Funzioni
Esercizi e complementi

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Novembre 2015[1] .

Indice

1 Esercizi

1. Scrivere la definizione di *funzione* e fornire almeno un esempio.

2. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

   (a) Trovare $f(0)$, $f^{-1}(2)$.

   (b) Disegnare il grafico qualitativo di f.

   (c) Determinare l'immagine $\operatorname{Im} f$ della funzione f.

3. Sia $[n]$ un insieme con n elementi e $[1]$ un insieme con un solo elemento. Quante sono le funzioni $[n] \xrightarrow{f} [1]$? Quante sono le funzioni $[1] \xrightarrow{f} [n]$?

4. Sia $A = \{a, b, c\}$. Rappresentare con un 'diagramma a frecce' la funzione 1_A (funzione identità su A)

5. Scrivere la definizione di *funzione iniettiva* e fornire almeno un esempio di funzione (iniettiva) da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

6. Scrivere la definizione di *funzione suriettiva* e fornire almeno un esempio di funzione (suriettiva) da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

7. Si considerino le funzioni $[3] \xrightarrow{f} [3]$ con dominio e codominio di esattamente 3 elementi.

   (a) Trovare, se esiste, una funzione iniettiva $[3] \xrightarrow{f} [3]$ che non sia suriettiva.

   (b) Trovare, se esiste, una funzione suriettiva $[3] \xrightarrow{f} [3]$ che non sia iniettiva.

[1] Nome file: 'esercizi_funzioni_terza_2013.tex'

8. Scrivere la definizione di *funzione biunivoca.* Trovare un esmpio di funzione biunivoca da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$..

9. Siano A e B due insiemi. Quando si dice che A e B sono *isomorfi* (cioè hanno *la stessa cardinalità.* Fornire tre esempi di insiemi *numerabili*, trovare cioè tre insiemi isomorfi all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

10. In che cosa consiste il "paradosso di Galileo"dei numeri quadrati? Spiegare.

11. Quali sono le proprietà fondamentali della *composizione di funzioni*? Rappresentarle usando i diagrammi esterni delle funzioni.

12. Trovare due funzioni f e g per le quali risulta $g \circ f \neq f \circ g$.

13. Si considerino le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(t) = 2t + 3$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(t) = t - 1$. Trovare un'espressione analitica per $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$.

14. Siano $A = \{a, b, c\}$ e $X = \{x, y\}$. Si consideri la funzione $X \xrightarrow{k} A$ per la quale $k(x) = a$ e $k(y) = c$.

    (a) Trovare, se possibile, una funzione $A \xrightarrow{r} X$ per la quale $r \circ k = 1_X$.

    (b) Trovare, se possibile, una funzione $A \xrightarrow{s} X$ per la quale $k \circ s = 1_A$.

15. Si considerino le seguenti funzioni

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & [0, +\infty) \xrightarrow{h} \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{x^3 + 1} \\ \text{(b)} & [0, +\infty) \xrightarrow{h} \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{x^3} + 1 \end{array}$$

    Si tratta di funzioni composte? In caso affermativo, trovare una coppia di funzioni f e g in modo tale che risulti $h = g \circ f$

16. Scrivere la definizione di grafico $G(f)$ della funzione $A \xrightarrow{f} B$. Disegnare il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

17. Scrivere la definizione di *funzione invertibile.* La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

    è invertibile? In caso affermativo trovare l'inversa di f.

18. La funzione $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ è invertibile? In caso affermativo determinare l'inversa di f.

19. Siano $A = \{a, b, c\}$ a $Y = \{x, y\}$. Trovare funzioni $A \xrightarrow{f} Y$ che abbiano inverse sinistre e funzioni che non ne abbiano.

20. Siano $A = \{a, b\}$ a $Y = \{x, y, z\}$. Trovare funzioni $A \xrightarrow{f} Y$ che abbiano inverse destre e funzioni che non ne abbiano.

21. Si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$. Dimostrare la seguente proposizione:

    se f è invertibile allora la sua inversa è unica.

22. Si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$. Una *inversa sinistra* g di f è una funzione $B \xrightarrow{g} A$ per la quale risulta $g \circ f = 1_A$

    Dimostrare che se $A \neq \emptyset$ allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:

    α) f è iniettiva;

    β) esite (almeno) una *inversa sinistra* g di f.

23. Si consideri una funzione $A \xrightarrow{f} B$. Una *inversa destra* s di f è una funzione $B \xrightarrow{g} A$ per la quale $f \circ g = 1_B$

    Dimostrare che le due seguenti condizioni sono equivalenti.

    α) f è suriettiva;

    β) esite (almeno) una *inversa destra* g di f.

24. Dimostrare che se $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$ sono funzioni invertibili (A,B,C insiemi), allora la funzione composta $A \xrightarrow{g \circ f} C$ è invertibile e

    $$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

    (In inglese questa uguaglianza si chiama "socks rule", *regola dei calzini*).

25. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una qualunque funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Dare la definizione di *punto fisso* di f e quella di *zero* di f. Dare un'interpretazione geometrica delle due definizioni.

26. Trovare, se esistono, i punti fissi delle funzioni

    (a) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x - 27$

    (b) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

27. Quando la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ si dice *pari*? quando si dice *dispari*? I grafici di funzioni pari (dispari) presentano simmetrie? Spiegare.

28. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+x}$ è pari? è dispari?

    (Rispondere in due modi: usando le definizioni di funzioni pari e dispari oppure utilizzando opportune proprietà).

29. Dimostrare che il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.

30. Dare la definizione di funzione *crescente*, (*decrescente*).

31. (Vero/Falso?)

    (a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è crescente (decrescente) allora è iniettiva.

(b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è iniettiva allora è crescente (decrescente).

32. Si considerino le funzioni

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \;\; f(x) = 9 - 3x^2 \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \;\; g(x) = 2x + 1$$

(a) Calcolare $f(2)$, $f^{-1}(3)$, $g^{-1}(5)$.

(b) Determinare Im f e Im g.

(c) Determinare , se esistono, "zeri "e "punti fissi" di f e g.

33. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinare $f^{-1}(-\infty, 0)$.

34. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{2-7t}{2t^2+t+3}$. Determinare $f^{-1}(0, +\infty)$.

35. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

a] $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |27 - 3x^2|$

b] $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + |x|$

36. In che modo la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}, \;\; h(t) = \sqrt[3]{7 + 2t}$$

si può interpretare come funzione composta? Trovare una coppia di funzioni f e g per le quali risulta $h = g \circ f$

37. Dire se la funzione

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} [-9, +\infty), \;\; f(x) = x^2 - 9$$

è invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inversa.

38. Dimostrare che se la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è sia pari che dispari allora $f(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

39. Determinare il dominio massimale $D \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{2 - |x| - \sqrt{1 + x^2}}$$

40. Trovare, se esistono, gli zeri della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = |1 - x| + |x| - 1$$

41. Siano $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x-1}{2x+3} > 0 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > \sqrt{x^2 - 1} \right\}$.

Determinare $A \cap B$.

42. Verificare che le funzioni

$$\left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right) \xrightarrow{f} \left[\tfrac{3}{4}, +\infty\right), \quad f(x) = x^2 - x + 1$$
$$\left[\tfrac{3}{4}, +\infty\right) \xrightarrow{g} \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right), \quad g(x) = \tfrac{1}{2} + \sqrt{x - \tfrac{3}{4}}$$

sono una l'inversa dell'altra. Disegnare i grafici qualitativi di f e g.

43. Siano $A(\neq \emptyset), B, C$ insiemi e $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ funzioni. Dimostrare le seguenti proposizioni

    (a) f, g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva.

    (b) f, g suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva.

44. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali

    (a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + |x|}{\sqrt{|x-9| + \sqrt{x^2 - 9x}}} > 0$

    (b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 3x} - x - 1}{\sqrt{5x - x^2 - 4} - x + 1} \geq 0$

    (c) $\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x+6}\right|} - 3 > 0$

45. Vero o Falso? Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.

    (a) $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se f è pari allora non è invertibile.

    (b) $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se f è dispari allora è invertibile.

    (c) $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se f e g sono crescenti allora $g \circ f$ è crescente.

    (d) $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se f è decrescente e g è crescente allora $g \circ f$ è decrescente.

    (e) $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se f è invertibile allora f è crescente o decrescente.

46. Delle seguenti funzioni $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ trovare il dominio massimale $D \subseteq \mathbb{R}$, l'immagine Im f di f e infine disegnare il grafico di f

    (a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

    (b) $f(x) = 2^{|x|}$

    (c) $f(x) = |\log x|$ (logaritmo in base 10)

    (d) $f(x) = \log |x|$ (logaritmo in base 10)

    (e) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

    (f) $f(x) = \arctan x$

    (g) $f(x) = 3\cos(2x)$

47. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, $h(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$

(a) Trovare la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ in modo tale che $h = g \circ f$.

(b) Determinare Im h.

48. L'insieme dei numeri pari è numerabile? Spiegare.

49. L'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile? Spiegare.

50. Disegnare il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq -2 \\ |x^2+x-2| & -2 < x < 1 \\ \log x & x \geq 1 \end{cases}$$

51. Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni positive, cioè $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Dimostrare che se f e g sono crescenti allora la funzione prodotto fg è crescente.

2 Insiemi infiniti

Definizione 2.1. *Diciamo che un insieme X è* finito *se ogni endofunzione $X \xrightarrow{f} X$ iniettiva è anche suriettiva. Un insieme X è* infinito *se esiste una endofunzione $X \xrightarrow{f} X$ iniettiva e non suriettiva.*

Esercizio 2.2. *Verificare che gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono insiemi infiniti.*

Definizione 2.3. *Due insiemi X, Y hanno la stessa cardinalità (sono* isomorfi*) se esiste una funzione biunivoca (un isomorfismo) $X \xrightarrow{f} Y$.*

Un insieme A si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$, cioè se esiste una funzione biunivoca $\mathbb{N} \longrightarrow A$.

Esercizio 2.4. *Dimostrare che i seguenti insiemi sono* numerabili.

1. *L'insieme $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ dei numeri pari.*
2. *L'insieme $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ dei numeri dispari.*
3. *L'insieme $P = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ dei quadrati perfetti.*
4. *L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ dei numeri interi.*

Teorema 2.5 (G Cantor, 1873). *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.*

Dimostrazione.

Occorre dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}_{>0}$ dei razionali positivi è numerabile[2]. Si deve cioè trovare una funzione biunivoca $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}_{>0}$ dall'insieme dei naturali all'insieme dei razionali positivi

[2]Infatti, se i razionali positivi si possono ordinare nella successione $r_1, r_2, r_3, ..$, allora tutti i razionali si possono elencare come $0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, ...$

(si deve trovare un modo per "mettere in fila" tutti i numeri di $\mathbb{Q}_{>0}$). Si consideri la seguente tabella

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & . \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & . & . \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & . & . & . \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & . & . & . & . \\
\frac{5}{1} & . & . & . & . & .
\end{array}$$

la prima riga è costituita da tutte le frazioni con numeratore uguale a uno, la seconda riga da tutte le frazioni con numeratore uguale a due e così via. L'elemento a_{mn} che si trova nell'intersezione della riga m con la colonna n è la frazione $\frac{m}{n}$. L'insieme costituito da tutti gli elementi a_{mn} di tale tabella è numerabile perchè si possono ordinare nella seguente successione:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

(gli elementi a_{mn} sono stati messi in fila scrivendo prima quello con $m+n=2$, poi quelli con $m+n=3$, poi quelli con $m+n=4$ eccetera.) L'insieme $\mathbb{Q}_{>0}$ dei razionali positivi è un sottoinsieme dell'insieme degli elementi che figurano nella tabella. Quindi anche $\mathbb{Q}_{>0}$ è numerabile. ∎

Teorema 2.6. *L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.*

Dimostrazione. (Georg Cantor, 1873; "argomentazione diagonale").

Si consideri l'insieme T dei numeri reali, compresi tra 0 e 1 e si pensi a tali numeri nella loro rappresentazione binaria. Allora il numero reale $x \in T$ è un allineamento decimale (finito o no, periodico o no) del tipo

$$x = 0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_n$$

dove le cifre $\gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_n...$ sono 0 o 1. Ad esempio: $0,0010100110$, oppure $0,1111111....$ (periodo 1) eccetera.

Si tratta di dimostrare che l'insieme T non è numerabile. Ne seguirà che anche $\mathbb{R}$ non è numerabile. Si supponga allora, per assurdo, che T sia numerabile, cioè che esista una funzione biunivoca $\mathbb{N} \xrightarrow{f} T$. Allora f ordina in successione tutti gli elementi di T:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, a_0^0 a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0 .... \\
&a_1 = 0, a_0^1 a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 .... \\
&a_2 = 0, a_0^2 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 .... \\
&a_3 = 0, a_0^3 a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 .... \\
&...................................... \\
&a_n = 0, a_0^n a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n .... \\
&......................................
\end{aligned}$$

(si ricordi che tutte le cifre a_i^j sono 0 oppure 1). Si costruisca ora un numero b che appartiene a T, ma è diverso da ogni numero dell'elenco scritto sopra; si arriva così all'assurdo che f non è suriettiva. Si definisca $b = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 ....$ come segue: per ogni n,

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } a_n^n = 0 \\ 0 & \text{se } a_n^n = 1 \end{cases}$$

Evidentemente, il numero b differisce da tutti i numeri a_n. Infatti, per ogni n, b differisce da a_n almeno per la n-esima cifra decimale, in quanto $b_n \neq a_n^n$. ∎

Questi altri due fatti, proposti sotto forma di esercizi, sono di per sè poco intuitivi e, per certi versi, straordinari.

Esercizio 2.7. *L'insieme* $\mathbb{R}^2$ *costituito da tutti i punti del piano ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.8. *L'insieme* $\mathbb{R}^3$ *costituito da tutti i punti dello spazio tridimensionale ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{R}$.

Teorema 2.9 (Cantor)**.** *Sia* X *un insieme qualsiasi. L'insieme* $\mathcal{P}(X)$ *delle parti di* X *ha cardinalità maggiore rispetto a quella di* X*. Cioè , non esistono funzioni suriettive* $X \xrightarrow{f} \mathcal{P}(X)$

È pertanto possibile costruire una successione di insiemi infiniti di cardinalità sempre più grandi.

3 Suggerimenti e risposte

Il file *Funzioni*, a cui si fa riferimento in questa sezione si trova in rete all'indirizzo

http://www.maurosaita.it

1. Si veda il file *Funzioni*.
2. (a) $f(0) = -2$.
   (b) $f^{-1}(2) = \{\pm 2\}$
   (c) $\text{Im } f = [-2, +\infty)$
3. Esiste un'unica funzione $[n] \xrightarrow{f} [1]$, mentre sono n quelle $[1] \xrightarrow{f} [n]$.
4. Si veda il file *Funzioni*.
5. Si veda il file *Funzioni*.
6. Si veda il file *Funzioni*.
7. Non esistono funzioni iniettive $[3] \xrightarrow{f} [3]$ che non sono suriettive. Non esistono funzioni suriettive $[3] \xrightarrow{f} [3]$ che non sono iniettive.

   Nel caso di funzioni $[n] \xrightarrow{f} [n]$: f è iniettiva se e solo se f è suriettiva. Quindi, nel caso di endofunzioni con dominio (e codominio) finito, le funzioni iniettive coincidono con quelle suriettive.
8. Si veda il file *Funzioni*.
9. Si veda il file *Funzioni*.
10. Si veda il file *Funzioni*.
11. Leggi d'identità : *se* $A \xrightarrow{f} B$, *allora* $f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f$

    Legge associativa: *se* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ *allora* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

    Fare i diagrammi esterni delle due leggi.
12. Nel caso di funzioni $[3] \longrightarrow [3]$, utilizzando i diagrammi a frecce, è facile trovare una coppia di funzioni f, g per le quali risulta $g \circ f \neq f \circ g$. Oppure si può pensare al caso $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: per le funzioni $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ non vale la proprietà commutativa (verificare).
13. $f \circ f(t) = 4t + 9, \quad g \circ g(t) = t - 2, \quad f \circ g(t) = 2t + 1, \quad g \circ f(t) = 2t + 2.$
14.
15. (a) $[0, \infty) \xrightarrow{f} [0, \infty)$, $f(x) = x^3 + 1$ e $[0, \infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

    (b) $[0, \infty) \xrightarrow{f} [0, \infty)$, $f(x) = x^3$ e $[0, \infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$. Verificare che in entrambi i casi si ha: $(g \circ f)(x) = h(x)$ per ogni $x \in [0, \infty)$.

16. Si disegni il grafico della parabola $\mathbb{R} \xrightarrow{\overline{f}} \mathbb{R}$, $\overline{f}(x) = x^2 - 2x - 3$. Per la sola parte di grafico che si trova nel terzo e quarto quadrante, si realizzi la simmetria assiale rispetto all'asse x delle ascisse...

17. La funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva e suriettiva, quindi è invertibile. La sua inversa coincide con f, cioè $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

18. La funzione $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ è iniettiva e suriettiva, quindi è invertibile. L'inversa f^{-1} di f è $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

19. Utilizzare i diagrammi a frecce.

20. Utilizzare i diagrammi a frecce.

21. Si veda il file *Funzioni*.

22. Si veda il file *Funzioni*.

23. Si veda il file *Funzioni*.

24. Si veda il file *Funzioni*.

25. Si veda il file *Funzioni*.

26. (a) $x = \pm 3$.
    (b) f non ha punti fissi.

27. Per le definizioni di funzioni pari e dispari si veda il file *Funzioni*. Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse x, mentre quello di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani.

28. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+x}$ è dispari, infatti il numeratore è pari e il denominatore è dispari, quindi ...

29. Ipotesi: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ pari, $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ dispari.

    Tesi: $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ dispari.

    Dimostrazione.

    Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha: $fg(x) = f(x)g(x) = -f(-x)g(-x) = -fg(-x)$. Quindi fg è dispari.

30. Si veda il file *Funzioni*.

31. (a) Vero, una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ crescente (decrescente) è iniettiva. (b) Falso. La funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva ma non è crescente (nè decrescente).

32.

    (a) $f(2) = -3$, $f^{-1}(3) = \{\pm\sqrt{2}\}$, $g^{-1}(5) = \{2\}$.

(b) Im $f = [+9, -\infty)$; Im $g = \mathbb{R}$.

(c) Zeri di f: $x = \pm\sqrt{3}$; punti fissi di f: $x = \frac{-1\pm\sqrt{109}}{6}$. Zeri di g: $x = -\frac{1}{2}$; punti fissi di g: $x = -1$

33. $f^{-1}(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

34. $f^{-1}(0, +\infty) = \{t \in \mathbb{R} \mid t < \frac{2}{7}\}$

35.

36. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(t) = 7 + 2t$; $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt[3]{t}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(t) = h(t)$.

37. $\mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{f} [-9, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 9$ è invertibile perchè iniettiva e suriettiva. L'inversa f^{-1} di f è

$$[-9, +\infty) \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+9}$$

38. Per ipotesi valgono entrambe le uguaglianze

$$f(-x) = f(x) \tag{3.1}$$

$$f(-x) = -f(x) \tag{3.2}$$

per ogni x in $\mathbb{R}$. Sostituendo (3.1) in (3.2) si ottiene $2f(x) = 0$. Segue che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

39. Si devono trovare le soluzioni della disequazione $\sqrt{1+x^2} \leq 2 - |x|$.

$D = \left\{-\dfrac{3}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}\right\}$.

40. Occorre trovare le soluzioni dell'equazione $|1 - x| = 1 - |x|$. Gli zeri di f sono:

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

41. $A \cap B = (1, +\infty)$.

42.

43. Si veda il file *Funzioni*.

44. Risposte.

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + |x|}{\sqrt{|x-9|} + \sqrt{x^2 - 9x}} > 0 \qquad S = \{x \leq 0 \vee x > 9\}$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 3x} - x - 1}{\sqrt{5x - x^2 - 4} - x + 1} \geq 0 \qquad S = \{\dfrac{5}{2} < x \leq 4\}$

(c) $\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x+6}\right|} - 3 > 0 \qquad S = \{-\dfrac{53}{8} < x < -\dfrac{11}{2} \quad \wedge \quad x \neq -6\}$

45. (a) Vero, una funzione pari non è iniettiva. (b) Falso, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ è dispari ma non è invertibile. (c) Vero, dimostrarlo. (d) Vero, dimostrarlo; (e) Falso, la funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è invertibile ma non è crescente nè decrescente.

46.

47. (a) $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $\text{Im } f = (0, +\infty)$; $\text{Im } h = g(0, +\infty) = (-3, +\infty)$

48. L'insieme dei numeri pari è numerabile.

49. L'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi è numerabile.

50.

51.