punti A, B, C non sono allineati, perché i vettori $B - A = (-1,0,0)$ e $C - A = (-1,1,0)$ non sono proporzionali.

2) Un'equazione cartesiana del piano contenente A, B e C è $z - 1 = 0$.

Esercizio A.2.5 *Sia r la retta di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

1) *Trovare un vettore di direzione di r.*

2) *Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per l'origine e ortogonale a r.*

Soluzione. 1) Un vettore di direzione di r è una qualunque soluzione non nulla del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ad esempio, $(0,1,1)$.

2) Esiste un unico piano passante per l'origine e ortogonale a r. Un'equazione cartesiana di tale piano è $y + z = 0$.

Esercizio A.2.6 *Sia* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$ *e sia* W *il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato dal vettore* $w = (1, 0, -2)$.

1) *Dire se l'unione* insiemistica $U \cup W$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^3$.

2) *Trovare* $\dim(U + W)$.

Soluzione. 1) Poiché il vettore $w = (1, 0, -2)$ appartiene a U, il sottospazio W è incluso in U; quindi $U \cup W = U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2) Poiché $W \subset U$, si ha $U + W = U$; quindi $\dim(U + W) = 2$.

Esercizio A.2.7 *Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:* "Non esiste alcuna matrice reale 2×2 antisimmetrica di rango 1.

Soluzione. L'affermazione è vera. Una matrice 2×2 antisimmetrica è del tipo

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$$

dove a è un qualunque numero reale. Se $a \neq 0$, allora $\det A = a^2 \neq 0$, e quindi $\mathrm{rk}\ A = 2$. Se invece $a = 0$, $\mathrm{rk}\ A = 0$.

A.3 Tema 3

Vero o Falso?

1. *Se* A *è una qualunque matrice ortogonale, allora* $|\det A| = 1$.

2. *Se* $V = \{A \in \mathcal{M}(3 \times 3) \mid A$ *diagonale*$\}$ *e* $L : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un'applicazione lineare iniettiva, allora* L *è suriettiva.*

3. *La matrice* $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ *è ortogonale.*

4. *Se* A *è una matrice* 3×2 *e* $\mathrm{rk}\ A = 1$*, allora il complemento ortogonale dello spazio generato dalle righe ha dimensione 1.*

5. *Se* A *è una matrice* 3×2 *e* $\mathrm{rk}\ A = 2$*, allora* $Sol(A, b) \neq \emptyset$ *per ogni* $b \in \mathbb{R}^3$.

Risposte

1. Vero. Se la matrice A è ortogonale, vale a dire se A è invertibile e $A^{-1} = {}^tA$, allora:

$$\begin{aligned} |\det A|^2 &= \det A \det A \\ &= \det A \det {}^tA \\ &= \det A \det A^{-1} \\ &= \det(AA^{-1}) \\ &= \det I \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pertanto $|\det A| = 1$.

2. Vero. Se X e Y sono spazi vettoriali di dimensione finita, $L : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione lineare e $\dim X = \dim Y$, allora L è suriettiva se e solo è iniettiva. Nel nostro caso $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

3. Falso. Una matrice è ortogonale quando ogni riga ha lunghezza 1 e due righe distinte sono ortogonali. La matrice A non soddisfa nessuna di queste due condizioni.

4. Vero. Se $\operatorname{rk} A = 1$, lo spazio W generato dalle righe di A è un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$. Pertanto il complemento ortogonale $W^{\perp}$ ha dimensione 1.

5. Falso. Il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A ha dimensione $2 (= \operatorname{rk} A)$. Per ogni vettore $b \in \mathbb{R}^3$ che non appartiene a W, il sistema $AX = b$ non ha soluzioni. Ad esempio, il sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

non ha soluzioni.

Esercizi

Esercizio A.3.1 *Siano L_A e L_B gli operatori di $\mathbb{R}^3$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle matrici*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

1) *Stabilire se l'operatore L_A è diagonalizzabile.*

2) *Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L_B; in caso affermativo, trovarne una.*

Soluzione. 1) La matrice A ha un autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 1; quindi non è diagonalizzabile.

2) La matrice B ha gli autovalori distinti $1, 3, -1$, e pertanto è diagonalizzabile. Una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L_B è ad esempio:

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, -2).$$

Esercizio A.3.2 *Scrivere una base dello spazio $Sol(A, 0)$, dove*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soluzione. Una base dello spazio $Sol(A, 0)$ è costituita dal vettore $(-1, 1, 1, 0)$.

Esercizio A.3.3 *Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(x, y) = (x - y, 0, 2x - 2y),$$

e sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$G(x, y, z) = (x, 0, x - z).$$

1) *Trovare una base di* $\operatorname{Im} F$.

2) *Trovare una base di* $\ker F$.

3) *Dette rispettivamente $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice $M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(G \circ F)$.*

Soluzione. 1) Una base di Im F è $(1,0,2)$.

2) Una base di $\ker F$ è $(1,1)$.

3) La matrice che rappresenta l'applicazione $G \circ F$ è

$$M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(G \circ F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio A.3.4 *In $\mathbb{R}^3$ si considerino le basi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$, dove*

$$e_1' = e_3, \quad e_2' = e_1 - e_2, \quad e_3' = e_2.$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore definito da:

$$F(e_1) = e_1 + e_2, \quad F(e_2) = e_3, \quad F(e_3) = 0.$$

1) *Trovare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.*

2) *Trovare $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F)$.*

3) *Sia v il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate, rispetto alla base $\mathcal{B}'$, sono $[v]_{\mathcal{B}'} = (1,0,1)$. Scrivere le coordinate $[v]_{\mathcal{B}}$ di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione. 1) Per trovare, ad esempio, la prima colonna di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$, scriviamo $F(e_1)$ come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3:

$$F(e_1) = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 :$$

la prima colonna è costituita dai coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Allo stesso modo troviamo le altre colonne:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Ricaviamo:

$$e_1 = e_2' + e_3', \quad e_2 = e_3', \quad e_3 = e_1'.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &F(e_1') = F(e_3) = 0 \\ &F(e_2') = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 = -e_1' + e_2' + 2e_3' \\ &F(e_3') = F(e_2) = e_3 = e_1'. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3) Poiché

$$v = e_1' + e_3' = e_3 + e_2,$$

abbiamo $[v]_{\mathcal{B}} = (0,1,1)$.

Esercizio A.3.5 1) *Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare che* $\ker F$ *è un sottospazio vettoriale di V.*

2) *Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Come sono definite le* coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$?

3) *Siano V uno spazio vettoriale reale e $F : V \longrightarrow V$ un operatore. Cosa si intende per* autovettore di F?

A.4 Tema 4

Vero o Falso?

1. *Il sottoinsieme $U = \{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & -b \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $M(2 \times 2)$ delle matrici 2×2.*

2. *Per ogni matrice quadrata A, vale l'uguaglianza* $\text{rk}\ (A^2) = (\text{rk}\ A)^2$.

3. *Se il sistema lineare $Ax = 0$ ha almeno due soluzioni distinte, allora ha infinite soluzioni.*

4. *Se $v_1, ..., v_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora la matrice che ha come colonne $v_1, ..., v_n$ è invertibile.*

5. *Sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B} = (e_3, e_2, e_1)$. Allora* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Risposte

1. Vero. U è chiuso rispetto alla somma di matrici e alla moltiplicazione per uno scalare. Infatti per ogni $X = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & -b \end{vmatrix} \in U$, per ogni $Y = \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & -d \end{vmatrix} \in U$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\text{i) } X + Y = \begin{vmatrix} (a+c) & (b+d) \\ 0 & -(b+d) \end{vmatrix} \in U$$

$$\text{ii) } \lambda X = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda a) & (\lambda b) \\ 0 & -(\lambda b) \end{vmatrix} \in U$$

Inoltre che $U \neq \emptyset$ (per esempio la matrice identicamente nulla appartiene ad U).

2. Falso. Controesempio: $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Abbiamo $A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\text{rk}\ (A^2) = 0$ mentre $(\text{rk}\ A)^2 = 1$.

3. Vero. Se x_1 e x_2 sono due soluzioni distinte del sistema $Ax = 0$ allora anche una loro qualunque combinazione lineare è soluzione. Infatti

$$\begin{aligned} A(\lambda x_1 + \mu x_2) &= A(\lambda x_1) + A(\mu x_2) \\ &= \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Vero. Se $v_1, ..., v_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$ le coordinate di tali vettori sono $v_1 = (1, 0, ..., 0)$, $v_2 = (0, 1, ..., 0)$, ... ,$v_n = (0, 0, ..., 1)$.

Pertanto la matrice che ha come colonne $v_1, ..., v_n$ è la matrice identitá che è ovviamente invertibile (la sua inversa coincide con se stessa).

5. Vero. $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$ è proprio la matrice che trasforma e_1 in e_3 (prima colonna di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$), e_2 in e_2 (seconda colonna di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$), e_3 in e_1 (terza colonna di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$).

Esercizi

Esercizio A.4.1 *Sia* $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a) Trovare gli autovalori reali di A.

b) Per ogni autovalore reale di A, scrivere una base del corrispondente autospazio.

c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori della matrice A?*

Soluzione. *a)* Il polinomio caratteristico di A è $\Phi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$. L'unico autovalore reale è $\lambda_1 = 1$.

b) Abbiamo $V_{\lambda_1} = V_1 = \ker(A - I) = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I)X = 0\ \}$. Quindi l'autospazio V_1 è costituito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0.$$

Una base di V_1 il vettore $(0, 0, 1)$.

c) Ovviamente non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A perché gli unici autovettori di A sono i multipli non nulli del vettore $(0, 0, 1)$.

Esercizio A.4.2 *Sia* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *una base di uno spazio vettoriale* V *e sia* $F : V \longrightarrow V$ *l'operatore definito da*

$$F(v_1) = v_1 + v_2 + v_3,\ F(v_2) = v_1 + v_2,\ F(v_3) = v_1.$$

a) Dire se F *è iniettivo.*

b) Scrivere $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

c) Sia $v = 2v_1 - v_2 + v_3$. *Scrivere le coordinate* $[F(v)]_{\mathcal{B}}$ *di* $[F(v)]$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.

b) Ricordiamo che se $F : V \longrightarrow V$ è una qualunque applicazione lineare e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V allora la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ si ottiene disponendo in colonna le coordinate, rispetto alla base $\mathcal{B}$, dei vettori $F(v_1),\ F(v_2),\ F(v_3)$. In questo caso otteniamo

$$\begin{array}{rcl} F(v_1) & = & (1, 1, 1) \\ F(v_2) & = & (1, 1, 0) \\ F(v_3) & = & (1, 0, 0) \end{array}$$

e pertanto

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

a) La matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ ha determinante diverso da zero. Quindi l'operatore F è iniettivo.

c)

$$[F(v)]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\,[v]_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Esercizio A.4.3 *a) Scrivere un vettore ortogonale al piano π di equazioni parametriche:*

$$x = s - t, \quad y = s, \quad z = 2t$$

b) Scrivere un'equazione parametrica di una retta passante per i punti $(1, 2, 1)$ *e* $(3, 1, 0)$

Soluzione. *a)* L'equazione cartesiana del piano π si ottiene per esempio, ricavando s e t dalla seconda e terza equazione e sostituendo tali valori nella prima (cioè in $x = s - t$). Otteniamo $2x - 2y + z = 0$. Pertanto, un vettore ortogonale al piano π è $(2, -2, 1)$

b) La retta passante per $A(1, 2, 1)$ e $B(3, 1, 0)$ ha equazione parametrica $X = A + (B - A)t$, cioè

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

A.5 Tema 5

Vero o Falso?

1. *Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V e* $\dim V = 3$*, allora (v_1, v_2, v_3) è una base di V.*

2. *Il sottoinsieme* $U = \{A \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale* $M(2 \times 2, \mathbb{R})$*.*

3. *Non esiste alcuna applicazione lineare iniettiva* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*.*

4. *Se A è una matrice quadrata e il sistema lineare $Ax = b$ ha almeno due soluzioni distinte, allora* $\det A = 0$.

5. *Se $A = (a_{ij})$ è una matrice e $a_{ij} = 1$ per ogni i, j, allora* $\operatorname{rk} A = 1$*.*

Risposte

1. Vero.

2. Falso. Il sottoisieme U non è chiuso rispetto alla somma di matrici: ad esempio le matrici

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

appartengono a U, perché $\det A = \det B = 0$, mentre $A + B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ non appertiene a U, perché $\det(A + B) = -1$.

3. Vero. Per il teorema nullità + rango:

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} F = 3 - \dim \operatorname{Im} F \geq 1$$

(perché $\dim \operatorname{Im} F \leq 2$), e quindi l'applicazione lineare F non è iniettiva. (Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se $\ker F = \{0\}$).

4. Vero. Se fosse $\det A \neq 0$, il sistema ammetterebbe l'unica soluzione $A^{-1}b$.

5. Vero. La dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe (o dalle colonne) di A è uguale a 1.

Esercizi

Esercizio A.5.1 *Sia r la retta di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ x - 4y - z = 1 \end{cases}$$

1) *Determinare un vettore di direzione di r.*

2) *Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ e ortogonale alla retta che contiene i punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$.*

Soluzione. 1) Un vettore di direzione della retta r è una qualunque soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vettore di direzione di r è, ad esempio, $(7, 1, 3)$.

2) Un vettore di direzione della retta che contiene i punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ è $B - A = (0, 1, 1)$; i piani ortogonali alla retta AB hanno equazione del tipo: $y+z+h = 0$, $h \in \mathbb{R}$. Un tale piano passa per il punto P(1,2,1) se $2 + 1 + h = 0$, cioè se $h = -3$. Il piano richiesto ha dunque equazione $y + z - 3 = 0$.

Esercizio A.5.2 *Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

1) *Scrivere una base del sottospazio* $\ker F$

2) *Scrivere una base del sottospazio* $\operatorname{Im} F$

Soluzione. 1) $\ker F$ è il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Risolvendo il sistema, troviamo

$$\ker F = \{(t, -4t, t), \quad t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -4, 1), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Una base di $\ker F$ è costituita, ad esempio, dal vettore $(1, -4, 1)$.

2) Il sottospazio $\operatorname{Im} F$ è generato dalle colonne di A e $\dim \operatorname{Im} F = 3 - \dim \ker F = 2$. Una base di $\operatorname{Im} F$ è allora costituita da due qualunque colonne linearmente indipendenti della matrice A; ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio A.5.3 1) *Sia* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica* $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ *di* $\mathbb{R}^3$, *dalla matrice*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1) *Scrivere la matrice che rappresenta* F *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} = ((0,1,0), (1,-1,0), (1,0,1)).$$

2) *L'operatore* F *ha almeno un autovettore reale?*

3) *Dire se la matrice* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ *è ortogonale.*

Soluzione. 1) La matrice di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

dove $Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è la funzione identità. Ora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(Le colonne sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$).

Per trovare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3})$, dobbiamo scrivere i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica in termini dei vettori della base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Partiamo da:

$$\begin{array}{lllll} v_1 & = & (0,1,0) & = & e_2 \\ v_2 & = & (1,-1,0) & = & e_1 - e_2 \\ v_3 & = & (1,0,1) & = & e_1 + e_3 \end{array}$$

Risolvendo rispetto a e_1, e_2, e_3, otteniamo:

$$\begin{array}{lll} e_1 & = & v_1 + v_2 \\ e_2 & = & v_1 \\ e_3 & = & -v_1 - v_2 + v_3 \end{array}$$

Ne segue:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otteniamo allora:

$$\begin{array}{lll} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) & = & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) \\ & = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

2) Il polinomio caratteristico di una qualunque matrice reale di ordine dispari ha sempre almeno una radice reale. Dunque l'operatore F ha almeno un autovalore reale e un autovettore reale.

3) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ non è ortogonale.

Esercizio A.5.4 *Scrivere una base dello spazio vettoriale* $Sol(A,0)$*, dove* $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

2) *Il sistema* $AX = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ *ha soluzioni?*

Soluzione. Si trova:

$$Sol(A,0) = \{(-2s+t, s, t, 4s-3t), \quad s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(-2,1,0,4) + t(1,0,1,-3), \quad s,t \in \mathbb{R}\}$$

Una base di $Sol(A,0)$ è costituita dai due vettori $(-2,1,0,4)$ e $(1,0,1,-3)$.

2) Il sistema $AX = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

non ha soluzioni, perché

$$\text{rk} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} < \text{rk} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

(Teorema di Rouché-Capelli).

Esercizio A.5.5 *Trovare* $Sol(A,0)$*, dove*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Soluzione. L'insieme delle soluzioni del sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

è

$$Sol(A,0) = \{(x_1, -2x_3, x_3, 0), \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

A.6 Tema 6

Vero o Falso?

1. *Non esistono sottospazi vettoriali* U, W *di* $\mathbb{R}^4$*, con* $\dim U = \dim W = 3$*, per i quali* $U + W = \mathbb{R}^4$*.*

2. *Fissato un qualunque vettore* $u \in \mathbb{R}^3$*, l'applicazione* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita, per ogni* $v \in \mathbb{R}^3$*, da* $F(v) = u \cdot v$ *(prodotto scalare) è lineare.*

3. *Sia* $A \in M(n \times n)$*. Se* $\det A = 0$*, allora per ogni* $b \in \mathbb{R}^n$ *il sistema* $AX = b$ *non è risolubile.*

4. *Se l'intersezione di due piani nello spazio affine* $\mathbb{R}^3$ *contiene un punto, allora contiene una retta.*

Risposte

1. Falso. Siano $U = L(e_1, e_2, e_3)$ e $W = L(e_1, e_2, e_4)$, dove (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Allora $\dim U = \dim W = 3$ e $U + W = \mathbb{R}^4$.

2. Vero. Occorre verificare:

$$\begin{array}{lll} a) & F(v+w) = F(v) + F(w) & \text{(additività di } F) \\ b) & F(\lambda v) = \lambda F(v) & \text{(omogeneità di } F) \end{array}$$

Infatti:

a) $F(v + w) = u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot v) = F(v) + F(w)$

b) $F(\lambda v) = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v) = \lambda F(v)$

3. Falso. Controesempio: se $b = 0$ il sistema $Ax = 0$ ha sempre la soluzione banale.

4. Vero.

Esercizi

Esercizio A.6.1 *Sia $D : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ l'operatore di derivazione e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$.*

a) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D)$.

b) L'operatore D è invertibile?

c) L'operatore D è diagonalizzabile?

Soluzione.

a) Una base di $\mathbb{R}_2[t]$ è $(1, t, t^2)$. Le colonne della matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D)$ sono le componenti, rispetto alla base $\mathcal{C}$, dei polinomi $D(1), D(t), D(t^2)$. Ora:

$$\begin{array}{lllll} D(1) & = & 0 & & \\ D(t) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ D(t^2) & = & 2t & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \end{array}$$

Pertanto:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

b) L'operatore D non è invertibile perché $\det M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D) = 0$.

c) Il polinomio caratteristico

$$det(\ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D) - \lambda\ I\ ) = -\lambda^3$$

ha l'unica radice $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 1. Pertanto D non è diagonalizzabile.

Esercizio A.6.2 *Sia π il piano di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x & = & 3s + t \\ y & = & -t + 1 \\ z & = & 2s + 2 \end{cases}$$

1) *Scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo a π e passante per l'origine.*

2) *Trovare un vettore normale a* π.

3) *Il punto* $P = (1, 2, 3)$ *appartiene a* π*?*

Soluzione.

1) Per determinare l'equazione cartesiana di π basta ricavare t ed s rispettivamente dalla seconda e terza equazione e sostituire tali valori nella prima. Si ottiene: $2x + 2y - 3z + 2 = 0$. Pertanto l'equazione cartesiana del piano parallelo a π e passante per l'origine è

$$2x + 2y - 3z = 0.$$

2) Un vettore normale a π è $(2, 2, -3)$.

3) Il punto P non appartiene al piano π perché le sue coordinate (1,2,3) non soddisfano l'equazione del piano.

Esercizio A.6.3 *Sia*

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z - t = 0,\ z + t = 0,\ y + 2z = 0\}.$$

1) *Scrivere una base per* U.

2) *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato dai vettori*

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\quad e_2 = (0, 1, 0, 0),\quad e_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Stabilire se $U + W = \mathbb{R}^4$.

Soluzione.

1) Per definizione, il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (di tre equazioni in quattro incognite):

$$\begin{cases} y + z - t = 0 \\ z + t = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$\begin{aligned} U &= \{(u, 2v, -v, v),\quad u, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(1, 0, 0, 0) + v(0, 2, -1, 1),\quad u, v \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Una base di U è $(1, 0, 0, 0), (0, 2, -1, 1)$.

3) Poiché $\dim(U \cap W) = 1$, dalla formula di Grassmann ricaviamo:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Quindi $U + W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio A.6.4 *Sia*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Trovare una soluzione non nulla del sistema $AX = 0$.

Soluzione. Posto $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$ il sistema $AX = 0$ si scrive

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$Sol(A,0) = \{(s,0,0,0), \quad s \in \mathbb{R}\}$$

Una soluzione non nulla è $(1,0,0,0)$.

A.7 Tema 7

Vero o Falso?

1. *Per ogni coppia di vettori v, w dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, se v è multiplo di w, allora $dist(v,w) = 0$.*

2. *Se $(v_1, ..., v_n)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, allora $a_i = v \cdot v_i$, per ogni $i = 1, ..., n$.*

3. *Le coordinate di $v = (-1, 0)$ rispetto alla base $(1,1), (2,1)$ di $\mathbb{R}^2$ sono $(-1,-1)$.*

4. *Siano $v_1 = (2,2,2)$, $v_2 = (2,2,0)$, $v_3 = (3,0,0)$. Allora il vettore $(10,2,4)$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.*

5. *Se v e w sono autovettori distinti di un operatore T relativi allo stesso autovalore λ, allora $v - w$ è autovettore relativo all stesso autovalore λ.*

Risposte

1. Falso.

2. Vero.

3. Falso.

4. Vero. I tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi generano $\mathbb{R}^3$: ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

5. Vero. Dall'ipotesi $Tv = \lambda v$ e $Tw = \lambda w$, segue $T(v - w) = \lambda(v - w)$. Dunque il vettore $v - w$ è autovettore relativo all'autovalore λ.

Esercizi

Esercizio A.7.1 *Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad e \quad \mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,-1,0),(2,1,1))$$

1) *Le coordinate di un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ sono $(2,4,-1)$. Trovare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

2) *Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)$ dell'identità $id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ (nel dominio) e $\mathcal{B}$ (nel codominio).*

Soluzione. 1) Le coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(4/3, -11/3, 1/3)$.

2)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id) = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & -1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}$$

Esercizio A.7.2 *Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^3$*:*
$U = L(1, 2, 3)$*,* $W = L(0, 1, 0)$*.*
1) *Trovare* $\dim (U + W)^{\perp}$*.*
2) *Scrivere un vettore non nullo di* $(U + W)^{\perp}$*.*

Soluzione. 1) Poiché $\dim (U + W) = 2$, si ha $\dim (U + W)^{\perp} = 1$.

2) Un vettore non nullo di $(U + W)^{\perp}$ è $(3, 0, -1)$.

Esercizio A.7.3 *Sia* T *l'operatore di* $\mathbb{R}^3$ *definito da*

$$T(e_1) = e_2, \;\; T(e_2) = e_2, \;\; T(e_3) = 0.$$

((e_1, e_2, e_3) *è la base canonica di* $\mathbb{R}^3$*) e sia* $S = 3\, id_{\mathbb{R}^3}$*.*

Trovare le matrici $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T \circ S)$ *e* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(S \circ T)$*.*

Soluzione. Poiché $T \circ S = S \circ T = 3T$, si ha:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T \circ S) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(S \circ T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(3T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio A.7.4 *Siano* $P = (1, 3, -2)$*,* $Q = (1, -1, -2)$*.*
1) *Scrivere equazioni parametriche della retta passante per* P *e* Q*.*
2) *Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per* Q *e ortogonale alla retta* PQ*.*
3) *Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per i punti* P*,* Q *e per l'origine* $O = (0, 0, 0)$*.*

Soluzione. 1) Equazioni parametriche della retta passante per $P = (1, 3, -2)$ e $Q = (1, -1, -2)$ sono

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = -2 \end{cases}$$

2) Un'equazione cartesiana di un piano passante per Q e ortogonale alla retta PQ è $y + 1 = 0$.

3) Un'equazione cartesiana di un piano passante per i punti P, Q e per $(0, 0, 0)$ è $2x + z = 0$.

Esercizio A.7.5 *Si considerino i tre piani:*

$$2x + y - z = 0, \;\; -2x + 5y - 2z = 3, \;\; 4y + hz = 1.$$

Trovare i valori di h *per i quali l'intersezione dei tre piani è un punto.*

Soluzione. L'intersezione dei tre piani è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x + 5y - 2z = 3 \\ 4y + hz = 1 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\left| \begin{array}{rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & h & 1 \end{array} \right|$$

Riducendo a scala, si ottiene, ad esempio, la matrice

$$A' = \left| \begin{array}{rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2+h & -1 \end{array} \right|$$

Da questa matrice leggiamo che l'intersezione dei tre piani è un punto per ogni $h \neq -2$.

Indice analitico

additività, 31
applicazione
  lineare, 31
automorfismo, 35
autospazio, 110
autovalore, 110
  regolare, 116
autovettore, 110

base, 15
  cambio di, 40
  diagonalizzante, 112
  ortonormale, 74

cambio
  di base, 40
combinazione
  lineare, 12
complemento ortogonale, 75
completa
  matrice, 53
componenti
  di un vettore, 16
coordinate
  di un vettore, 16

determinante, 97
  di un operatore, 101
dimensione, 18
  di $Sol(A, b)$, 55
  di un sottospazio affine, 53
dipendenti
  vettori, 13
direzione, 53
disuguaglianza
  di Schwarz, 81
  triangolare, 82

eliminazione
  di Gauss, 56
endomorfismo lineare, 31
equazione
  caratteristica, 113
  cartesiana di un piano, 65
equazioni
  cartesiane di una retta, 66
  parametriche di un piano, 66
  parametriche di una retta, 66
equivalenti
  sistemi, 52
Eulero
  teorema di, 118

fascio
  di piani, 68

immagine
  di un'applicazione lineare, 45
incidenti
  sottospazi, 54
inversa
  di un'applicazione lineare, 34
  di una matrice, 26
isometria
  lineare, 76
isomorfismo, 34

Laplace
  sviluppo di, 99
lunghezza, 74

matrice
  a scala, 18
  antisimmetrica, 23
  associata a un'applicazione lineare, 38
  completa, 53
  dei coefficienti, 51
  inversa, 26
  invertibile, 26
  ortogonale, 76

simmetrica, 23
trasposta, 23
matrici
coniugate, 40
simili, 40
minore
complementare, 99
molteplicità
algebrica, 116
geometrica, 116

norma, 74
nucleo
di un'applicazione lineare, 45
di una matrice, 45
nullità
di un'applicazione lineare, 46

omogeneità, 31
omogeneo
sistema, 52
operatore, 31
diagonalizzabile, 112
ortogonale, 76
operatore lineare, 31
operazioni
elementari sulle righe, 18
ortogonalità
tra vettori, 74

parallelepipedo, 104
paralleli
sottospazi, 54
parallelismo, 54
tra sottospazi affini, 54
perpendicolarità
tra vettori, 74
pivot, 59
polinomio
caratteristico, 113
prodotto
di matrici, 25
di un numero per una matrice, 11
interno, 73
interno standard di $\mathbb{R}^n$, 73
proiezione
ortogonale su un sottospazio, 86
ortogonale su una retta, 79

rango, 19
di un'applicazione lineare, 46
di una matrice, 46
per colonne, 19
per righe, 19
rette
incidenti, 70
sghembe, 70
rotazione
nel piano, 78
rotazioni
nel piano, 78
nello spazio, 117
Rouché-Capelli
teorema di, 53

segno di una permutazione, 98
sghembi
sottospazi, 54
simili
matrici, 40
sistema
lineare, 51
omogeneo, 52
risolubile, 52
sistemi
equivalenti, 52
somma
di matrici, 10
di sottospazi vettoriali, 43
somma diretta, 44
sostegno
di un fascio, 68
sottospazi
incidenti, 54
paralleli, 54
sghembi, 54
sottospazio
vettoriale associato a un sottospazio affine, 53
affine, 53
vettoriale, 14
spazio
vettoriale, 8
spazio vettoriale
euclideo, 73
sviluppo

di Laplace, 98

teorema
di Eulero, 118
di Pitagora, 80
di Rouché-Capelli, 53
nullità+rango, 46
trasposta
di una matrice, 23

varietà
affine, 53
vettore
delle coordinate, 16
di direzione, 67
unitario, 74