Esercizi su rette e piani in $\mathbb{R}^3$

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[1]

[1]Nome file: es_rette_e_piani_2016.tex

1 Equazioni parametriche della retta

Una *retta parametrizzata* nello spazio $\mathbb{R}^3$ è una funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3 \qquad t \longmapsto (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto della retta (corrispondente al valore del parametro $t = 0$) e $\mathbf{v} = (l, m, n)$ è un vettore non nullo *parallelo* alla retta, detto *vettore di direzione* della retta. Si scrive anche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{1.1}$$

Diremo che (1.1) sono *equazioni parametriche* per la retta r. In forma vettoriale si scrive

$$X = P_0 + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove $X = (x, y, z)$.

In linea di principio, è bene distinguere la *funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$ dalla sua *immagine*, cioè dall'insieme di punti di $\mathbb{R}^3$ per i quali $\mathbf{r}(t) = P_0 + \mathbf{v}t$, $t \in \mathbb{R}$. Distinguere i due concetti è importante ad esempio in cinematica: la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$ è la legge oraria di un moto rettilineo uniforme che all'istante $t = 0$ passa per P_0 e possiede velocità (vettoriale) $\mathbf{v}$ costante al variare di t. L'immagine di $\mathbf{r}$ è

$$\text{Im}\,(\mathbf{r}) = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \; P = P_0 + vt,\, t \in \mathbb{R}\ \}$$

e fornisce la traiettoria (orbita) del moto. Naturalmente, una stessa traiettoria può essere percorsa in infiniti modo diversi. In termini geometrici, una retta intesa come insieme di punti dello spazio, può essere parametrizzata in infiniti modi diversi.

Considerazioni del tutto analoghe valgono, con ovvie modifiche, per le rette parametrizzate in $\mathbb{R}^2$. Le equazioni parametriche di tali rette sono del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{1.2}$$

dove $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (l, m)$ è un vettore di direzione della retta e (x_0, y_0) è un punto della retta.

1.1 Esempi

1. Le equazioni parametriche della retta passante per $P_0 = (3, 5, 7)$ e avente vettore di direzione $v = (1, 2, -1)$ sono:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 7 - t \end{cases}$$

2. Le equazioni parametriche dell'asse x sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

3. L'equazione parametrica in forma vettoriale della retta contenente i punti (distinti) A e B è :

$$X = A + (B - A)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

In componenti, se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $X = (x, y, z)$ si ha:

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases}$$

4. Le due rette di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = -1 + 7t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2u \\ y = -6u \\ z = 5 - 14u \end{cases}$$

$t, u \in \mathbb{R}$, sono parallele perché i loro rispettivi vettori di direzione $\mathbf{v} = (1, 3, 7)$ e $\mathbf{v}' = (-2, -6, -14)$ sono proporzionali.

2 Equazione cartesiana del piano

In $\mathbb{R}^3$ si consideri un piano π, un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente a π e un vettore non nullo $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ortogonale a π. Allora $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a π se e solo se il vettore $X - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è ortogonale a $\mathbf{v} = (a, b, c)$, cioè se e solo se il prodotto scalare $v \cdot (X - P_0)$ è nullo:

$$\begin{gathered} (x, y, z) \text{ appartiene a } \pi \\ \Updownarrow \\ v \cdot (X - P_0) = 0 \\ \Updownarrow \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{gathered}$$

Diremo allora che l'*equazione cartesiana* del piano passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2.1}$$

Eliminando le parentesi, l'equazione (2.1) si scrive nella forma:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.2}$$

Si tratta di una equazione di primo grado in x, y, z, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Naturalmente ogni altra equazione del tipo

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + (\lambda d) = 0,$$

per ogni $\lambda \neq 0$, rappresenta ancora lo stesso piano π.
Viceversa, ogni equazione del tipo (2.2), con a, b, c non tutti e tre nulli, rappresenta un piano; supposto ad esempio $c \neq 0$, l'equazione (2.2) rappresenta il piano ortogonale a (a, b, c), passante per $(0, 0, -\dfrac{d}{c})$ (Esercizio). Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ contiene l'origine se e solo se $d = 0$.
Riassumendo: si consideri una funzione $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Una tale funzione si dice *affine*. Allora l'*insieme degli zeri* di f, denotato $f^{-1}(0)$, cioè l'insieme

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0\}$$

è un piano in $\mathbb{R}^3$; si dice che $ax + by + cz + d = 0$ è una equazione cartesiana del piano. Attenzione: qui si usa la notazione $f^{-1}(0)$ per denotare la controimmagine di 0 (zero) tramite f, cioè l'insieme dei punti (x, y, z) dello spazio per i quali $f(x, y, z) = 0$; il simbolo usato non denota la funzione inversa di f (che non è mai invertibile).

2.1 Esempi

1. Il piano passante per il punto $P_0 = (2, 1, 7)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (3, 2, 5)$ ha equazione
$$3(x-2) + 2(y-1) + 5(z-7) = 0$$
ossia $3x + 2y + 5z - 43 = 0$.

2. Il piano passante per l'origine e ortogonale a $(1, 1, 1)$ ha equazione: $x + y + z = 0$.

3. Il piano yz ha equazione $x = 0$.

4. Il piano passante per il punto $P_0 = (0, 0, 5)$ e ortogonale a $(0, 0, 1)$ (cioè parallelo al piano xy) è $z - 5 = 0$.

2.2 Condizioni di parallelismo e ortogonalità . I casi: retta-retta, piano-piano, retta-piano

Rette parallele.
Siano r e r' due rette in $\mathbb{R}^3$, rispettivamente con vettori di direzione $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$. La retta r è *parallela* a r' se $\mathbf{v}$ è multiplo di $\mathbf{v}'$, cioè se esiste un numero $h \neq 0$ per il quale $\mathbf{v} = h\mathbf{v}'$. In modo equivalente, due rette r e r' sono parallele, se: 1) sono complanari (cioè esiste un piano che le contiene entrambe); 2) o sono coincidenti, oppure non hanno punti in comune.

Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases} \tag{2.3}$$

sono parallele se e solo se i loro vettori di direzione (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, cioè se esiste un numero λ per il quale

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c$$

Rette ortogonali. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases} \tag{2.4}$$

sono ortogonali se e solo se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0$$

Piani paralleli.
Due piani π e π' di equazioni cartesiane

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad\qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli se e solo se i vettori (a, b, c), (a', b', c') (ortogonali a π e π', rispettivamente) appartengono alla stessa retta, cioè se e solo se esiste un numero λ per il quale

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c$$

Se tale condizione è verificata e inoltre $d' = \lambda d$, allora π e π' sono (paralleli e) coincidenti; se invece $d' \neq \lambda d$, sono paralleli distinti.

Piani ortogonali.
Due piani π e π' rispettivamente di equazioni cartesiane

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad\qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono ortogonali se e solo se i vettori (a, b, c), (a', b', c') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$$

Ortogonalità piano-retta. Un piano

$$\pi : \qquad ax + by + cz + d = 0$$

e una retta

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{2.5}$$

sono ortogonali tra loro se e solo se il vettore (a, b, c), ortogonale a π, e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono multipli, cioè se e solo se esiste un numero ρ per il quale

$$a = \rho\, l, \quad b = \rho\, m, \quad c = \rho\, n$$

Parallelismo piano-retta. Un piano

$$\pi : \qquad ax + by + cz + d = 0$$

e una retta

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{2.6}$$

sono paralleli tra loro se e solo se il vettore (a, b, c), ortogonale a π, e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono ortogonali, cioè se e solo se

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0$$

Mutua posizione di due rette in $\mathbb{R}^3$. Due rette r e r' in $\mathbb{R}^3$ si dicono

parallele se hanno la stessa direzione, cioè se i loro vettori di direzione sono multipli tra loro

sghembe se non sono complanari, cioè se non esiste un piano che le contiene entrambe.

incidenti se la loro intersezione $r \cap r'$ è un punto (cioè se hanno esattamente un punto in comune).

Riassumendo: se due rette nello spazio hanno la stessa direzione, sono parallele; se invece non hanno la stessa direzione, ci sono due casi possibili: sono incidenti se la loro intersezione è un punto, sono sghembe se la loro intersezione è vuota.

2.3 Esempi.

1. Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad\qquad r' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \tag{2.7}$$

sono parallele. Infatti i loro vettori di direzione, rispettivamente $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v}' = (-2, -4, 2)$, sono proporzionali ($\mathbf{v}' = -2\mathbf{v}$).

2. I due piani

$$\pi : \quad x + y - z + 7 = 0, \qquad\qquad \pi' : \quad 2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

sono paralleli e distinti. Sono paralleli, perché i vettori $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ e $(a', b', c') = (2, 2, -2)$, rispettivamente ortogonali a π e π', sono proporzionali tra loro: $(a', b', c') = 2(a, b, c)$; sono paralleli *distinti*, perché $(1, 1, -1, 7)$ e $(2, 2, -2, 3)$ non sono proporzionali.

3. I due piani

$$\pi : \quad x + 2y + 4z + 1 = 0, \qquad\qquad \pi' : \quad 2x + 3y - 2z + 7 = 0$$

sono ortogonali. Infatti i vettori $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ e $(a', b', c') = (2, 3, -2)$ sono ortogonali tra loro (il loro prodotto scalare è zero).

4. Il piano

$$\pi : \qquad x + y + 3z + 1 = 0$$

e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = -1 + t \end{cases} \tag{2.8}$$

sono ortogonali tra loro perché il vettore $(a, b, c) = (1, 1, 3)$, ortogonale a π, è multiplo del vettore di direzione $(l, m, n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ della retta r.

3 Equazioni cartesiane di rette e equazioni parametriche di piani

Siano π e π' due piani nello spazio, di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, rispettivamente. Se non sono paralleli tra loro, la loro intersezione $\pi \cap \pi' = r$ è una retta dello spazio; un punto (x, y, z) dello spazio appartiene a r se e solo se soddisfa il sistema

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Si dice che (3.1) è una rappresentazione della retta r mediante (un sistema di) equazioni cartesiane. Naturalmente, esistono infinite coppie di piani la cui intersezione è r; quindi una stessa retta si può rappresentare come sistema di equazioni cartesiane in infiniti modi diversi.
Un piano π nello spazio può anche essere descritto in forma parametrica, nel modo seguente. Siano $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori (spiccati dall'origine) paralleli a π e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di π. Allora il piano π è l'insieme dei punti $X = (x, y, z)$ del tipo

$$X = P_0 + tV + uW$$

al variare dei parametri t, u in $\mathbb{R}$. Infatti, l'insieme di punti $\{tV + uW, \ \ t, u \in \mathbb{R}\}$ è il piano π_0 passante per l'origine e parallelo a π; se si trasla tale piano π_0 del vettore OP_0, si ottiene il piano π.

In componenti, le equazioni parametrciche del piano π si scrivono

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t + w_1 u \\ y = y_0 + v_2 t + w_2 u \\ z = z_0 + v_3 t + w_3 u \end{cases} \qquad t, u \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

3.1 Esempi

1. L'asse delle x è intersezione del piano di equazione $z = 0$ (il piano xy) e del piano di equazione $y = 0$ (il piano xz). Quindi equazioni cartesiane per l'asse delle x sono

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. La retta di $\mathbb{R}^3$, bisettrice del primo e terzo quadrante del piano xy, ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Equazioni parametriche per il piano passante per $P_0 = (1, 2, 5)$ e parallelo ai vettori $v = (2, 5, 7)$ e $w = (1, 0, 3)$ sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + u \\ y = 2 + 5t \\ z = 5 + 7t + 3u \end{cases} \qquad t, u \in \mathbb{R}$$

4 Esercizi

Esercizio 4.1. *Trovare equazioni parametriche per la retta* r *che contiene i punti* $A = (1, 2, -1)$ *e* $B = (0, 1, 3)$.

$\boxed{R}$

Esercizio 4.2. *Stabilire se il punto* $P = (0, 2, 1)$ *appartiene alla retta* r *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 4.3. *Determinare la retta* r *passante per* $A(1, 4, -7)$ *e parallela alla retta* s *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 4.4. *Scrivere equazioni parametriche per la retta dello spazio che contiene il punto* $P = (0, 3, 5)$ *ed è ortogonale al piano* $x = 0$.

$\boxed{R}$

Esercizio 4.5. *Scrivere equazioni cartesiane per il piano ortogonale al vettore* $(1, 2, 3)$ *e passante per il punto* $P = (1, -1, 4)$.

$\boxed{R}$

Esercizio 4.6. *Determinare l'equazione della retta passante per* $A(7, -\frac{1}{3}, 2)$ *e perpendicolare al piano* π *di equazione* $5x - 4y + z = 0$.

$\boxed{R}$

Esercizio 4.7. *Determinare l'equazione cartesiana del piano* π *passante per* $P = (1, -1, 2)$ *e parallelo al piano* π' *di equazione* $x - 3y + z - 1 = 0$.

R

Esercizio 4.8. *Dimostrare la seguente proposizione:*
se l'equazione di un piano non contiene la variabile y*, cioè se è del tipo* $ax + cz + d = 0$*, allora il piano è parallelo all'asse* y *(e similmente per le altre variabili).*

R

Esercizio 4.9. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$*, si considerino il piano* π *di equazione* $x + y + z + 1 = 0$ *e i punti* $P = (-1, 0, -1)$ *e* $Q = (1, 2, \alpha)$*.*

A) Scrivere un vettore di direzione v *per la retta che contiene* P *e* Q*;*

B) Trovare un vettore (a, b, c) *ortogonale al piano* π*.*

C) Scrivere gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ *per i quali la retta* PQ *è parallela al piano* π*.*

D) Dire per quali eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ *la retta* PQ *è perpendicolare al piano* π*.*

R

Esercizio 4.10. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$ *sono assegnati il punto* $P = (0, 3, 4)$ *e i due piani* π *e* π' *di equazioni:*

$$\pi : \quad x - y - z - 1 = 0, \qquad\qquad \pi' : \quad 3x - y + z - 1 = 0.$$

Esiste una retta contenente $P = (0, 3, 4)$ *e parallela sia al piano* π *che al piano* π'*?*

R

Esercizio 4.11. *Si considerino la retta* r *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

e la retta s *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = u \\ y = 1 \quad u \in \mathbb{R} \\ z = 1 - u \end{cases}$$

Stabilire se r *e* s *sono parallele, incidenti o sghembe.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.12 (Piano per un punto contenente, una retta.)**.** *Sia r la retta di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

e sia $Q = (1, \frac{1}{2}, 3)$. Verificare che Q non appartiene a r e determinare un'equazione cartesiana per il piano π passante per Q e contenente r.

$\boxed{R}$

Esercizio 4.13. *Data la retta r di equazioni*

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

determinare tutti i piani passanti:

(a) *per r e per il punto $P = (-1, -3, 0)$;*

(b) *per r e per il punto $Q = (0, 5, 7)$.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.14 (Distanza di un punto da una retta.)**.** *Determinare la distanza tra il punto $P = (1, 0, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 4.15 (Piano per un punto, parallelo a due vettori)**.** *Trovare l'equazione cartesiana del piano π passante per $P = (3, -4, 2)$ e parallelo ai vettori $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 3, 1)$.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.16 (Piano individuato da due rette incidenti.). *Siano r e s due rette rispettivamente di equazioni parametriche*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \quad u \in \mathbb{R} \\ z = 2 + u \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r, s sono incidenti.
(b) Trovare l'equazione cartesiana del piano individuato da r e s.

R

Esercizio 4.17 (Simmetrico di un punto rispetto a un piano). *Determinare il simmetrico del punto $P = (-1, 1, 3)$ rispetto al piano π di equazione $2x - y + z + 1 = 0$*

R

Esercizio 4.18 (Distanza tra rette parallele). *Siano r, s due rette di equazioni cartesiane, nell'ordine*

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

1. *Verificare che le due rette sono parallele distinte.*
2. *Determinare la distanza tra r e s.*

R

Esercizio 4.19 (Retta ortogonale e incidente a due rette sghembe). *Siano r, s due rette di equazioni parametriche*

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + u \\ y = -2 \qquad u \in \mathbb{R} \\ z = 3 - u \end{cases}$$

1. *Verificare che le due rette sono sghembe.*
2. *Trovare le equazioni parametriche della retta ortogonale e incidente a r e s.*

$\boxed{R}$

Esercizio 4.20 (Distanza tra rette sghembe)**.** *Trovare la distanza tra le due rette sghembe di equazioni parametriche (le stesse dell'esercizio precedente)*

$$r: \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z &= 2t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x &= 1+u \\ y &= -2 \qquad u\in\mathbb{R} \\ z &= 3-u \end{cases}$$

$\boxed{R}$

5 Soluzioni

Esercizio 4.1

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = -1+4t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Esercizio 4.2

Il punto $P = (0,2,1)$ appartiene alla retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+3t \quad t\in\mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$ se e solo se esiste un t per il quale $\begin{cases} 0 = 3+t \\ 2 = 1+3t \\ 1 = 2t \end{cases}$
Queste tre equazioni sono ovviamente incompatibili (perché dalla prima si ricava $t=-3$, che non soddisfa le altre due). Quindi P non appartiene alla retta.

Esercizio 4.3

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 4+2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = -7+2t \end{cases}$$

Esercizio 4.4

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 4.5

$x-1+2(y+1)+3(z-4)=0$, cioè $x+2y+3z-11=0$.

Esercizio 4.6

$$\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Esercizio 4.7

$(x-1) - 3(y+1) + (z-2) = 0$, cioè $x - 3y + z - 6 = 0$.

Esercizio 4.8

Un vettore di direzione per l'asse y è $(0,1,0)$. Per la condizione di parallelismo tra un piano e una retta, basta allora verificare che il prodotto scalare $(a,0,c)\cdot(0,1,0)$ è nullo.

Esercizio 4.9

A) Un vettore di direzione per la retta che contiene P e Q è $Q - P = (2, 2, \alpha + 1)$.

B) Un vettore ortogonale al piano $x + y + z + 1 = 0$ è $(1,1,1)$.

C) La retta PQ è parallela al piano $x + y + z + 1 = 0$ se $(2, 2, \alpha + 1)\cdot(1,1,1) = 2 + 2 + \alpha + 1 = 0$, cioè se $\alpha = -5$.

D) La retta PQ è perpendicolare al piano $x+y+z+1 = 0$ se $(2, 2, \alpha+1)$ e $(1,1,1)$ sono proporzionali, cioè se $\alpha = 1$.

Esercizio 4.10

La retta cercata esiste ed è unica: è l'intersezione del piano passante per P e parallelo a π e del piano passante per P e parallelo a π'. Equazioni cartesiane per tale retta sono:

$$\begin{cases} x - (y-3) - (z-4) = 0 \\ 3x - (y-3) + (z-4) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.11

Vettori di direzione di r e s sono, rispettivamente, $(1,3,2)$ e $(1,0,-1)$. Tali vettori non sono proporzionali, quindi r e s non sono parallele. Per decidere se sono incidenti o sghembe, basta ora vedere qual è la loro intersezione $r \cap s$: se è un punto, sono incidenti; se è l'insieme vuoto, sono sghembe. Per studiare l'intersezione $r \cap s$, dobbiamo vedere se esistono due numeri t e u per i quali

$$\begin{cases} 3 + t = u \\ 1 + 3t = 1 \\ 2t = 1 - u \end{cases}$$

Si vede subito che siffatti numeri t e u non esistono. (Infatti, dalla seconda equazione si ha $t = 0$; sostituendo $t = 0$ nella prima equazione, si ricava $u = 3$, mentre sostituendo $t = 0$ nella terza equazione, si ricava $u = 1$.) Le due rette sono sghembe.

Esercizio 4.12

$Q \in r$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ per il quale si abbia $-1 + t = 1$, $-2t = \frac{1}{2}$, $1 + 3t = 3$. Queste tre equazioni non sono compatibili, quindi $Q \notin r$. Esiste allora un unico piano π contenente Q e r; per determinarlo si può usare il metodo del fascio. Equazioni cartesiane di r sono:

$$\begin{cases} y = -2(x+1) \\ z = 1 + 3(x+1) \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Un piano $\lambda(2x + y + 2) + \mu(3x - z + 4) = 0$ del fascio di sostegno r passa per $Q = (1, \frac{1}{2}, 3)$ se

$$0 = \lambda(2 + \frac{1}{2} + 2) + \mu(3 - 3 + 4) = \frac{9}{2}\lambda + 4\mu$$

Questa uguaglianza è verificata, ad esempio, per $\lambda = 8$ e $\mu = -9$. Il piano cercato ha dunque equazione
$11x - 8y - 9z + 20 = 0$.

Esercizio 4.13

(a) Poichè $P \notin r$, esiste un unico piano che contiene P e r. I piani che passano per la retta r hanno equazione

$$\lambda(x + y - z + 2) + \mu(2x - y + 5) = 0$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli. Il passaggio per $P = (-1, -3, 0)$ impone la condizione:

$$\lambda(-1 - 3 - 0 + 2) + \mu(-2 + 3 + 5) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad -2\lambda + 6\mu = 0$$

da cui si ricava, ad esempio, $\lambda = 3$, $\mu = 1$. Il piano cercato ha equazione $5x + 2y - 3z + 11 = 0$.
(b) Poichè $Q \in r$, ogni piano passante per r passa anche per Q. I piani richiesti sono quindi quelli del fascio di sostegno r, di equazione

$$\lambda(x+y-z+2)+\mu(2x-y+5) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad (\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y-\lambda z+2\lambda+5\mu = 0$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli.

Esercizio 4.14

Primo metodo.

Il piano π passante per P e perpendicolare alla retta r ha equazione $x - y + 2z - 3 = 0$. L'intersezione di π e r è il punto $H = \pi \cap r = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Allora $d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Secondo metodo.

La distanza cercata è $d(P, H)$ dove H è il punto della retta r che si trova a distanza minima da P. Se X un punto qualunque di r, allora $d(P, X) = |X - P| = \sqrt{(t-1)^2 + (1-t)^2 + (2t-1)^2}$. Posto $f(t) = |X - P|^2 = (t-1)^2 + (1-t)^2 + (2t-1)^2 = 6t^2 - 8t + 3$, il punto H si trova in corrispondenza del valore di t per il quale $f'(t) = 0$, cioè $f'(t) = 12t - 8 = 0$, $t = \frac{2}{3}$. Si ottiene $H = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ e $d(P, H) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Terzo metodo.

La distanza cercata è $d(P, H)$ dove H è il punto della retta r per il quale il vettore $H - P$ risulta ortogonale al vettore di direzione di r. Allora se $X = (t-1, -2t, 1+3t)$ è un punto qualunque di r si ha:

$$(X - P) \cdot (1, -1, 2) = 0$$

dove $(1, -1, 2)$ è il vettore di direzione di r. Si ottiene $t = \frac{2}{3}$, $H = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$, $d(P, H) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esercizio 4.15

Un vettore di direzione del piano π è $A \times B = (-1, -2, 6)$. Poichè $P \in \pi$ un'equazione cartesiana del piano è $-1(x-3) - 2(y+4) + 6(z-2) = 0$, cioè

$$x + 2y - 6z + 17 = 0$$

Esercizio 4.16

(a) Un vettore di direzione di r è $V = (1, -1, 1)$ mentre uno di s è $W = (2, -1, 1)$. Pertanto le due rette non sono parallele (V non è multiplo di W). Il punto $H = r \cap s$ (se esiste) si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t = 4 + 2u \\ 1 - t = -1 - u \\ t = 2 + u \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $t = 0$, $u = -2$. Sostituendo $t = 0$ nelle equazioni parametriche di r (oppure $u = -2$ nelle equazioni di s) si trova $H = r \cap s = (0, 1, 0)$.
(b) Il piano richiesto contiene H e un suo vettore di direzione è $V \times W = (0, 1, 1)$. L'equazione del piano è $0(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 0)$, cioè

$$y + z - 1 = 0$$

Esercizio 4.17
Il punto P non appartiene al piano π.

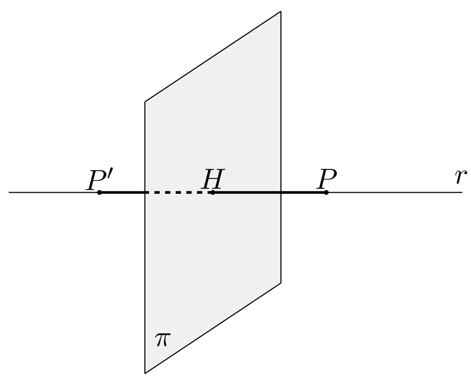

Figura 1

Le equazione parametriche della retta r passante per P e ortogonale a π sono

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = +1 - t \\ z = +3 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Il punto H intersezione del piano π e della retta r, si ottiene sostituendo il generico punto
$(-1 + 2t, +1 - t, +3 + t)$ di r nell'equazione del piano:

$$2(-1 + 2t) - 1 + t + 3 + t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

Sostituendo in (5.1) il valore trovato di t si ricava

$$H = (\pi \cap r) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{17}{6}\right)$$

Infine, il punto H (si osservi la figura) è il punto medio del segmento di estremi P e P'

$$H = \frac{P + P'}{2}$$

Quindi

$$P' = 2H - P = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Esercizio 4.18

1. Per trovare un vettore di direzione $\mathbf{v}_r$ della retta r è sufficiente determinare un punto (diverso dall'origine) della retta r' avente equazioni

   $$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

   Ponendo, ad esempio, $z = 2$ si ottiene: $y = 1$ e $x = -1$. Quindi un vettore di direzione di r è $\mathbf{v}_r = (-1, 1, 2)$.

   In modo analogo, un vettore di direzione $\mathbf{v}_s$ di s è un punto qualsiasi (diverso dall'origine) della retta s' di equazioni

   $$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   Posto $z = 2$, si ottiene $\mathbf{v}_s = (-1, 1, 2)$. Dunque le rette r, s sono parallele.

   Per verificare infine che le due rette sono distinte basta osservare, per esempio, che $P_0 = (1, 0, 0)$ appartiene a r ma non a s.

   Anche se non richiesto si osservi che il piano π di equazione $x+y-1 = 0$ è comune a entrambe le rette e, di conseguenza, tale piano le contiene entrambe.

2. *Primo metodo.*

   Sia P_0 un punto qualsiasi di r e P_1 un punto qualsiasi di s: per esempio $P_0 = (1, 0, 0)$ e $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Si osservi ora la seguente figura

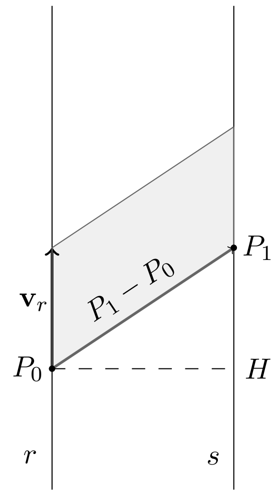

Figura 2

L'area del parallelogramma generato da $P_1 - P_0$ e $\mathbf{v}_r$ è

$$\|(P_1 - P_0) \times \mathbf{v}_r\|$$

Quindi la distanza P_0H tra le due rette è data da

$$d(P_0, s) = P_0H = \frac{\|(P_1 - P_0) \times \mathbf{v}_r\|}{\|\mathbf{v}_r\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Secondo metodo.

$P_0 = (1, 0, 0)$ è un punto della retta r, mentre le equazioni parametriche di s sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ora, si trovi il punto $P = (\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t, 2t)$ di s per il quale $P - P_0$ risulti ortogonale a $\mathbf{v}_r$.

Essendo $P - P_0 = (-\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t, 2t)$ si ottiene

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{v}_r = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

Pertanto il punto P di s che soddisfa la precedente condizione è $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. La distanza cercata è

$$d(P_0, P) = P_0P = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 4.19

1. $v_r = (-1, 1, 2)$ e $v_s = (1, 0, -1)$ sono due vettori di direzione di r e s; le loro componenti non sono proporzionali e pertanto le rette *non* sono parallele. Il punto di intersezione $r \cap s$, se esiste, è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 1-t & = & 1+u \\ t & = & -2 \\ 2t & = & 3-u \end{cases} \tag{5.2}$$

L'insieme delle soluzioni di questo sistema è vuoto, quindi r e s sono sghembe.

2. *Primo metodo.*

Si determini un vettore v di direzione ortogonale a v_r e v_s, per esempio

$$v = v_r \times v_s = (-1, +1, -1)$$

Un punto qualsiasi di r è $P = (1-t, t, 2t)$ mentre uno qualsiasi di s è $Q = (1+u, -2, 3-u)$. La retta cercata è la retta PQ avente per direzione v, si tratta quindi di determinare la coppia di punti (P, Q), il primo su r e il secondo su s, e un numero reale λ non nullo per i quali

$$Q - P = \lambda v \tag{5.3}$$

ossia

$$\begin{cases} u+t & = & -\lambda \\ -2-t & = & +\lambda \\ 3-u-2t & = & -\lambda \end{cases}$$

Con facili conti si ottiene:

$$\begin{cases} u &= +2 \\ \lambda &= -\frac{5}{3} \\ t &= -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Per $t = -\frac{1}{3}$ e per $u = 2$ si ricavano i punti cercati: $P = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ e $Q = (3, -2, 1)$; le equazioni parametriche della retta PQ sono

$$\begin{cases} x &= +3 + t' \\ y &= -2 - t' \\ z &= -1 + t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

Secondo metodo.

Sia v un vettore di direzione ortogonale a v_r e v_s. La retta ortogonale e incidente a r e s appartiene ai seguenti due piani:

α = `piano contenente la retta` r `e parallelo a` v

β = `piano contenente la retta` s `e parallelo a` v

Quindi la retta richiesta è l'itersezione $\alpha \cap \beta$ dei due piani. Per trovare l'equazione cartesiana di α si può fare così: si trovano le equazioni cartesiane di r

$$r: \quad \begin{cases} x + y - 1 &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani avente per sostegno r ha equazione

$$x + y - 1 + k(2y - z) = 0, \qquad k \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

il cui vettore di direzione è $(1, 1 + 2k, -k)$. Il piano α è il piano del fascio (5.4) che è parallelo a $v = (-1, +1, -1)$, quindi deve essere $(1, 1+2k, -k)\cdot(-1, +1, -1) = 0$, $-1+1+2k+k = 0$, $k = 0$. Sostituendo $k = 0$ in (5.4) si ottiene

$$\alpha: \qquad x + y - 1 = 0$$

Per determinare le equazioni cartesiane del piano β si procede in modo analogo. Ricavando u dalla prima delle equazioni parametriche di s e sostituendo tale valore nella terza si ottengono le seguenti equazioni cartesiane per s

$$s: \quad \begin{cases} x+z-4 & = 0 \\ y+2 & = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani avente per sostegno s ha equazione

$$x+z-4+k(y+2)=0, \qquad k \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

il cui vettore di direzione è $(1,k,1)$. Imponendo la condizione $(1,k,1)\cdot(-1,+1,-1)=0$ si ottiene $k=2$; quindi l'equazione cartesiana del piano β è

$$\beta: \qquad x+2y+z=0$$

La retta cercata è l'intersezione dei piani α e β, cioè

$$\begin{cases} x+y-1 & = 0 \\ x+2y+z & = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

È facile verificare (come?) che la retta di equazioni (5.6) è la stessa trovata con il metodo 1.

Terzo metodo. Un punto qualsiasi di r è $P(t)=(1-t,t,2t)$ mentre uno qualsiasi di s è $Q(u)=(1+u,-2,1-u)$. La retta PQ richiesta si trova determinando per quali valori dei parametri t,u il quadrato della distanza

$$\|P(t)-Q(u)\|^2$$

è minima. In altri termini bisogna determinare il minimo della funzione

$$F(t,u)=\|P(t)-Q(u)\|^2=(P(t)-Q(u))\cdot(P(t)-Q(u))$$

Il punto di minimo, che certamente esiste, si trova in corrispondenza della coppia di valori (t,u) per la quale $\nabla F(t,u)=0$, cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & 2P'(t)(P(t)-Q(u)) & = & 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial u} & = & 2Q'(u)(P(t)-Q(u)) & = & 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Interpretando t, u come parametri di tempo, i vettori $P'(t) = (-1, 1, 2)$ e $Q'(u) = (1, 0, -1)$ rappresentano le velocità (costanti) con cui due particelle descrivono le rette. Le soluzioni (t, u) del sistema (5.7) sono i tempi rispetto ai quali la retta PQ risulta perpendicolare ai due vettori velocità. Risolvendo il sistema si ottiene $u = \frac{2}{3}, t = -\frac{1}{3}$; con facili conti si trova per la retta cercata le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x & = & +3+t \\ y & = & -2-t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z & = & -1+t \end{cases}$$

come nel metodo 1.

Esercizio 4.20
Primo metodo.
Due vettori di direzione per le rette r e s sono, nell'ordine, $v_r = (-1, 1, 2)$ e $v_s = (1, 0, -1)$ mentre un vettore di direzione v, unitario e ortogonale a v_r e v_s, è

$$v = \frac{v_r \times v_s}{\|v_r \times v_s\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Indicati con P e Q due punti qualsiasi, rispettivamente su r e s, sia $\mathcal{P}_v(Q-P)$ la proiezione di $Q-P$ lungo v. Allora la distanza $d(r, s)$ tra le due rette sghembe r e s è

$$d(r, s) = \|\mathcal{P}_v(Q-P)\| = |(Q-P) \cdot v| \tag{5.8}$$

Per esempio, per $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, -2, 3)$ si ottiene

$$d(r, s) = \|(0, -2, 3) \cdot (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)\| = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

Secondo metodo.
Le rette r e s sono sghembe, quindi esistono due piani, diciamo π_1 e π_2, distinti e paralleli, il primo contenente r e il secondo contenente s. Per trovare

una equazione cartesiana di uno dei due piani occorre determinare (l'unica) direzione ortogonale a entrambe le rette di cui un vettore di direzione è $v = (-1, +1, -1)$.
L'equazione cartesiana del piano π_1 è $-1(x-1)+1(y-0)-1(z-0) = 0$, ossia

$$x - y + z - 1 = 0$$

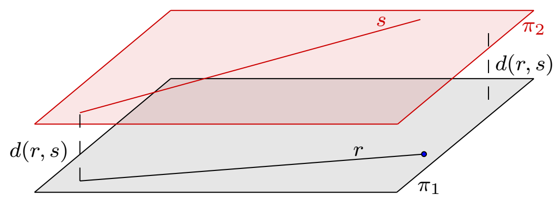

Figura 3: Due rette sghembe sono contenute in una coppia di piani paralleli. La distanza tra le due rette è la distanza tra i piani.

Allora per trovare la distanza $d(r, s)$ tra le rette r, s basta calcolare la distanza di un punto qualsiasi di π_2, per esempio $(1, -2, 3)$, dal piano π_1; si ottiene:

$$d(r, s) = \frac{|1 + 2 + 3 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$