FUNZIONI

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[0]Nome file: funzioni_2015_def.tex

1 Funzioni

Definizione 1.1 (Funzione)**.** *Una* funzione f *da* A *in* B *consiste di:*

1. *un insieme* A *detto* dominio *della funzione;*
2. *un insieme* B *detto* codominio *della funzione;*
3. *una* regola o azione f *che assegna ad* ogni *elemento* a *del dominio un* unico *elemento* b *del codominio.*

L'elemento b si chiama *immagine* di a tramite f e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: "f di a"). Si scrive

$$A \xrightarrow{f} B$$

(oppure $f : A \longrightarrow B$) per denotare una funzione f il cui dominio è A e il cui codominio è B.

Definizione 1.2 (Immagine di una funzione)**.** *Si chiama immagine* Im f *della funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *il sottoinsieme del codominio*

$$\text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A \;\; f(x) = y\}$$

Definizione 1.3 (Controimmagine)**.** *Si consideri la funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *e un elemento* b *del codominio. Si chiama* controimmagine di b mediante f *(e si scrive "*$f^{-1}(b)$*") il sottoinsieme di* A *così definito*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

L'insieme $f^{-1}(b)$ si chiama anche *fibra di f sull'elemento b.* Esso può essere formato da uno o più elementi oppure coincidere con l'insieme vuoto.
Una funzione per la quale il dominio sia uguale al codominio, si chiama *endofunzione.*

Funzione identità.
Per ogni insieme A, esiste una particolare endofunzione, detta *funzione identità* di A che si denota con la scrittura:

$$A \xrightarrow{1_A} A$$

La funzione identità di A è definita nel modo seguente: il dominio e il codominio di 1_A sono l'insieme A stesso e

$$1_A(x) = x$$

per ogni elemento x in A.

1.1 Composizione di funzioni

Se f e g sono due funzioni per le quali *il codominio di f coincide con il dominio di g*, ossia

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora si può costruire una nuova funzione $g \circ f$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

definendo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

per ogni x in A.
Si può visualizzare la situazione con il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Si noti che la funzione composta $g \circ f$ non è sempre definita: è definita soltanto quando il codominio di f coincide con il dominio di g.

1.2 Proprietà della composizione di funzioni

Valgono inoltre le leggi seguenti:

LEGGI D'IDENTITA'. *Se* $A \xrightarrow{f} B$*, allora*

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f \tag{1.1}$$

Dunque commutano i diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

LEGGE ASSOCIATIVA. *Se*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

allora

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.2}$$

Dunque per la legge dell'associatività, il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

La legge associativa permette di tralasciare la parentesi e scrivere semplicemente $h \circ g \circ f$.

1.3 Funzioni invertibili o isomorfismi

Definizione 1.4 (Funzione invertibile)**.** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* invertibile *(o un* isomorfismo *dall'insieme* A *all'insieme* B*) se esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *per cui risulti:*

$$g \circ f = 1_A \quad e \quad f \circ g = 1_B$$

Una tale funzione g *(se esiste) si chiama* funzione inversa *di* f*.*

Se $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile la sua inversa è unica. Vale infatti il seguente

Teorema 1.5. *Sia* $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione invertibile. Se* $B \xrightarrow{g} A$, $B \xrightarrow{g'} A$ *sono* entrambe *inverse di* f *allora* $g = g'$*.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
g = {} & g \circ 1_B && \text{(definizione di funzione identitá)} \\
= {} & g \circ (f \circ g') && \text{(g' è l'inversa di f)} \\
= {} & (g \circ f) \circ g' && \text{(proprietá associativa della composizione di funzioni)} \\
= {} & 1_A \circ g' && \text{(g è l'inversa di f)} \\
= {} & g' && \text{(definizione di funzione identitá).}
\end{aligned}$$

Se $A \xrightarrow{f} B$ ha inversa, allora l'inversa (che è unica) si denota con il simbolo f^{-1}.

Definizione 1.6. *Si dice che due insiemi* A *e* B hanno la stessa cardinalità *(o che* sono isomorfi*) se esiste una funzione invertibile (un isomorfismo)* $A \xrightarrow{f} B$*.*

Teorema 1.7. *Siano* $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *funzioni invertibili. Allora* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *è invertibile e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Dimostrazione.
Per definizione di inversa, per dimostrare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ si deve provare che

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z$$

e

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_X.$$

Ora

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_Z.\end{aligned}$$

Analogamente si prova $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$.

1.4 Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Definizione 1.8 (Funzione iniettiva)**.** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* iniettiva *se soddisfa la seguente proprietà di* unicità : ogni elemento $b \in B$ ha al più una controimmagine in A.
In altri termini, f è iniettiva se vale una delle due seguenti proprietà tra loro equivalenti

$$(i) \quad \forall a_1, a_2 \in A \qquad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

$$(ii) \quad \forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Quindi, una funzione $A \xrightarrow{f} B$ iniettiva associa a elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio.

Definizione 1.9 (Funzione suriettiva)**.** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* suriettiva *se soddisfa la seguente proprietà di* esistenza*:* ogni elemento di $b \in B$ possiede almeno una controimmagine in A, cioè

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \mid f(a) = b.$$

In altre parole f è se suriettiva se

$$\text{Im } (f) = B$$

Definizione 1.10 (Funzione biunivoca)**.** *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* biunivoca *(o bigettiva) se è iniettiva e suriettiva.*

Proposizione 1.11. *Sia* $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione da un insieme* $A \neq \emptyset$ *a un insieme* B. *Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f *è iniettiva;*

(ii)) f *ha un'inversa sinistra, cioè esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *(non necessariamente unica) per la quale* $g \circ f = 1_A$.

Dimostrazione.

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Si deve trovare una $B \xrightarrow{g} A$ in modo tale che $g \circ f = 1_A$. Per ogni $b \in B$, si definisce $g(b)$ nel modo seguente:
se $b \in Im(f)$, esiste, per ipotesi, *esattamente un* $a \in A$ per il quale $f(a) = b$; si pone allora per definizione $g(b) = a$;
se invece $b \notin Im(f)$, si definisce $g(b) \in A$ in modo del tutto arbitrario: per esempio, si sceglie un elemento $a_0 \in A(\neq \emptyset)$ e per ogni $b \in B$, $b \notin Im(f)$, si pone $g(b) = a_0$.
Allora è facile vedere che $g \circ f = 1_A$. Naturalmente di inversa sinistra ne può esistere più d'una.

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Per ogni $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Dunque f è iniettiva.

Proposizione 1.12. *Sia* $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione da un insieme* A *a un insieme* B. *Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f *è suriettiva;*

(ii)) f *ha un'inversa destra, cioè esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *(non necessariamente unica) per la quale* $f \circ g = 1_B$.

Dimostrazione.

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Si deve trovare una $B \xrightarrow{g} A$ in modo tale che $f \circ g = 1_B$. Per ogni $b \in B$, si definisce $g(b)$ nel modo seguente: $b \in Im(f)$, perchè f è suriettiva per ipotesi. Quindi esiste, *almeno un* $a \in A$ per il quale $f(a) = b$; si pone allora per definizione $g(b) = a$ (per ogni b in B la scelta dell'elemento a può essere fatta in almeno un modo).
Allora è facile vedere che $f \circ g = 1_B$. Naturalmente di inversa destra ne può esistere più d'una.

$(ii) \Rightarrow (i)$
$f \circ g = 1_B$ per ipotesi. Allora per ogni $b \in B$ $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b$; esiste dunque un elemento $a = g(b) \in A$ per il quale $f(a) = b$; di conseguenza f è suriettiva. ∎

Proposizione 1.13. *Siano A, B insiemi. Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ è biunivoca se e solo se è invertibile*

Prima dimostrazione.

$$A \xrightarrow{f} B \text{ biunivoca}$$
$$\Updownarrow$$
$$A \xrightarrow{f} B \text{ iniettiva e suriettiva}$$
$$\Updownarrow$$
$$A \xrightarrow{f} B \text{ ha un'inversa sinistra e un'inversa destra}$$

Siano $B \xrightarrow{g_1} A$ e $B \xrightarrow{g_2} A$ rispettivamente un'inversa sinistra e un'inversa destra di f

$$g_1 \circ f = 1_A \qquad \text{e} \qquad f \circ g_2 = 1_B$$

Allora g_1 e g_2 coincidono, infatti

$$\begin{array}{rcll} g_1 & = & g_1 \circ (f \circ g_2) & \\ & = & (g_1 \circ f) \circ g_2 & \text{proprietà associativa} \\ & = & 1_A \circ g_2 & \text{definizione di inversa sinistra} \\ & = & g_2 & \text{legge d'identità} \end{array}$$

Quindi esiste una funzione $g(= g_1 = g_2)$ che è contemporaneamente inversa sinistra e inversa destra di f. Pertanto $A \xrightarrow{f} B$ è invertibile. ∎

Seconda dimostrazione.
f biunivoca $\Rightarrow$ f invertibile.
f è suriettiva cioè per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ per il quale $f(x) = y$; essendo f anche iniettiva l'elemento x trovato è unico. Quindi è ben definita la funzione, chiamiamola $B \xrightarrow{g} A$, che a ogni y in B associa l'unico x in A per il quale $f(x) = y$. Pertanto, per ogni y in B, $f(g(y)) = y$, cioè $f \circ g = 1_B$. D'altra parte, per il modo stesso in cui g è definita, per ogni $x \in A$, vale $g(f(x)) = x$, cioè $g \circ f = 1_A$. Quindi f è invertibile.
f invertibile $\Rightarrow$ f biunivoca.

Per ipotesi esiste la funzione inversa di f, chiamiamola $B \xrightarrow{g} A$.
f è iniettiva. Infatti se per ogni $x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2)$, applicando la funzione g, si ottiene $g(f(x_1) = g(f(x_2))$, vale a dire $x_1 = x_2$ perchè $g \circ f$ è l'identità di A.
f è suriettiva. Infatti, sia y in B. Poichè $f \circ g = 1_B$, si ha $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Posto $g(y) = x$ si ottiene $y = f(x)$. ∎

Proposizione 1.14. *Siano $A(\neq \emptyset), B, C$ insiemi e $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ funzioni. Allora valgono le seguenti proposizioni*

(a) *f, g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva.*

(b) *f, g suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva.*

(c) *$g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva.*

(d) *$g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow g$ suriettiva.*

Dimostrazione.
(a) 1^a *Dimostrazione.* Una funzione (con dominio non vuoto) è iniettiva se e solo se ha un'inversa sinistra (proposizione 1.11). Siano allora $B \xrightarrow{h} A$ e $C \xrightarrow{k} B$ inverse sinistre rispettivamente di f e g: questo significa che $h \circ f = 1_A$ e $k \circ g = 1_B$. Allora

$$
\begin{aligned}
(h \circ k) \circ (g \circ f) &= h \circ (k \circ g) \circ f && \text{(proprietà associativa delle funzioni)} \\
&= h \circ 1_B \circ f && (k \text{ è inversa sinistra di } g) \\
&= h \circ f && \text{(legge d'identità)} \\
&= 1_A && (h \text{ è inversa sinistra di } f)
\end{aligned}
$$

Questo prova che $h \circ k$ è un'inversa sinistra di $g \circ f$, e quindi che $g \circ f$ è iniettiva. ∎

(a) 2^a *Dimostrazione.* Per ogni $x_1, x_2 \in A$:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\iff g(f(x_1)) = g(f(x_2)) && \text{(definizione di } g \circ f) \\
&\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) && (g \text{ è iniettiva}) \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2 && (f \text{ è iniettiva})
\end{aligned}
$$

Questo prova che $g \circ f$ è iniettiva ∎

(b) *Dimostrazione.* Una funzione è suriettiva se e solo se ha un'inversa destra (proposizione 1.12). Siano allora $B \xrightarrow{h} A$ e $C \xrightarrow{k} B$ inverse destre rispettivamente di f e g: questo significa che $f \circ h = 1_B$ e $g \circ k = 1_C$. Allora

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (h \circ k) &= g \circ (f \circ h) \circ k && \text{(proprietà associativa delle funzioni)} \\
&= g \circ 1_B \circ k && (h \text{ è inversa destra di } f) \\
&= g \circ k && \text{(legge d'identità)} \\
&= 1_A && (k \text{ è inversa destra di } g)
\end{aligned}$$

Questo prova che $h \circ k$ è un'inversa destra di $g \circ f$, e quindi che $g \circ f$ è suriettiva. ∎

(c) 1^a *Dimostrazione.* Per ipotesi $g \circ f$ è iniettiva, quindi ha un'inversa sinistra (Teorema 1.11). Questo significa che esiste $C \xrightarrow{h} A$ per la quale $h \circ (g \circ f) = 1_A$. Per l'associatività della composizione di funzioni:

$$1_A = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Ma allora $h \circ g$ è un'inversa sinistra di f, e pertanto f è iniettiva. ∎

(c) 2^a *Dimostrazione.* Per ogni $x, x' \in X$:

$$\begin{array}{ccccc}
f(x_1) & = & f(x_2) & & \\
& \Downarrow & & & \\
g(f(x_1)) & = & g(f(x_2)) & & \\
& \Updownarrow & & & \\
(g \circ f)(x_1) & = & (g \circ f)(x_2) & & \\
& \Updownarrow & & & (g \circ f \text{ è iniettiva}) \\
x_1 & = & x_2 & &
\end{array}$$

Questo prova che f è iniettiva.
(d) *Dimostrazione.* Per ipotesi $g \circ f$ è suriettiva, quindi ha un'inversa destra (Teorema 1.12). Questo significa che esiste $C \xrightarrow{h} A$ per la quale $(g \circ f) \circ h = 1_C$. Per l'associatività della composizione di funzioni:

$$1_C = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

Ma allora $f \circ h$ è un'inversa destra di g, e pertanto g è suriettiva. ∎

1.5 Due diversi impieghi delle funzioni

Le funzioni vengono utilizzate im moltissime situazioni; qui si descrivono due impieghi molto frequenti del concetto di funzione.

Primo aspetto. Classificare il dominio mediante una proprietà.

Sia $X \xrightarrow{g} B$ una funzione da un insieme X a un insieme B. La controimmagine di $b \in B$ tramite g è il sottoinsieme (del dominio) definito da $g^{-1}\{b\} = \{x \in X \mid g(x) = b\}$

La funzione $X \xrightarrow{g} B$ può essere pensata come *una famiglia di sottoisiemi* del dominio

$$g^{-1}\{b\}, \quad b \in B$$

indiciata con gli elementi del codominio.

Se nessuna fibra è vuota (cioè se g è suriettiva), si dice che $\{g^{-1}\{b\}\}_{b\in B}$ è una *partizione* di X.

Esempio.

Si consideri la funzione $\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \{0, 1\}$,

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } z \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si può pensare a g come alla partizione di $\mathbb{Z}$ nelle due fibre

$$g^{-1}\{0\} = \{\text{numeri pari}\}, \qquad\qquad g^{-1}\{1\} = \{\text{numeri dispari}\}$$

Secondo aspetto. Nominare il codominio.

Sia $A \xrightarrow{f} X$ una funzione da un insieme A a un insieme X.

La funzione $A \xrightarrow{f} X$ può essere pensata come *una famiglia di elementi di* X 'etichettata' dagli elementi di A. In altre termini, per ogni a in A si può scrivere f_a al posto di $f(a)$. Allora la funzione $A \xrightarrow{f} X$ può essere pensata come una famiglia $\{f_a\}_{a\in A}$ di elementi del codominio indiciata dal dominio.

Esempio. Una successione di numeri reali $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è una famiglia (infinita) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali indiciata da $\mathbb{N}$:

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \dots, f_n, \dots$$

Esempio. Se $A = \{1, 2, 3, \dots n\}$ e $X = \{a, b, c, \dots, z\}$ è l'alfabeto della lingua italiana, allora la funzione $A \xrightarrow{f} X$ è una parola di lunghezza n.

Anche in questo caso si è portati a vedere una parola f come una famiglia di elementi del codominio X (vale a dire una famiglia di lettere dell'alfabeto) indiciata da A.

1.6 Funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Definizione 1.15 (Grafico di una funzione)**.** *Sia $A \xrightarrow{f} B$ una funzione. Il grafico G_f di f è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$*

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

Esempio. Il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ così definito

$$G_{\cos} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \cos x\}$$

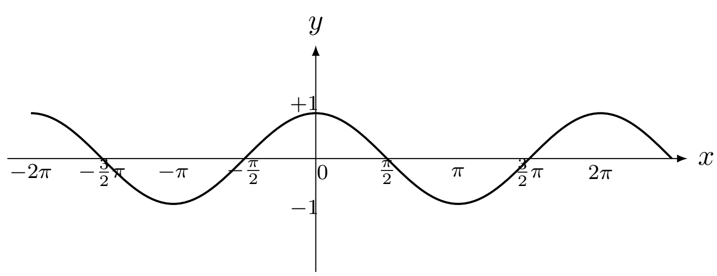

Figura 1: Grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione *non* invertibile. In molti casi è possibile restringere opportunamente dominio e codominio di f in modo tale da avere una funzione invertibile (iniettiva e suriettiva). Per esempio $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ non è invertibile mentre $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ lo è. La funzione inversa del coseno

$$[-1, 1] \xrightarrow{\cos^{-1}} [0, \pi]$$

è la funzione *arcocoseno* (si scrive *arcos*).

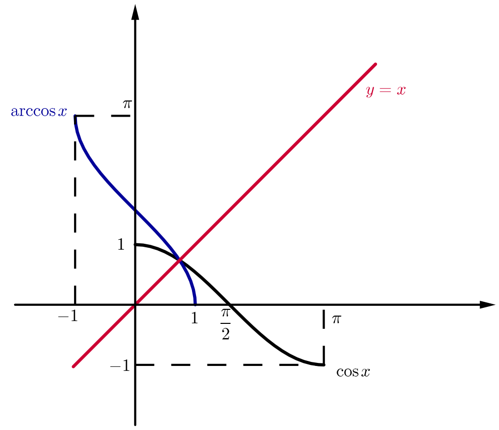

Figura 2: Grafico di $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$ (in nero); grafico di $[-1, 1] \xrightarrow{\text{arcos}} [0, \pi]$ (in blu).

Il grafico $G_{f^{-1}}$ di f^{-1} è il simmetrico di G_f rispetto alla retta $y = x$.

Definizione 1.16 (Zeri di una funzione). *Si consideri il sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ e la funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Gli* zeri di f *sono gli elementi $x \in D$ per i quali risulta*

$$f(x) = 0$$

Gli zeri di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con l'asse x.

Definizione 1.17 (Punti fissi di una funzione). *Si consideri il sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ e la funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$. I* punti fissi di f *sono gli elementi $x \in D$ per i quali risulta*

$$f(x) = x$$

I punti fissi di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con la retta di equazione $y = x$ (bisettrice primo-terzo quadrante).

Definizione 1.18 (Funzione pari). *La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$* è pari *se vale la proprietà*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x)$$

Se f è pari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 0$ (asse y).
La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ è pari, sono funzioni pari tutte le funzioni polinomiali del tipo $p(x) = a_{2n}x^{2n} + \dots a_2x^2 + a_0$ (cioè i polinomi in cui compaiono esclusivamente esponenti pari).

Definizione 1.19 (Funzione dispari). *La funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *è* dispari *se vale la proprietà*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x)$$

Se f è dispari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani.
La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$ è dispari, sono funzioni dispari tutte le funzioni polinomiali del tipo $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots a_3x^3 + a_1x$ (cioè i polinomi in cui compaiono esclusivamente esponenti dispari).

Dalle simmetrie delle funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ si deduce la simmetria della funzione prodotto $h = fg$ (attenzione, $h = fg$ indica il prodotto puntuale di funzioni e non la loro composizione). Si ha:

1. Se f e g sono pari allora fg è pari
2. Se f e g sono dispari allora fg è pari
3. Se f è pari e g è dispari allora fg è dispari

Le precedenti proposizioni sono riassunte nella seguente tabella (la loro dimostrazione, molto semplice, è lasciata per esercizio).

	f pari	*f dispari*
g pari	fg pari	fg dispari
g dispari	fg dispari	fg pari

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Per ognuna delle seguenti funzioni*

(a) *si disegni il grafico qualitativo.*

(b) *si dica se la funzione è iniettiva, suriettiva, invertibile.*

(c) *se la funzione è invertibile si determini dominio, codominio e l'espressione analitica della funzione inversa. Infine, si disegni il grafico della funzione inversa.*

1. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$ $\quad f(x) = x^2$
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad f(x) = x^2$
3. $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$
5. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$
6. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{x}$
7. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2\cos x$
8. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3\sin 2x$
9. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
10. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
11. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad f(x) = |x|$
12. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$
13. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ $\quad f(x) = 2^x$
14. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2^x$
15. $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log_2 x =$ *logaritmo in base* 2 *di* x

$\boxed{R}$

Esercizio 2.2. *La funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2 - 5x$ *è iniettiva? è suriettiva? Trovare, se esistono, gli zeri di* f.

R

Esercizio 2.3. *Trovare l'immagine* $\mathrm{Im}\, f$ *e il numero di punti fissi della funzione*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - 3$$

Interpretare, servendosi del grafico del grafico della funzione, i punti fissi di f.

R

Esercizio 2.4. *Si considerino le funzioni*

$$\begin{array}{lll} 1. & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0} & f(x) = 3x + 2 \\ 2. & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{\geq 0} & g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$, $\mathrm{Im}\,(f \circ g)$.

R

Esercizio 2.5. *Sia* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ *per ogni* x *in* $\mathbb{R}$.

1. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* $f \circ f = f$.
2. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$(= *identità di* $\mathbb{R}$).
3. *Determinare i valori di* a *e* b *per i quali* f *è invertibile.*
4. *Studiare, al variare di* a *e* b, *l'esistenza dei punti fissi di* f.

R

Esercizio 2.6. *Sia*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \; f(x) = mx + q$$

Per quali valori di $m, q \in \mathbb{R}$ *la funzione* f *è pari? Per quali valori è dispari?*

R

Esercizio 2.7. *Se* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è pari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è dispari. Cosa si può dire delle funzioni composte* $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$? *Sono pari, dispari, né pari né dispari? Motivare le risposte.*

R

Esercizio 2.8. *Si considerino le funzioni*

$$\begin{array}{lll} 1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f(x) = x - 1 \\ 2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} & g(x) = 3^x \end{array}$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$, $\mathrm{Im}\,(f \circ g)$.

R

Esercizio 2.9. *La funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$ *è iniettiva? suriettiva? Come si può restringere opportunamente dominio e codominio in modo da ottenere una funzione invertibile? In tal caso, come si chiama l'inversa?*

R

Esercizio 2.10 (Galileo)**.** *Dimostrare che l'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ..\}$ *ha la stessa cardinalità dell'insieme* $S = \{0, 1, 4, ..., n^2, ..\}$ *dei 'quadrati perfetti'. (Si dice che due insiemi* X*,* Y hanno la stessa cardinalità *se esiste una funzione invertibile (un isomorfismo)* $f : X \longrightarrow Y$*.)*

R

Esercizio 2.11. *La funzione* $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$ *è iniettiva? suriettiva? invertibile? Se è invertibile come si chiama l'inversa? Qual è il suo grafico?*

R

Esercizio 2.12. *Trovare il dominio massimale* D *in* $\mathbb{R}$*, il grafico qualitativo e l'immagine delle funzioni* $D \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ *le cui leggi sono*

1. $y = |sinx|$
2. $y = 2|x| - 1$
3. $y = \arctan x$
4. $y = 2^{|x|}$
5. $y = |\log x|$

6. $y = e^x + 1$

7. $y = e^{|x|}$

R

Esercizio 2.13. *Siano* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *due funzioni.*
Se f *e* g *sono entrambe pari che cosa si può dire sulla loro somma?*
Se f *è pari e* g *è dispari che cosa si può dire sulla loro somma?*

R

Esercizio 2.14. *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{R}$ *per i quali la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f_k} \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = x + k|x|$$

è invertibile. Tracciare un grafico di f_k *e quando esiste di* $(f_k)^{-1}$.

R

Esercizio 2.15. *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$. *Determinare*

1. *il dominio massimale* D *di* f *in* $\mathbb{R}$.

2. *l'immagine* $\operatorname{Im} f$ *di* f.

R

Esercizio 2.16. *Tracciando grafici di opportune funzioni trovare le soluzioni in* $\mathbb{R}$ *della disequazione*

$$1 - |x| > \sqrt{2 + x}$$

R

Esercizio 2.17. *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{x + 2}$. *Scrivere sotto forma di intervalli, il segno di* f.

R

Esercizio 2.18. *Sia* $\mathbb{R} \setminus \{3\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 2}{3 - x}$. *Trovare la controimmagine* $f^{-1}([1, +\infty)$.

R

2.1 Suggerimenti e risposte

Esercizio 2.1
Per ognuna delle seguenti funzioni

(a) Verificare la correttezza delle risposte utilizzando un software che disegni grafici, per esempio "Geogebra".

(b) e (c) Per verificare iniettività, suriettività e invertibilità è utile utilizzare i grafici trovati al punto precedente.

	iniettiva	suriettiva	invertibile	funzione inversa
1. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^2$	sì	no	no	
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$	no	sì	no	
3. $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, f(x) = \dfrac{1}{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^3$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
5. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = x^2$
6. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = x^3$
7. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 2\cos x$	no	no	no	
8. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 3\sin 2x$	no	no	no	
9. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$	no	no	no	
10. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \dfrac{1}{x-1}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
11. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \lvert x \rvert$	no	sì	no	
12. $\mathbb{R} \setminus \{1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$
13. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, f(x) = 2^x$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
14. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 2^x$	sì	no	no	
15. $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$	sì	sì	sì	$f^{-1}(x) = a^x$

Il dominio e codominio della funzione inversa f^{-1} (quando esiste) è rispettivamente il codominio e dominio di f.

Esercizio 2.2 f non è iniettiva, non è suriettiva. Gli zeri di f sono $x = 0$ e $x = 5$.

Esercizio 2.3 Im $f = [-3, +\infty)$. La funzione f ha esattamente due punti fissi; per convincersene basta intersecare il grafico di f con la retta di equazione $y = x$.

Esercizio 2.4 $[-\frac{2}{3}, +\infty) \xrightarrow{g\circ f} \mathbb{R}, g \circ f(x) = \sqrt{3x+2}$.

$[0, +\infty) \xrightarrow{g\circ f} \mathbb{R}, f \circ g(x) = 3\sqrt{x} + 2$.
Im $(g \circ f) = [0, +\infty)$.
Im $(f \circ g) = [2, +\infty)$.

Esercizio 2.5
1) $(a = 0, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$,
2) $(a = -1, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$,
3) $a \neq 0$, 4)$a \neq 1$.

Esercizio 2.6
f è pari per $m = 0$ e $\forall q$; f è dispari $\forall m$ e $q = 0$.

Esercizio 2.7
$f \circ g$ è pari, $g \circ f$ è pari, $f \circ f$ è pari, $g \circ g$ è dispari.

Esercizio 2.8
$\mathbb{R} \xrightarrow{g\circ f} \mathbb{R},\ g \circ f(x) = 3^{x-1}$.
$\mathbb{R} \xrightarrow{f\circ g} \mathbb{R},\ f \circ g(x) = 3^x - 1$.
Im $(g \circ f) = (0, +\infty)$.
Im $(f \circ g) = (-1, +\infty)$.

Esercizio 2.9
La funzione $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{f} [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ è invertibile. La sua inversa è

$$[-1, 1] \xrightarrow{f^{-1}} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}],\ f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Esercizio 2.10
È facile verificare che la funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} S,\ f(n) = n^2$ è un isomorfismo (funzione invertibile). Pertanto gli insiemi $\mathbb{N}$ e S hanno la stessa cardinalità .

Esercizio 2.11
La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$ è iniettiva, suriettiva e quindi invertibile. La sua inversa è $\mathbb{R} \xrightarrow{\tan^{-1}} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $\tan^{-1}(x) = \arctan x$.

Esercizio 2.12

Esercizio 2.13
Se f e g sono pari allora $f+g$ è pari, infatti:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Se f è pari e g è dispari allora $f+g$ non è né pari, né dispari; per esempio $f(x) = x^2$ è pari, $g(x) = x$ è dispari e la funzione somma $(f+g)(x) = x^2 + x$ non è né pari, né dispari.

Esercizio 2.14

Esercizio 2.15 Deve essere $\cos x - 1 \geq 0$, ossia $x = 2k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Pertanto il dominio massimale di f in $\mathbb{R}$ è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2k\pi \; k \in \mathbb{N}\}$$

L'immagine $\operatorname{Im} f$ di f è costituita dal solo elemento zero: $\operatorname{Im} f = \{0\}$.

Esercizio 2.16

Esercizio 2.17

Esercizio 2.18
Per determinare $f^{-1}([1, +\infty)$ occorre risolvere la disequazione $\frac{x+2}{3-x} \geq 1$ che è equivalente a $\frac{2x-1}{3-x} \geq 0$. Le soluzioni sono $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$.