Funzioni esponenziali e logaritmiche.

Mauro Saita.

e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria.

Febbraio 2014

Indice

1 Esponenziali

Il modello matematico che meglio rappresenta il fruire continuo del tempo è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Tuttavia, molti fenomeni fisici e chimici vengono studiati effettuando osservazioni a intervalli di tempo prefissati. Se ad esempio si vuole analizzare il moto di un corpo che si muove lungo un piano inclinato è possibile effettuare una prima indagine sperimentale rilevando le distanze percorse dal corpo in questione dopo intervalli di tempo regolari, diciamo dopo intervalli di un secondo. In tal modo è come se, dopo ogni intervallo di tempo di un secondo, si effettuasse una 'fotografia' del fenomeno in questione allo scopo di registrare i dati sperimentali. Quel che si fa in questi casi è *discretizzare il tempo*.

1.1 Funzioni esponenziali con dominio $\mathbb{Z}$

Negli esercizi che seguono si mostrano alcuni problemi che si possono studiare ricorrendo a funzioni del tipo

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, \quad f(n) = k \cdot a^n$$

con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ $(a \neq 1)$ e $k \in \mathbb{R}$ opportunamente fissati. Tali funzioni sono dette *progressioni geometriche di valore iniziale* k *e ragione* a.

[0]Nome file: 'explog-2014.tex'

Esercizio 1.1 (**Dicotomia cellulare**). *In determinate condizioni, dopo un intervallo di tempo T una cellula si suddivide dando origine a due nuove cellule. Queste, dopo uno stesso intervallo di tempo T, si suddividono nuovamente dando origine a quattro nuove cellule e così via.*

1. *Schematizzare questo processo mediante un'opportuna successione numerica.*
2. *Se il tempo necessario per una suddivisione cellulare è di due giorni e il processo ha inizio da un'unica cellula, quante sono le cellule risultanti dal processo dicotomico dopo 30 giorni?*

Esercizio 1.2 (**Decadimento radioattivo**). *Le sostanze radioattive 'decadono' progressivamente trasformandosi in altre sostanze. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto* 'tempo di dimezzamento' *cioè il tempo necessario affinchè si dimezzi il numero di atomi di una certa sostanza radioattiva.*

1. *Schematizzare il processo di decadimento radioattivo mediante un'opportuna successione numerica.*
2. *Dopo quanti* 'tempi di dimezzamento' *una certa quantità di sostanza radioattiva si riduce a meno di $\frac{1}{4}$, a meno di $\frac{1}{100}$, a meno di $\frac{1}{1000}$ della quantità iniziale?*

Suggerimento: assumere come unità di misura dei tempi il 'tempo di dimezzamento' e indicare con $k(0)$ il numero di atomi di sostanza radioattiva presenti all'inizio del processo e con $k(n)$ il numero di atomi di sostanza radioattiva presenti dopo n 'tempi di dimezzamento'.

Esercizio 1.3. *Nella seguente tabella sono riportati i tempi di dimezzamento di alcune sostanze radioattive*

Isotopi radioattivi	*Struttura chimica*	*Tempi di dimezzamento*
Azoto	^{13}N	10 *minuti*
Carbonio	^{14}C	5730 *anni*
Iodio	^{131}I	$8,05$ *giorni*
Ossigeno	^{15}O	124 *secondi*
Uranio	^{238}U	$4,5 \cdot 10^9$ *anni*

Calcolare il tempo necessario affinchè una data quantità di ciascuno dei sopra elencati isotopi si riduca a meno del 25% e a meno del 1%.

Suggerimento: approssimare le risposte mediante multipli interi dei tempi di dimezzamento.

Esercizio 1.4 (**Datazione di sostanze organiche**). *Un metodo molto usato per stabilire l'età di sostanze organiche di origine animale o vegetale, si basa sulla determinazione della concentrazione del carbonio ^{14}C (per concentrazione si intende il rapporto tra la quantità dell'isotopo ^{14}C e la quantità di carbonio presente nella sostanza).*

Il metodo si fonda sui seguenti due fatti

1) Gli organismi vissuti nel passato avevano, al tempo della loro vita, la stessa concentrazione di ^{14}C che si può riscontrare negli analoghi organismi viventi al giorno d'oggi.

2) Dopo la morte dell'organismo non si verifica più alcun apporto di nuovo ^{14}C che comincia a diminuire progressivamente a causa del decadimento radioattivo. La quantità complessiva di carbonio presente nell'organismo in esame rimane praticamente inalterata nel tempo.

Determinare con ragionevole approssimazione le età di due reperti per i quali la concentrazione di ^{14}C è risultata rispettivamente del 12% *e dello* $0,2\%$ *rispetto a quella di analoghi organismi viventi. (Il tempo di dimezzamento del carbonio ^{14}C è di* 5730 *anni).*

Esercizio 1.5. *In una coltura batterica sono presenti inizialmente* 10^4 *batteri. Il loro numero raddoppia ogni* 36 *minuti.*

1. *Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo* 24 *ore?*
2. *Dopo quanto tempo il numero di batteri nella coltura sarà pari al* 25% *della quantità finale?*

Esercizio 1.6. *Si dice che l'inventore del gioco degli scacchi chiese come ricompensa per la sua geniale scoperta chicchi di grano: uno per il primo quadrato della scacchiera, due per il secondo, quattro per il terzo, otto per il quarto e così via fino al sessantaquattresimo (ed ultimo) quadrato della scacchiera. Sapendo che* 1.000 *chicchi pesano circa* $37,5$ *g calcolare*

1. *il peso, espresso in tonnellate, della quantità di grano corrispondente al sessantaquattresimo quadrato della scacchiera ($1\ t = 10^3\ kg$);*
2. *il peso, espresso in tonnellate, della quantità* totale *di grano pretesa dall'inventore.*

Una progressione geometrica $n \mapsto k \cdot a^n$ si può estendere all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi ponendo

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

In questo modo si ottiene la funzione $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(z) = k \cdot a^z$. Posto $k = 1$ si ottiene la seguente corrispondenza:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & +3 & \dots \\ \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \dots & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & a & a^2 & a^3 & \dots \end{array}$$

Il rapporto tra un qualunque termine della progressione e quello immediatamente precedente è sempre uguale ad a.

Esercizio 1.7. *Stabilire quali delle seguenti quaterne di numeri sono termini consecutivi di una progressione numerica (cioè quali dei seguenti gruppi di quattro numeri fanno parte di una successione del tipo $k \cdot a^n$). Infine, trovare la* ragione *di ogni progressione geometrica.*

a) 2 7 12 17

b)	$0,5$	5	50	500
c)	4	2	1	$0,5$

1.2 Funzioni esponenziali con dominio $\mathbb{Q}$

Un problema interessante è il seguente

Problema 1.8. *Trovare una funzione* $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ *per la quale*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

In altri termini, trovare una funzione con dominio $\mathbb{Q}$ *e codominio* $\mathbb{R}_{>0}$ *che trasforma* somme in prodotti.

Soluzione. Se la funzione cercata deve trasformare somme in prodotti allora l'unica arbitrarietà che abbiamo consiste nello stabilire l'immagine da attribuire al numero 1. Posto $f(1) = a$, con a numero reale positivo[1], ogni altra immagine $f(x)$ con $x \neq 1$ è determinata dalla condizione di dover trasformare somme in prodotti. Mostriamo che la funzione cercata è la funzione esponenziale $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = a^x$. Se $f(1) = a$ il valore che f può associare a 2 è uno solo, infatti $f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = a^2$. Allo stesso modo si mostra che

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1)f(1)\dots f(1) = a^n$$

Per quanto riguarda le immagini secondo f di numeri razionali abbiamo

$$a = f(1) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ addendi}}\Big) = \underbrace{f\big(\frac{1}{n}\big)f\big(\frac{1}{n}\big)\dots f\big(\frac{1}{n}\big)}_{n \text{ fattori}} = (f(\tfrac{1}{n}))^n \text{ e quindi } f(\tfrac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}.$$

$$f(\tfrac{k}{n}) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ addendi}}\Big) = \underbrace{f\Big(\frac{1}{n}\Big)f\Big(\frac{1}{n}\Big)\dots f\Big(\frac{1}{n}\Big)}_{k \text{ fattori}} = a^{\frac{k}{n}}.$$

Esercizio 1.9. *Verificare che la funzione esponenziale* $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = a^x$ *è strettamente crescente per* $a > 1$ *e strettamente decrescente per* $0 < a < 1$.

Esercizio 1.10. *In una coltura batterica sono presenti inizialmente* 10^5 *batteri. Il loro numero raddoppia ogni* 2 *ore e* 50 *minuti. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo* 24 *ore?*

[1] Il fatto che a sia un numero reale positivo è, ancora una volta, conseguenza del fatto che f trasforma somme in prodotti: $f(1) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = (f(\frac{1}{2}))^2$.

1.3 Funzioni esponenziali con dominio $\mathbb{R}$

Nella precedente sezione si è mostrato che, posto $f(1) = a$, l'unica funzione $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ che trasforma somme di numeri razionali in prodotti di numeri reali positivi è la funzione esponenziale $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = a^x$. In un secondo tempo (Esercizio 1.9) si è verificato che tale funzione è strettamente crescente per $a > 1$ e strettamente decrescente per $0 < a < 1$.

Nel caso di funzioni esponenziali di dominio $\mathbb{R}$ (e codominio $\mathbb{R}_{>0}$) vale un risultato analogo

Teorema 1.11. *Esiste un'unica funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ con le seguenti proprietà*

1. $f(1) = a$ *con* $a > 1$
2. *Per ogni* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
3. f *è strettamente crescente*

Tale funzione è la funzione esponenziale di base a

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0},\ f(x) = a^x.$$

Con ovvie varianti, vale un risultato analogo per il caso $0 < a < 1$. Quando si vuole estendere la funzione esponenziale a tutta la retta reale (dominio $\mathbb{R}$) la proprietà che f sia strettamente crescente non è più conseguenza del fatto che "f trasforma somme in prodotti" ma deve essere imposta tra le proprietà che caratterizzano la funzione esponenziale stessa.

Di solito la funzione esponenziale si denota con il simbolo $\exp_a$:

$$\exp_a(x) = a^x$$

Esercizio 1.12.
1. *In un opportuno sistema di riferimento disegnare i grafici delle funzioni*
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}_{>0}$$
Distiguere i casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.
2. *La funzione esponenziale $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}_{>0}$ con $a > 1$ è strettamente crescente. Che cosa significa? Scrivere la definizione in termini precisi.*
3. *La funzione esponenziale $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}_{>0}$ con $0 < a < 1$ è strettamente decrescente. Che cosa significa? Scrivere la definizione in termini precisi.*
4. *Utilizzando un grafico opportuno trovare $\lim_{x\to+\infty} a^x$, $\lim_{x\to-\infty} a^x$.*
5. $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}_{>0}$ *è iniettiva, suriettiva, invertibile . Spiegare.*

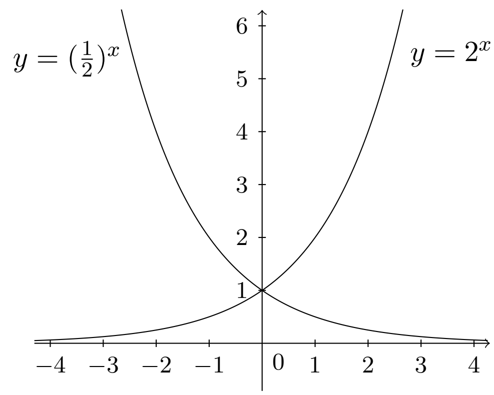

Figura 1: Grafici delle funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = 2^x$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{>0}$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Esercizio 1.13. 1. *Per trovare le soluzioni della disequazione esponenziale* $2^{3x-7} > 2^{1-x}$ *occorre 'trasportare la disequazione sugli esponenti', cioè bisogna risolvere la disequazione* $3x - 7 > 1 - x$. *Perchè? Spiegare in modo dettagliato.*

2. *Per trovare le soluzioni della disequazione esponenziale* $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1-5x}$ *occorre 'trasportare la disequazione sugli esponenti avendo cura di cambiare il verso della disequazione' (in questo caso da '>' a '<'), bisogna cioè risolvere la disequazione* $3x - 4 < 1 - 5x$. *Perchè? Spiegare in modo dettagliato.*

Esercizio 1.14. *Risolvere nell'insieme dei numeri reali le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali*

1. $(5^{1+x})^{1-x} = \dfrac{1}{125}$
2. $4^{x-1} = \dfrac{1}{2^{x-x^2}}$
3. $\dfrac{3^{x^2+5}}{27^{2x}} < \dfrac{1}{3^{x+1}}$

2 Logaritmi

Nella precedente sezione (Esercizio 1.12) si è mostrato che la funzione esponenziale è invertibile; la sua (unica) inversa $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{(\exp_a)^{-1}} \mathbb{R}$ si chiama funzione *logaritmo*. Più precisamente, fissato $a > 0$ (con $a \neq 1$) si ha

$$(\exp_a)^{-1} = \log_a$$

Questo significa che il *logaritmo in base a di un numero x è l'esponente che bisogna dare alla base a per ottenere x*. Per esempio, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_2 8 = 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ eccetera.

Dire che la funzione $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_a} \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione esponenziale significa che:

1. se ad un qualsiasi numero reale x si applica prima la funzione $\exp_a$ e poi la funzione $\log_a$ otteniamo nuovamente il numero x da cui siamo partiti: cioè, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$x \mapsto \exp_a x \mapsto \log_a(\exp_a x) = x$$

2. se ad un qualsiasi numero reale *positivo* x si applica prima la funzione $\log_a$ e poi la funzione $\exp_a$ otteniamo nuovamente il numero reale positivo x da cui siamo partiti: cioè, per ogni $x \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha

$$x \mapsto \log_a x \mapsto \exp_a(\log_a x) = x$$

I due diagrammi che seguono sintetizzano quanto appena detto

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\exp_a"] \arrow[dr, "\log_a \circ \exp_a = 1_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R}_{>0} \arrow[d, "\log_a"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{>0} \arrow[r, "\log_a"] \arrow[dr, "\exp_a \circ \log_a = 1_{\mathbb{R}_{>0}}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp_a"] \\
& \mathbb{R}_{>0}
\end{tikzcd}$$

Figura 2:

D'ora in poi denotiamo con $\log x$ (senza cioè precisare la base) il logaritmo in base 10 del numero x, mentre denotiamo con $\ln x$ il logaritmo in base e di x (detto anche 'logaritmo naturale' di x).

Esercizio 2.1. *Si ricordi che se una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è invertibile il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f eseguendo la simmetria rispetto alla retta bisettrice dell'angolo individuato dai semiassi x^+ e y^+.*

1. *Disegnare i grafici di $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_a} \mathbb{R}$ nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.*

2. *La funzione $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log_a} \mathbb{R}$ è strettamente crescente per $a > 1$ e strettamente decrescente per $0 < a < 1$. Scrivere le due definizioni.*

3. *Per $a > 1$ risulta $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$. Spiegare. Che cosa si può dire relativamente al caso $0 < a < 1$?*

2.1 Il logaritmo trasforma prodotti in somme

La proprietà fondamentale della funzione logaritmo è la seguente:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{2.1}$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. In altri termini, il logaritmo trasforma il prodotto di due numeri nella somma dei loro corrispondenti.

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice: basta applicare la funzione $\exp_a$ a tutti e due i membri della precedente uguaglianza e verificare che, in entrambi i casi, si ottiene la stessa quantità

$exp_a(\log_a(x_1 \cdot x_2)) = x_1 \cdot x_2$

$\exp_a(\log_a x_1 + \log_a x_2) = \exp_a(\log_a x_1) \cdot \exp_a(\log_a x_2) = x_1 \cdot x_2$ ∎

Altre proprietà dei logaritmi.

Per ogni $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$ valgono le seguenti proprietà

1. Logaritmo di un quoziente. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad \forall\, x_1, x_2 > 0$
2. Logaritmo di una potenza. $\log_a x^k = k \log_a x \qquad \forall x > 0$ e $\forall k \in \mathbb{R}$
3. Cambiamento di base. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \forall x > 0$

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio.

Esercizio 2.2. *Risolvere nell'insieme dei numeri reali le seguenti equazioni (disequazioni) logaritmiche.*

a) $\log_3(3x - 4) = 2$ *b*) $\log(x + 3) = 2 \log 2$ *c*) $2 \log(x + 3) = \log(x - 1) + 4 \log 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \leq 1$ *e*) $\ln(2x^2 - 5x + 3) < 0$ *f*) $\log(x^2 - 3x + 6) > 1$

3 Esercizi

1. Si consideri la funzione

$$(2,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \log(x-2)$$

(a) Tracciare il grafico di f.

(b) Per quali valori di x si ha $f(x) = 0$? Per quali x si ha $f(x) = 1$?

(c) $f(x) = \log(x-2)$ è crescente in $(2,+\infty)$, che cosa significa? (Scrivere in termini precisi).

2. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_0,\ g(x) = 5^x$ trasforma somme in prodotti. Che cosa significa? Spiegare.

3. Dimostrare che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$ vale la seguente proprietà :

$$\log_a b\,c = \log_a b + \log_a c$$

4. Trovare le soluzioni della seguente equazione

$$81 \cdot 9^x = 9^{\frac{15}{x}}$$

5. Semplificare la seguente espressione (il logaritmo è da intendersi in base 10)

$$\log 125 - 3\log\frac{27}{25} + 2\log 405$$

6. Trasformare i seguenti logaritmi in base 3 e poi semplificare la seguente espressione

$$\log_9 7 + 2\log_{27} 49$$

7. Tracciare il grafico della seguente funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>}0,\ f(x) = (\tfrac{1}{2})^x$$

(a) Tracciare il grafico di f.

(b) Per quali valori di x si ha $f(x) = 0$? Per quali x si ha $f(x) = 8$?

(c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ è decrescente in $\mathbb{R}$, che cosa significa? (Scrivere in termini precisi).

8 Si consideri la funzione

$$(\tfrac{1}{2},+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \log(x-\tfrac{1}{2})$$

1. Tracciare il grafico di f.

2. Trovare, se esistono, gli zeri di f.

3. Qual è il valore di $f(\frac{11}{2})$?

9. Si consideri la funzione
$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{>0}$, $g(x) = 9\,(\frac{1}{3})^x$

1. Tracciare il grafico di g.
2. Trovare i valori di x per i quali risulta $g(x) = 1$.
3. La funzione g è decrescente in $\mathbb{R}$. Che cosa significa?

10. Risolvere le seguenti equazioni

a) $4^x + 7 \cdot 2^x + 10 = 0$

b) $3^x - 3^{x-1} = 2^x$

11. Semplificare la seguente espressione

$$\log_3 2 - \log_3 6 + 3\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \sqrt{27}$$

12. Per ognuna delle seguenti uguaglianze dire se è vera o falsa motivando la risposta (il logaritmo è da intendersi in base 10)

a) $\log(a \cdot b) = \log a \cdot \log b$

b) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

c) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

d) $\log(a^b) = a \log b$

13. (Facoltativo) Risolvere la seguente equazione esponenziale

$$7^x + 2^{3x-3} = 2^{3x} - 7^{x-1}$$

3.1 Risposte

Esercizio 1.7

a) Si tratta della successione aritmetica $2 + 5n$.

b) È la progressione geometrica $f(z) = 5 \cdot 10^z$, con $z \in \mathbb{Z}$.

c) È la progressione geometrica, definita in $\mathbb{Z}$, $f(z) = \frac{1}{2}^z$.

Esercizio 1.6

1. Il numero di chicchi di grano sulla sessantaquattresima casella sono $2^{63} = 9,2 \cdot 10^{18}$ e il loro peso è circa $3,4 \cdot 10^{11}$ t.
2. Per effettuare la somma seguente $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$ conviene usare la seguente uguaglianza (verificarne la validità)

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 1 - q^n$$

dove q è numero reale fissato.
Allora $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \sim 1,8 \cdot 10^{19}$. Il grano totale pesa circa $6,7 \cdot 10^{11}$ t (670 miliardi di tonnellate!)

Esercizio 1.9

Dimostriamo che la funzione $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = a^x$ con $a > 1$ è strettamente crescente cioè per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ se $x_1 > x_2$ allora $a^{x_1} > a^{x_2}$. Abbiamo $a^{x_1} = a^{x_2+(x_1-x_2)} = a^{x_2}a^{x_1-x_2}$. La quantità $a^{x_1-x_2}$ è maggiore di uno perchè, per ipotesi, $x_1 - x_2 > 0$ e $a > 1$. Quindi otteniamo

$$a^{x_1} = a^{x_2+(x_1-x_2)} > a^{x_2}$$

Il caso $0 < a < 1$ si tratta con ovvie varianti.

Esercizio 1.10

Scegliamo il 'tempo di duplicazione' ($2^h\ 50^m$) come unità di misura del tempo. Poichè in 24 ore avvengono circa $8,47$ duplicazioni, il numero di batteri dopo 24 ore è circa $2^{8,47} \cdot 10^5 \sim 3,5 \cdot 10^7$.