Esercizi su curvatura e torsione.

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[1]

1 Brevi cenni di teoria

1.1 Curve parametrizzate alla lunghezza d'arco

Una *curva parametrizzata alla lunghezza d'arco* è una curva $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(s)$ per la quale $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$, per ogni s in I.

1. `Vettore velocità = Vettore tangente.` Si chiama vettore tangente $\mathbf{T}$ alla curva $\boldsymbol{\gamma}(s)$ in s il vettore

$$\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s) \tag{1.1}$$

$\mathbf{T}(s)$ è il vettore velocità. Esso va pensato come un vettore (unitario) applicato nel punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ e tangente alla curva $\boldsymbol{\gamma}$ in tale punto.

[1] Nome file: 'es_curvatura_2016.tex'

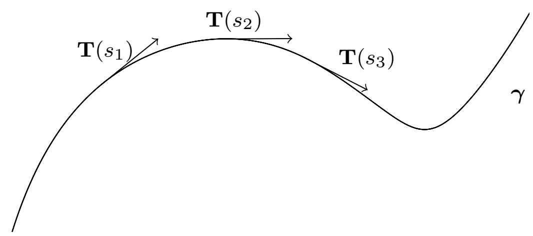

Figura 1

2. `Vettore accelerazione.` Il vettore accelerazione è il derivato di $\mathbf{T}$ rispetto a s, ossia

$$\boldsymbol{\gamma}''(s) = \mathbf{T}'(s) \tag{1.2}$$

3. Vettore velocità (il vettore tangente) e vettore accelerazione (il derivato di $\mathbf{T}$) sono ortogonali.

   Infatti $\|\mathbf{T}(s)\| = \boldsymbol{\gamma}'(s) = 1$, per ogni $s \in I$. Quindi

$$\|\mathbf{T}(s)\|^2 = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 1 \tag{1.3}$$

   Derivando (1.3) si ottiene: $2\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$.

4. `Vettore normale.` Si chiama vettore normale $\mathbf{N}$ alla curva $\boldsymbol{\gamma}(s)$ in s il vettore

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \tag{1.4}$$

   $\mathbf{N}(s)$ è un vettore unitario ortogonale a $\mathbf{T}(s)$ per ogni $s \in I$. Nei punti in cui $\|\mathbf{T}'(s)\| = 0$ il vettore normale non è definito.

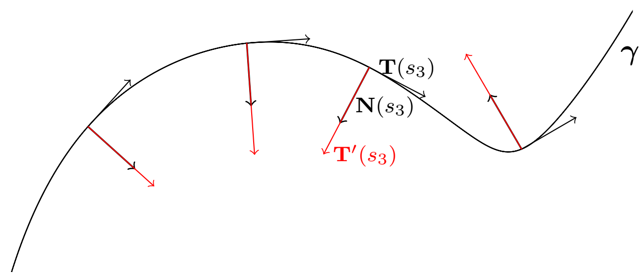

Figura 2

5. `Curvatura.` La curvatura della curva $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(s)$, in $s \in I$ è il modulo del vettore accelerazione

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\boldsymbol{\gamma}''(s)\| \tag{1.5}$$

La curvatura nel punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ misura la rapidità con cui il vettore tangente si discosta dalla direzione tangente in s.

6. `Vettore binormale.` Si chiama vettore binormale $\mathbf{B}$ alla curva $\boldsymbol{\gamma}(s)$ in s il vettore (unitario)

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{1.6}$$

1.2 Curve parametrizzate con parametri arbitrari.

Sia $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ una curva parametrizzata con parametro arbitrario t.

1. `Vettore tangente.` Il vettore velocità è

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|\, \mathbf{T}(t) \tag{1.7}$$

Posto $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = v$ si ha: $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{v}$.

2. `Componente tangenziale e componente normale dell'accelerazione.`

Se il modulo $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ del vettore velocità è costante allora il vettore velocità $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ e il vettore accelerazione $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ sono ortogonali.

Infatti se $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ è costante, per ogni t, si ha:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) = k(= \texttt{cost}) \tag{1.8}$$

Segue che $2\boldsymbol{\gamma}''(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) = 0$ ovvero $\boldsymbol{\gamma}'(t) \perp \boldsymbol{\gamma}''(t)$, per ogni t.

Se invece $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ varia al variare di t, il vettore accelerazione e il vettore velocità non sono ortogonali.

$$\boldsymbol{\gamma}''(t) = v'\,\mathbf{T} + v^2\kappa\,\mathbf{N} \tag{1.9}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}''(t) &= (v\mathbf{T})' \\
&= v'\mathbf{T} + v\,\underbrace{\mathbf{T}'(s)}_{\kappa\mathbf{N}}\,\underbrace{s'(t)}_{v} \\
&= v'\,\mathbf{T} + v^2\kappa\,\mathbf{N}
\end{aligned}$$

3. `Piano osculatore.` Dall'uguaglianza (1.9) si vede subito che il vettore accelerazione $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ appartiene al piano osculatore (il piano individuato da $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$). Pertanto il piano osculatore è il piano passante per il punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$ e parallelo ai vettori $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ e $\boldsymbol{\gamma}''(t)$.

4. `Il derivato di` $\mathbf{T}$ `è un multiplo di` $\mathbf{N}$`.`

   Infatti derivando il vettore tangente $\mathbf{T}$, rispetto a t, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'(t) &= \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{v}\right)' \\
&= -\frac{v'}{v^2}\boldsymbol{\gamma}'(t) + \frac{1}{v}\boldsymbol{\gamma}''(t)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

   Pertanto $\mathbf{T}'(t)$ appartiene al piano osculatore. Ricordando infine che $\boldsymbol{\gamma}''(t) = v'\,\mathbf{T} + v^2\kappa\,\mathbf{N}$, da (1.10) si ricava

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'(t) &= -\frac{v'}{v^2}\boldsymbol{\gamma}'(t) + \frac{1}{v}\left[v'\,\mathbf{T} + v^2\kappa\,\mathbf{N}\right] \\
&= \left[-\frac{v'}{v} + \frac{v'}{v}\right]\mathbf{T} + v\kappa\mathbf{N} \qquad \left(\text{Si ricordi che: } \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{v} = \mathbf{T}\right) \\
&= v\kappa\,\mathbf{N}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

5. `Vettore normale e vettore binormale.`

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \qquad\qquad \text{dove } \|\mathbf{T}'(t)\| = v\kappa \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\|}\end{aligned} \tag{1.12}$$

6. Per i vettori **T**, **N**, **B** valgono le seguenti uguaglianze

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t)\times\mathbf{B}(t), \qquad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t), \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$$

7. `Piano osculatore, normale e rettificante.` Si chiama *piano osculatore* il piano contenente **T** e **N**, *piano normale* quello contenente **N** e **B**, *piano rettificante* quello contenente **T** e **B**.

8. `Curvatura.` La curvatura $\kappa(t)$ della curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ in corrispondenza del valore t del parametro è

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t) &= v\,\mathbf{T}\times\big(v'\,\mathbf{T} + v^2\kappa\,\mathbf{N}\big) \\ &= v^3\kappa\,\mathbf{T}\times\mathbf{N} \\ &= v^3\kappa\,\mathbf{B}\end{aligned}$$

Quindi $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\| = v^3\kappa\,.$

9. La `torsione` $\tau(t)$ di $\boldsymbol{\gamma}(t)$ in t è

$$\tau(t) = -\frac{(\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\|^2} = -\frac{\det(\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\times\boldsymbol{\gamma}'''(t))}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\|^2}$$

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Si consideri la curva di equazioni parametriche*

$$\gamma(t) = \left(\cos t^2\right)\mathbf{i} + \left(\sin t^2\right)\mathbf{j}$$

con $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.

(a) *Di quale curva si tratta?*

(b) *Scrivere il campo* $\gamma'(t)$ *dei vettori velocità e il campo* $\gamma''(t)$ *dei vettori accelerazione.*

(c) *Quali sono i vettori velocità e accelerazione nel punto di* γ *corrispondente a* $t = \sqrt{\pi}$*? I due vettori sono ortogonali? Spiegare.*

(d) *Determinare in un generico punto di* γ *i vettori* $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ *(tangente, normale e binormale) e la curvatura* $\kappa(t)$.

Soluzione.

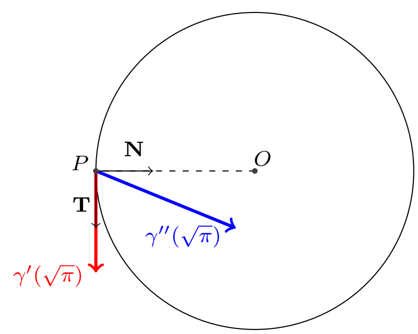

Figura 3: In un moto circolare *non* uniforme il vettore velocità e il vettore accelerazione non sono ortogonali.

(a) γ *è la circonferenza con centro nell'origine e raggio* 1*, contenuta nel piano* xy .

(b) *Il campo dei vettori velocità è*

$$\gamma'(t) = \left(-2t\sin t^2, 2t\cos t^2, 0\right)$$

Il modulo del vettore velocità è

$$\|\gamma'(t)\| = 2t$$

pertanto la velocità con cui una particella descrive la circonferenza γ è variabile in intensità (e ovviamente anche in direzione). Il campo dei vettori accelerazione è

$$\gamma''(t) = 2\left(-\sin t^2 - 2t^2\cos t^2, \cos t^2 - 2t^2 sint^2, 0\right)$$

(c) *Il punto della circonferenza γ corrispondente a $t = \sqrt{\pi}$ è $P = (-1, 0, 0)$. Velocità e accelerazione in P sono dati da $\gamma'(\sqrt{\pi}) = (0, -2\sqrt{\pi}, 0)$ e $\gamma''(\sqrt{\pi}) = (4\pi, -2, 0))$.*

Il prodotto scalare $\gamma'(\sqrt{\pi}) \cdot \gamma''(\sqrt{\pi}) \neq 0$ quindi i due vettori non sono ortogonali.

(d) *Il vettore tangente $\mathbf{T}$ è dato da*

$$\mathbf{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (-\sin t^2, \cos t^2, 0)$$

Il vettore binormale è $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ (la curva è contenuta nel piano $z = 0$) mentre il vettore normale è $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (-\cos t^2, -\sin t^2, 0)$. Infine la curvatura della circonferenza di raggio R è

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{\|(0, 0, 8t^3)\|}{(2t)^3} = 1$$

Più in generale, la curvatura della circonferenza di raggio R in un suo punto qualsiasi è

$$\kappa(t) = \frac{1}{R}$$

qualunque sia la parametrizzazione utilizzata.

N.B.

Il vettore normale $\mathbf{N}$ si può calcolare anche dall'uguaglianza $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$; si ottiene:

$\mathbf{T}'(t) = (-\frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})\sqrt{1+e^{2t}}}, \frac{e^{t}}{(1+e^{2t})\sqrt{1+e^{2t}}}, 0)$, $\mathbf{T}'(0) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$. *Infine, normalizzando, si ricava* $\mathbf{N}(0) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

Esercizio 2.2. *Si consideri la curva di equazioni parametriche*

$$\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & 2e^t \\ y(t) = & 2+t-e^t \\ z(t) = & 1-te^t \end{cases}$$

(a) Trovare i vettori $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ *in corrispondenza di* $t=0$.

(b) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano osculatore contenente il punto $\gamma(0)$.

Soluzione.

(a) Il punto di γ corrispondente a $t=0$ è $\gamma(0)=(2,1,1)$.

Vettore velocità : $\gamma'(t)=(2e^t, 1-e^t, -e^t-te^t)$, $\gamma'(0)=(2,0,-1)$.

Vettore tangente in $t=0$:

$$\mathbf{T}(0)=\frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|}=\left(+\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Vettore accelerazione: $\gamma''(t)=(2e^t,-e^t,-2e^t-te^t)$, $\gamma''(0)=(2,-1,-2)$.

Vettore binormale: $\mathbf{B}(0)=\frac{\gamma'(0)\times\gamma''(0)}{|\gamma'(0)\times\gamma''(0)|}$. $\gamma'(0)\times\gamma''(0)=(-1,+2,-2)$ e

$$\mathbf{B}(0)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Vettore normale in $t=0$: $\mathbf{N}(0)=\mathbf{B}(0)\times\mathbf{T}(0)=(-\frac{2}{3\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{4}{3\sqrt{5}})$

(b) $\gamma'(0)\times\gamma''(0)$ è un vettore di direzione del piano osculatore π, contenente $\gamma(0)$; una sua equazione cartesiana è $-1(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0$, ossia

$$x-2y+2z-2=0$$

Esercizio 2.3. *Si consideri la curva di equazioni parametriche*

$$\gamma(t): \quad \begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & t^2 \\ z(t) = & t^2 + \sin(t^2 - 1) \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano osculatore nel punto relativo a $t = 1$.

Soluzione.
Le coordinate del punto P della curva in $t = 1$ sono

$$P = \gamma(1) = (1, 1, 1)$$

Vettore velocità in P:

$$\gamma'(t) = \big(1, 2t, 2t + 2t\cos(t^2 - 1)\big); \quad \gamma'(1) = (1, 2, 4));$$

Vettore accelerazione in P:

$$\gamma''(t) = \big(0, 2, 2 + 2\cos(t^2 - 1) - 4t^2\sin(t^2 - 1)\big); \quad \gamma''(1) = (0, 2, 4);$$

Il piano osculatore richiesto passa per il punto P della curva γ e ha vettore di direzione

$$\gamma'(1) \times \gamma''(1) = (0, -4, 2)$$

Pertanto l'equazione del piano osculatore è $0(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) = 0$, cioè

$$2y - z - 1 = 0$$

Problema 2.4. *Sia $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva parametrizzata e $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ un suo punto. Determinare l'equazione della circonferenza osculatrice alla curva $\boldsymbol{\gamma}$ in t_0.*

Soluzione.

Un possibile procedimento consiste nel determinare, nell'ordine

$$
\begin{array}{llcll}
1) & \text{il versore tangente} & \mathbf{T}(t_0) & = & \dfrac{\boldsymbol{\gamma}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t_0)\|} \\[2ex]
2) & \text{il versore binormale} & \mathbf{B}(t_0) & = & \dfrac{\boldsymbol{\gamma}'(t_0) \times \boldsymbol{\gamma}''(t_0)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t_0) \times \boldsymbol{\gamma}''(t_0)\|} \\[2ex]
3) & \text{il versore normale} & \mathbf{N}(t_0) & = & \mathbf{B}(t_0) \times \mathbf{T}(t_0) \\[2ex]
4) & \text{la curvatura} & \kappa(t_0) & = & \dfrac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t_0) \times \boldsymbol{\gamma}''(t_0)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t_0)\|^3} \\[2ex]
5) & \text{il raggio di curvatura} & R_0 & = & \dfrac{1}{\kappa(t_0)} \\[2ex]
6) & \text{il centro di curvatura} & C & = & P_0 + R_0\mathbf{N}
\end{array}
$$

L'equazione della circonferenza osculatrice è data dall'intersezione del piano osculatore con la sfera di centro C e raggio R_0. Ovvero

$$
\begin{cases} b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) = 0 \\ (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = R_0^2 \end{cases}
$$

dove $\mathbf{B}(t_0) = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

Esercizio 2.5. *Si consideri la funzione*

$$
\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = e^x
$$

Trovare:

1. *le componenti del versore tangente, normale e binormale al grafico di f in $x = 0$;*

2. *l'equazione della circonferenza osculatrice in $x = 0$.*

Soluzione.

1. Una parametrizzazione di f è

$$
\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, e^t, 0)
$$

con $t \in \mathbb{R}$. Il punto di $\boldsymbol{\gamma}$ corrispondente a $t = 0$ è $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1, 0)$; il vettore velocità e il versore tangente $\mathbf{T}$ in P_0 sono, nell'ordine

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = (1, 1, 0)$$

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(0)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(0)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Per ogni t in $\mathbb{R}$ il vettore accelerazione è $\boldsymbol{\gamma}''(t) = (0, e^t, 0)$ e

$$\boldsymbol{\gamma}''(0) = (0, 1, 0)$$

Per ogni t in $\mathbb{R}$ il versore binormale è costante: $\mathbf{B}(t) = (0, 0, 1)$ (la curva $\boldsymbol{\gamma}$ è tutta contenuta nel piano xy) mentre il versore normale è

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

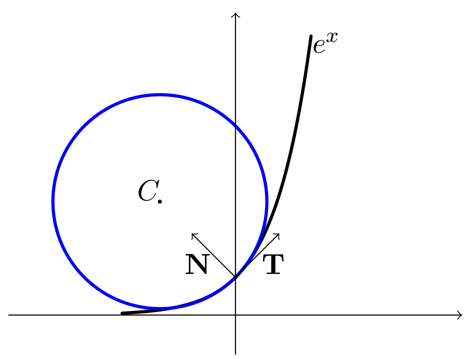

Figura 4: Circonferenza osculatrice al grafico di $y = e^x$ in $(0, 1, 0)$.

2. La curvatura $\kappa(0)$ di γ in $t = 0$ è

$$\kappa(0) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(0) \times \boldsymbol{\gamma}''(0)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(0)\|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Il centro C di curvatura è

$$C = P_0 + \frac{1}{\kappa(0)}\,\mathbf{N} = (-2, 3, 0)$$

L'equazione della circonferenza osculatrice è

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.6 (Polimi, seconda prova in itinere, 31 gennaio 2011)**.** *Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni parametriche*

$$\mathbf{r}(t) = (t^4 + t^2 - t)\mathbf{i} + (t^5 + t)\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) *Stabilire se $\mathcal{C}$ è semplice.*

(b) *Determinare il versore tangente $\mathbf{T}$ e il versore normale $\mathbf{N}$ in $P(0;0)$.*

(c) *Determinare l'equazione del cerchio osculatore in $P(0;0)$.*

Soluzione.

(a) La curva $\mathcal{C}$ è semplice se $\mathbf{r}(t)$ è iniettiva. Si osservi che la seconda componente di $\mathbf{r}(t)$, cioè $y(t) = t^5 + t$, è monotona. Infatti la derivata $y'(t) = 5t^4 + 1$ è positiva per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Segue che $\mathbf{r}(t)$ è iniettiva ($\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$).

(b) È immediato verificare che $\mathcal{C}$ passa per il punto $P_0 = (0,0,0)$ quando $t = 0$. Inoltre $\mathbf{r}'(0) = (-1,1,0)$ e $\mathbf{r}''(0) = (2,0,0)$.

Il vettore tangente in $t = 0$ è $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(0)}{\|\mathbf{r}'(0)\|} = (-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

Il vettore binormale in $t = 0$ è $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)}{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|} = (0,0,-1)$

Il vettore normale in $t = 0$ è $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

(c) La curvatura di $\mathcal{C}$ in P_0 vale

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|}{\|\mathbf{r}'(0)\|^3} = \frac{\|(0,0,-2)\|}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il raggio di curvatura è $R = \sqrt{2}$ mentre il centro di curvatura è

$$C = P_0 + R\,\mathbf{N} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = (1,1,0)$$

L'equazione del cerchio osculatore è

$$
\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}
$$

Osservazione
Data una curva parametrizzata $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, il vettore normale $\mathbf{N}(t_0)$ si può trovare anche nel seguente modo: sia $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ il punto di $\boldsymbol{\gamma}$ corrispondente a $t = t_0$; il vettore velocità e il vettore accelerazione sono, nell'ordine, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ e $\mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma}''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))$.

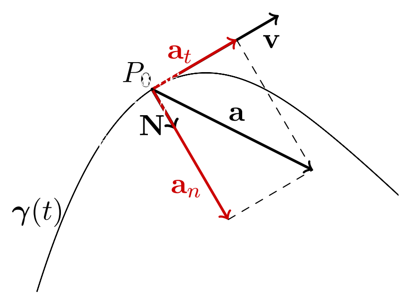

Figura 5: Normalizzando $\mathbf{a}_n$ si trova $\mathbf{N}$

La componente tangenziale $\mathbf{a}_t$ dell'accelerazione è la proiezione ortogonale di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{v}$, ossia

$$
\mathbf{a}_t = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\, \mathbf{v}
$$

mentre la componente normale $\mathbf{a}_n$ dell'accelerazione è la differenza tra $\mathbf{a}$ e la proiezione ortogonale di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{v}$:

$$
\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\, \mathbf{v}
$$

Pertanto il vettore $\mathbf{N}(t_0)$ è il normalizzato della componente normale dell'accelerazione.

$$
\mathbf{N}(t_0) = \frac{\mathbf{a}_n}{\|\mathbf{a}_n\|}
$$

Esercizio 2.7. *Sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x(t) & = 1 - \cos t + (2-t)\sin t \\ y(t) & = \sin t + (2-t)\cos t \qquad\qquad t \in [-2,2] \\ z(t) & = \frac{1}{2}(2-t)^2 \end{cases}$$

Trovare il vettore tangente e il vettore normale nel punto $P_0 = (0,2,2)$.

Soluzione.
È facile verificare che a $t = 0$ corrisponde il punto $P_0 = (0,2,2)$. Il vettore velocità è

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{cases} x'(t) & = (2-t)\cos t \\ y'(t) & = -(2-t)\sin t \qquad\qquad t \in [-2,2] \\ z'(t) & = -(2-t) \end{cases}$$

e $\mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}'(0) = (2,0,-2)$. Il vettore tangente in $t = 0$ si ottiene normalizzando $\boldsymbol{\gamma}'(0)$:

$$\mathbf{T}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,0,-2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Il vettore accelerazione è

$$\boldsymbol{\gamma}''(t) = \begin{cases} x''(t) & = -\cos t - (2-t)\sin t \\ y''(t) & = \sin t - (2-t)\cos t \qquad\qquad t \in [-2,2] \\ z''(t) & = 1 \end{cases}$$

e $\mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma}''(0) = (-1,-2,1)$. La componente normale dell'accelerazione è

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = (-1,-2,1) - \frac{(2,0,-2)\cdot(-1,-2,1)}{(2,0,-2)\cdot(2,0,-2)}\,(2,0,-2) = (0,-2,0)$$

Normalizzando $\mathbf{a}_n$ si trova $\mathbf{N}(0)$, ossia

$$\mathbf{N}(0) = \frac{\mathbf{a}_n}{\|\mathbf{a}_n\|} = (0,-1,0)$$

Esercizio 2.8. *Verificare che la curvatura di una circonferenza di raggio R vale $\frac{1}{R}$.*

Esercizio 2.9. *Trovare la lunghezza della curva* $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\quad 0 \le t \le 2\pi$.

Problema 2.10. *La curva di equazioni parametriche*

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

è piana?

Alcuni procedimenti che consentono di dare una risposta al problema sono esposti nei due esercizi seguenti

Esercizio 2.11. *Stabilire se la curva di equazioni parametriche*

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2}t^2 + 1 \\ y(t) &= t^3 + t + 3 \\ z(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \sqrt{3} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

è piana. In caso affermativo trovare l'equazione del piano che contiene la curva.

Soluzione.

Un modo per stabilire se la curva è piana consiste nel trovare, in corrispondenza di un valore prescelto di t (diciamo $t = t_0$), l'equazione del piano osulatore π_0. Se, per ogni valore di t, $\boldsymbol{\gamma}$ appartiene al piano π_0 la curva è piana, altrimenti no.

Posto $t_0 = 0$, si ottiene

$\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 3, \sqrt{3})$.

$\boldsymbol{\gamma}'(t) = (t, 3t^2 + 1, \sqrt{3}t)$, $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (0, 1, 0)$.

$\boldsymbol{\gamma}''(t) = (1, 6t, \sqrt{3})$, $\boldsymbol{\gamma}''(0) = (1, 0, \sqrt{3})$.

Un vettore di direzione di π_0 è dato da $\boldsymbol{\gamma}'(0) \times \boldsymbol{\gamma}''(0) = (\sqrt{3}, 0, -1)$ e l'equazione del piano osculatore è $\sqrt{3}\,(x - 1) + 0\,(y - 3) - 1\,(z - \sqrt{3}) = 0$, ossia $\sqrt{3}\,x - z = 0$. Infine, è immediato verificare che $\boldsymbol{\gamma}$ appartiene a π_0, per ogni t (bisogna sostituire le coordinate di $\boldsymbol{\gamma}(t)$ nell'equazione del piano e verificare che l'uguaglianza è vera per ogni t). Segue che la curva è piana.

Esercizio 2.12 (Tratto da: Polimi, seconda prova in itinere, 4 febbraio 2013)**.** *Data la famiglia di curve* $\boldsymbol{\gamma}_a$ *di* $\mathbb{R}^3$*, dipendenti dal parametro* $a \in \mathbb{R}$*, di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \\ z = at^3 + t^2 + 2t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. determinare il valore a del parametro per il quale $\boldsymbol{\gamma}_a$ è piana;

2. determinare il piano π contenente $\boldsymbol{\gamma}_a$.

Soluzione.

1. Derivando due volte $\boldsymbol{\gamma}_a(t)$ rispetto a t si ottiene: $\boldsymbol{\gamma}'_a(t) = (2t, 1, 3at^2 + 2t + 2)$, $\boldsymbol{\gamma}''_a(t) = (2, 0, 2 + 6at)$,

   $\boldsymbol{\gamma}'_a(t) \times \boldsymbol{\gamma}''_a(t) = (2 + 6at, 4 - 6at^2, -2)$.

   Per trovare quali curve sono piane il metodo più rapido è osservare che una curva è piana se e solo se il vettore $\boldsymbol{\gamma}'_a(t) \times \boldsymbol{\gamma}''_a(t)$ è multiplo di un vettore costante cioè

   $$\boldsymbol{\gamma_a} \text{ è piana} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\gamma}'_a \times \boldsymbol{\gamma}''_a = \varphi(t)\mathbf{V}$$

   dove $\mathbf{V}$ è un vettore costante. In questo caso segue immediatamente $a = 0$.

   Un secondo metodo (più precisamente, una variante del metodo precedente) consiste nel determinare, per quali a in $\mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{B}(t)$ è costante. Si ottiene

   $$\mathbf{B}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'_a(t) \times \boldsymbol{\gamma}''_a(t)}{\| [\boldsymbol{\gamma}'_a(t) \times \boldsymbol{\gamma}''_a(t)] \|} = \frac{(2 + 6at, 4 - 6at^2, -2)}{\sqrt{(2 + 6at)^2 + (4 - 6at^2)^2 + 4}}$$

   Quindi $\mathbf{B}(t)$ è costante per $a = 0$.

   Infine, un terzo metodo risolutivo consiste nel trovare per quali a in $\mathbb{R}$, il generico piano di equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ contiene la curva $\boldsymbol{\gamma}_a$. In questo caso occorre sostituire le coordinate di $\boldsymbol{\gamma}_a(t)$ nell'equazione del piano

   $$Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0 \tag{2.1}$$

   e poi determinare quattro valori di A, B, C, D (non tutti nulli) che soddisfano l'equazione (2.1) per ogni $t \in \mathbb{R}$. Qualunque sia il procedimento seguito si trova che l'unica curva piana tra le curve $\boldsymbol{\gamma}_a(t)$ è

   $$\boldsymbol{\gamma}_0(t) = \left(t^2, t + 1, (t + 1)^2\right)$$

2. Per determinare un punto di $\boldsymbol{\gamma}_0$ basta porre, per esempio, $t = -1$. Si trova $P = (1, 0, 0)$.

   Inoltre $\boldsymbol{\gamma}_0'(-1) \times \boldsymbol{\gamma}_0''(-1) = (2, 4, -2)$. Pertanto l'equazione del piano π che contiene la curva è $2(x-1) + 4y - 2z = 0$, ovvero

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

Esercizio 2.13. *Sia C l'elica cilindrica di equazioni parametriche*

$$x = a\cos\omega t,\ y = a\sin\omega t,\ z = b\omega t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove $a > 0$ e b sono fissati.

a) Determinare ω in modo tale che $\|C'(t)\| = 1$.

b) Scrivere, per ogni $t \in \mathbb{R}$, le componenti dei vettori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ (tangente, normale, binormale).

c) Trovare la curvatura k di C.

d) Determinare la torsione τ di C (Si ricordi che τ è definita da: $B' = \tau N$).

Soluzione.

a) $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

b) $T = (-a\omega\sin\omega t, a\omega\cos\omega t, b\omega)$, $N = (-\cos\omega t, -\sin\omega t, 0)$, $B = (b\omega\sin\omega t, -b\omega\cos\omega t, a\omega)$ con $\omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

c) La curvatura dell'elica è $k = a\omega^2$, con $\omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

d) $B' = \dfrac{dB}{dt} = (b\omega^2\cos\omega t, b\omega^2\sin\omega t, 0) = -b\omega^2 N$. La torsione è $\tau = -b\omega^2$, (con $\omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

Esercizio 2.14. *Si consideri l'elica cilindrica di equazioni parametriche*

$$C(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t,\ \frac{4}{5}\sin t,\ \frac{3}{5}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Verificare che $\|C'(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

b) Scrivere, per ogni $t \in \mathbb{R}$, le componenti dei vettori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ (tangente, normale, binormale) rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbb{R}^3$.

c) Trovare curvatura e torsione di $C = C(t)$.

Soluzione.

b) $T = (-\frac{4}{5}\sin t, \frac{4}{5}\cos t, \frac{3}{5})$, $N = (-\cos t, -\sin t, 0)$, $B = (\frac{3}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5})$.

c) Curvatura: $\kappa = \frac{4}{5}$. Torsione: $\tau = -\frac{3}{5}$.

Esercizio 2.15. *Si consideri la curva C di equazioni parametriche*

$$C(t) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ -\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\Big), \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Verificare che $\|C'(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

b) Scrivere, per ogni $t \in \mathbb{R}$, le componenti dei vettori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ (tangente, normale, binormale).

c) Trovare curvatura e torsione di $C = C(t)$.

Soluzione.
b) $T = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, -\cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)$, $N = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$, $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
c) Curvatura: $\kappa = 1$. Torsione: $\tau = 0$ (la curva sta nel piano di equazione $x - z = 0$).

Esercizio 2.16. *Una particella si muove lungo la curva di equazioni parametriche*

$$\boldsymbol{r}(t) = 3\cos t\ \boldsymbol{i} - 2t\,\boldsymbol{j} + \sin t\,\boldsymbol{k}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova nel punto P.
a) Determinare le equazioni parametriche della retta s tangente alla curva C nel punto P.
b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene P ed è ortogonale alla retta s.

Esercizio 2.17. *Sia γ la curva di equazioni parametriche*

$$\gamma(t) = \Big(2e^t,\ 2 + t - e^t,\ 1 - te^t\Big), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Determinare nel punto P_0 di γ corrispondente a $t = 0$

1. *il piano osculatore π_0.*
2. *il versore normale.*
3. *la curvatura e il raggio di curvatura.*
4. *il centro di curvatura.*
5. *equazioni cartesiane del cerchio osculatore.*

Soluzione.
Il punto di γ corrispondente a $t = 0$ è $P_0 = (2, 1, 1)$.

$$\gamma'(t) = (2e^t,\ 1 - e^t,\ -e^t - te^t), \qquad \gamma'(0) = (2,\ 0,\ -1)$$

$$\gamma''(t) = (2e^t,\ -e^t,\ -2e^t - te^t), \qquad \gamma''(0) = (2,\ -1,\ -2)$$

Un vettore di direzione del piano osculatore richiesto è

$$\gamma'(0) \times \gamma''(0) = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 2, -2)$$

Quindi una equazione cartesiana del piano osculatore passante per P_0 è

$$-(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$$

ossia

$$x - 2y + 2z - 2 = 0$$