Esercizi con i teoremi di de L'Hôpital e la formula di Taylor.

Mauro Saita

e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2015

Esercizi proposti durante le esercitazioni del corso di "Analisi e Geometria 1", Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale (Docente: Federico G. Lastaria).

Indice

[1]

[1] File .tex: es_Hopital_Taylor_2015.tex

1 Formula di Taylor.

Il teorema di Lagrange si generalizza nel modo seguente.

Teorema 1.1 (Formula di Taylor)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo* I *dell'asse reale, con derivate continue fino all'ordine* $n+1$ *e siano* t_0, t *due punti interni a* I*. Allora esiste un punto* ξ*, compreso tra* t *e* t_0*, per il quale vale l'uguaglianza:*

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \quad (1.1)$$

Utilizzando la formula d Taylor, si può scrivere la funzione $f(t)$ come somma

$$f(t) = P_n + R_{n+1}$$

dove

$$P_n(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$$

è chiamato il *polinomio di Taylor di grado* n *di* f*, centrato in* t_0 e

$$R_{n+1}(t) = f(t) - P_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

è chiamato il *resto di ordine* $n+1$.

Il resto R_{n+1} è un infinitesimo, per t che tende a t_0, di ordine superiore rispetto a $(t-t_0)^n$, cioè

$$\lim_{t \to t_0} \frac{R_{n+1}(t)}{(t-t_0)^n} = 0 \quad (1.2)$$

1.1 Alcune formule di Taylor, centrate in $t_0 = 0$, con il resto secondo Peano

Esponenziale

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n) \tag{1.3}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Seno e coseno

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1}) \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n}) \end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Tangente

$$\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + o(t^6)$$

per ogni t, $|t| < \frac{\pi}{2}$.

Potenza di un binomio

$$\begin{aligned} (1+t)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1} t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n) \\ &= 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n) \end{aligned}$$

per ogni t, $|t| < 1$.

$\ln(1+t)$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n + o(t^n)$$

per ogni t, $|t| < 1$.

Arcoseno, arcotangente

$$\begin{aligned} \arcsin t &= t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{20}t^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} t^{2n+1} + o(t^{2n+1}) \\ \arctan t &= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} + o(t^{2n+1}) \end{aligned}$$

per ogni t, $|t| < 1$

Coseno iperbolico, seno iperbolico

$$\begin{aligned} \cosh t &= 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n}) \\ \sinh t &= t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1}) \end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2 Esercizi

Esercizio 2.1 (**Confronto di infiniti e di infinitesimi con le regole di de l'Hôpital.**). *Utilizzando le regole di de L'Hôpital, calcolare i seguenti limiti*

1. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^3 x}{e^x}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln^3 x}$

Con *approssimazione di ordine n di f nel punto x_0* si intende il polinomio di Taylor di grado n, centrato in x_0.

Esercizio 2.2. *Trovare l'approssimazione al primo ordine di $\sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 1$.*

Esercizio 2.3. *Trovare l'approssimazione di ordine 4 di $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $x_0 = 0$.*

Esercizio 2.4. *Trovare l'approssimazione di ordine 4 di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in $x_0 = 0$.*

Esercizio 2.5. *Trovare l'approssimazione di ordine 4 di $f(x) = \sin^2 x$ in $x_0 = 0$.*

Esercizio 2.6. *Trovare l'approssimazione di ordine 3 di $f(x) = e^x$ in $x_0 = 2$. Qual è la parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, che meglio approssima il grafico di $f(x) = e^x$ in $x_0 = 2$?*

Esercizio 2.7. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2, centrato in $x_0 = 0$, della funzione*

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Esercizio 2.8. *Nell'intervallo $[0, \pi/4]$, approssimiamo $\sin x$ con il polinomio di Taylor di ordine 3*

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Dare una stima dell'errore che si compie.

Esercizio 2.9. *Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.*
Qual è la parabola $y = ax^2 + bx + c$ che meglio approssima $f(x)$ vicino a $x_0 = 0$?

Esercizio 2.10. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2, centrato in $x_0 = 2$, della funzione*

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x^2 - 1)$$

Esercizio 2.11. *Usando opportuni sviluppi in serie, scrivere il polinomio di Taylor di grado 2, centrato in $x_0 = 0$, della funzione*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{2x} \cos 3x$
2. $(-1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + e^x) \ln(1 + x)$

Esercizio 2.12. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2 + 2x^4}$*

Esercizio 2.13. *Utilizzando gli sviluppi in serie di Taylor, calcolare i seguenti limiti.*

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x \sin 2x}$

Esercizio 2.14. *Utilizzando la tecnica che si ritiene più opportuna, calcolare i seguenti limiti.*

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sinh x - x}$
2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{\tan x^4}$
3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$
4. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{x}{2}}{(4 - x^2)^2}$
5. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)\right)$

Esercizio 2.15. *È data la funzione*

$$(-1, +1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \;\; f(x) = e^{2x} - \ln(1 + \sin x) + \sqrt{1 + x^3}$$

1. *Scrivere la formula di Maclaurin di ordine* 3, *con resto di Peano, di* $f(x)$.
2. *Senza fare conti, trovare* $f'''(0)$.
3. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di* f *nel punto* $(0, 2)$.

4. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale della funzione*

$$(-1,+1) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \;\; g(x) = -2 - x + f(x)$$

per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$.

Esercizio 2.16. *Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^{\frac{1}{3}x}}{[\ln(1+x)]^{\alpha}}$$

Esercizio 2.17.

1. *Scrivere la serie di Maclaurin di ordine quattro con resto secondo Peano di*

$$\ln(\cos x) \qquad e \qquad \sqrt{1+x^2}$$

2. *In corrispondenza di ogni valore del parametro reale α determinare il valore del seguente limite*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{[\arctan x]^{\alpha}}$$

Esercizio 2.18. *Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per x che tende a 0, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$, delle seguenti funzioni:*

1. $$f(x) = \frac{\cos 2x + \ln(1+4x^2)}{\cosh 2x} - 1$$

2. $$f(x) = \frac{\sqrt{x^3} - \sin^3 \sqrt{x}}{e^{3\sqrt{x}} - 1}$$

3 Soluzioni.

Esercizio 2.1

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^3 x}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$

4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\ln^3 x} = +\infty$

Esercizio 2.2 $1 + \frac{1}{3}(x-1)$

Esercizio 2.3 $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4.$

Esercizio 2.4 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$

Esercizio 2.5 $x^2 - \frac{x^4}{3}$

Esercizio 2.6 $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3$. La parabola che meglio approssima il grafico di $f(x) = e^x$ in $x_0 = 2$ è $y = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2$.

Esercizio 2.7 $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2.$

Esercizio 2.8 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5$
dove ξ è un numero reale tra 0 e $\frac{\pi}{4}$ che varia al variare di x (formula di Taylor con resto secondo Lagrange). Per stimarare l'errore bisogna trovare un'opportuna maggiorazione del resto, ad esempio

$$|\frac{\cos\xi}{5!}x^5| \leq \frac{(\pi/4)^5}{5!} \simeq 0,0024$$

Esercizio 2.9

a) Poiché $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$, la funzione f è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

b) Sviluppando in serie si ottiene:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} = (x+1)e^{-x} = (x+1)(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + ..) = x - x^2 + 1 - x + \frac{x^2}{2} + ... = 1 - \frac{x^2}{2} + ...$$

dove i termini che sono stati omessi sono infinitesimi di ordine maggiore di due, per $x \to 0$. Segue che l'approssimazione quadratica di f in 0 è $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

c) C'è un solo punto di massimo locale: $x_0 = 0$. $f(x_0) = f(0) = 1$.

Esercizio 2.10 $\ln 3 + \frac{4}{3}(x-2) - \frac{5}{9}(x-2)^2$

Esercizio 2.11

1. $P_2(x) = 1 + 2x - \frac{5}{2}x^2$
2. $P_2(x) = 2x$

Esercizio 2.12 $P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$.

Esercizio 2.13

1. Essendo $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$, si ottiene: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$. Quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.
2. Da $e^x = 1 + x + o(x)$, $\quad e^{-x} = 1 - x + o(x)$ segue
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{3}{2}$.

Esercizio 2.14

1.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sinh x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{\tan x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1} \\
&= \frac{\left(x \arctan x - \frac{x^2 \arctan^2 x}{2} + o(x^4)\right) + 1 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4) - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1} = -\frac{4}{3}
$$

4. *Primo modo.*

Posto $t = x - 2$, con gli sviluppi in serie di Taylor, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{x}{2}}{(4 - x^2)^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi(2 + t) - \frac{3}{2}\pi \ln(1 + \frac{t}{2})}{(-4t - t^2)^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{3}{4}\pi t - \frac{3}{2}\pi \ln(1 + \frac{t}{2})}{(-4t - t^2)^2} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{3}{4}\pi t - \frac{3}{4}\pi t + \frac{3}{16}\pi t^2 + o(t^2)}{16t^2 + o(t^2)} \\
&= \frac{3}{256}\pi
\end{aligned}
$$

Secondo modo.

Con la regola di de L'Hôpital, iterando due volte, si ottiene:

$$
\lim_{x \to 2} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{x}{2}}{(4 - x^2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{-\frac{3}{4}\pi \sin \frac{3}{4}\pi\, x - \frac{3}{2\,x}\pi}{-4x(4 - x^2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-\frac{9}{16}\pi^2 \cos \frac{3}{4}\pi\, x + \frac{3}{2}\frac{\pi}{x^2}}{-16 + 12x^2} = \frac{3}{256}\pi
$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{3}{4}\pi x-\frac{3}{2}\pi\ln\frac{x}{2}}{(4-x^2)^2} &= \lim_{x\to 2}\frac{-\frac{3}{4}\pi\sin\frac{3}{4}\pi\, x-\frac{3}{2\,x}\pi}{-4x(4-x^2)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{3}{4}\pi t-\frac{3}{2}\pi\ln(1+\frac{t}{2})}{(-4t-t^2)^2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{3}{4}\pi t-\frac{3}{4}\pi t+\frac{3}{16}\pi t^2+o(t^2)}{16t^2+o(t^2)}\\
&= \frac{3}{256}\pi
\end{aligned}$$

5. Si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x-x^2\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x-x^2\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^2})\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x-x^2\left(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^2})-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^2})\right)^2\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x-x+o(1)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.15

1.

$$\begin{aligned}
e^{2x} &= 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\\
\ln(1+\sin x) &= x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\\
\sqrt{1+x^3} &= 1+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Quindi, la formula di Maclaurin di ordine 3, con resto di Peano, di $f(x)$ è

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+1+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\\
&= 2+x+\frac{5}{2}x^2+2x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

2. Il coefficiente di x^3 del polinomio di Mclaurin (polinomio di Taylor centrato in $x_0=0$) di una qualsiasi funzione $f(x)$ che soddisfa le ipotesi del teorema (1.1) è $\dfrac{f'''(0)}{3!}$. Nel caso qui considerato è $\dfrac{f'''(0)}{3!}=2$, ossia $f'''(0)=12$.

3. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0,2)$ è il polinomio di Mclaurin di $f(x)$ di ordine 1, cioè $y = 2 - x$

4. Per $x \to 0$ si ha: $g(x) = -2 - x + f(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 2x^3 + o(x^3)$. Quindi la parte principale di $g(x)$ è $\dfrac{5}{2}x^2$ e il suo ordine di infinitesimo è 2.

Esercizio 2.16

Per $\alpha < 0$ è immediato verificare che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Per $\alpha \geq 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^{\frac{1}{3}x}}{[\ln(1+x)]^\alpha} &= \frac{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + o(x^2)\right)}{(x + o(x))^\alpha} \\
&= \frac{-\frac{1}{6}x^2 + +o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{6}\,x^{2-\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ -\dfrac{1}{6} & \text{se } \alpha = 2 \\ 0^- & \text{se } 0 \leq \alpha < 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.17

1. Lo sviluppo di Maclaurin di $\ln(\cos x)$ arrestato all'ordine quattro si può trovare in due modi

   Primo modo.

   Si scrive prima lo sviluppo di Maclaurin di $\cos x$, ossia $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ e poi quello di $\ln(1+t)$, dove $t = -\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ è infinitesima per $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right]^2 \\
&= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

   Secondo modo.

   Si scrive $\cos x$ nella forma $1 + t$ con t infinitesimo, per $x \to 0$ e poi si scrive lo sviluppo di $\ln(1+t)$. Quindi

$$\ln\big(1 + (\cos x - 1)\big) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o(x^4) \qquad (3.1)$$

dove $o(x^4)$ si giustifica osservando che è sufficiente arrestare lo sviluppo al secondo ordine perchè $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, per $x \to 0$. Da (3.1), sviluppando $\cos x$ in serie di Maclaurin si ottiene

$$\begin{aligned}
\ln\big(1 + (\cos x - 1)\big) &= -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right]^2 \\
&= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

che sono esattamente gli stessi calcoli eseguiti per il primo modo.

Lo sviluppo di Maclaurin di $\sqrt{1+x^2}$ arrestato all'ordine quattro è

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

2. Tenendo conto dei risultati ottenuti al punto precedente si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{[\arctan x]^\alpha} &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) + 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) - 1}{[x + o(x)]^\alpha} \\
&= \frac{-\frac{5}{24}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha(1 + o(1))}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0^- & \text{se } \alpha < 4 \\ -\dfrac{5}{24} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

Esercizio 2.18

1. Si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos 2x + \ln(1+4x^2) - \cosh}{\cosh 2x} \\
&= \frac{+1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16\,x^4}{4!} + 4\,x^2 - \frac{16x^4}{2} - 1 - \frac{4x^2}{2} - \frac{16\,x^4}{4!} + o(x^4)}{1 + o(1)} \\
&= \frac{-8x^4 + o(x^4)}{1 + o(1)}
\end{aligned}$$

Quindi l'ordine di infinitesimo è 4 e la parte principale è $p(x) = -8x^4$.

2. Posto $t=\sqrt{x}$ si ha:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^3-\sin^3 t}{e^{3t}-1} \\ &= \frac{t^3-\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)^3}{1+3t+o(t)-1} \\ &= \frac{\frac{t^5}{2}+o(t^5)}{3t+o(t)} \end{aligned}$$

Pertanto $f(x)=\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)$; l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è 2 e la parte principale è $p(x)=\dfrac{1}{6}x^2$.