Numeri complessi.
Esercizi

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

[1]

Indice

1 Esercizi **1**

2 Risposte e suggerimenti. **7**

1 Esercizi

Esercizio 1.1. *Scrivere in forma algebrica* $(x+iy)$ *i seguenti numeri complessi:*

1) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 2) $\dfrac{1+i}{2-i}$; 3) $\dfrac{1}{i^5}$; 4) $(2-3i)^2$; 5) $\dfrac{(1+2i)^2}{(2+i)^2}$; 6) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{3-i}$ R

Esercizio 1.2. *Scrivere esplicitamente usando i numeri complessi le due seguenti isometrie:*

1. *la simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse.*
2. *la simmetria centrale con centro l'origine.*

R

Esercizio 1.3. *Scrivere in forma algebrica l'inverso del numero* $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. R

Esercizio 1.4. *Rappresentare nel piano di Argand-Gauss le prime cinque potenze dell'unità immaginaria (cioè* i^0, i^1, i^2, i^3, i^4*).* R

Esercizio 1.5. *Scrivere in forma algebrica il numero complesso* $z = \dfrac{i}{1+i\sqrt{3}}$ *(scrivere* z *nella forma* $a+ib$, a,b *in* $\mathbb{R}$*).* R

[1] File: *es_complessi_2013.tex*

Esercizio 1.6. *Sia* $u = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. *Trovare* u^0, u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 *e rappresentare tali potenze nel piano di Gauss.* R

Esercizio 1.7. *Scrivere in forma esponenziale il numero* $z = \sqrt{3} + i$. R

Esercizio 1.8. *Siano* $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *e* $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$. *Scrivere in forma esponenziale il numero* $z_1 z_2$. R

Esercizio 1.9. *Sia* $z = -1 + i\sqrt{3}$. *Scrivere* z *in forma trigonometrica e in forma esponenziale.* R

Esercizio 1.10. *Sia* $z = -1 + i\sqrt{3}$. *Scrivere* z^{-1} *in forma algebrica e in forma esponenziale.* R

Esercizio 1.11. *Scrivere in forma algebrica le radici quadrate di* $-i$. R

Esercizio 1.12. *Scrivere in forma trigonometrica le radici terze di* $1 + \sqrt{3}i$. R

Esercizio 1.13. *Scrivere le radici quarte di* $1 + i$ *in forma esponenziale.* R

Esercizio 1.14. *Siano* $z, w \in \mathbb{C}$. *Dimostrare che*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

R

Esercizio 1.15. *Trovare le radici delle seguenti equazioni nel campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi*

1. $z^2 + 3iz + 4 = 0$
2. $z^2 + (1 + i)z + i = 0$
3. $i(z + 1)^3 = 1$
4. $z^4 + 5iz^3 - z - 5i = 0$
5. $z^2 + \overline{z} = 0$

R

Esercizio 1.16.

(a) *Sia* $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$ *e* $a_2 \neq 0$. *Dimostrare che se* $z \in \mathbb{C}$ *è una radice di* $p(x)$ *allora anche* $\overline{z}$ *è una radice di* $p(x)$.

(b) *Sia* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots a_1x + a_0$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ *e* $a_n \neq 0$. *Dimostrare che se* $z \in \mathbb{C}$ *è una radice di* $p(x)$ *allora anche* $\overline{z}$ *è una radice di* $p(x)$.

R

Esercizio 1.17. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re(z) < 2\pi\}$

$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re(iz) < 2\pi\}$

$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{1}{z}\right| \leq 1\}$

$A_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(\frac{1}{z^2}) \geq 0\}$

R

Esercizio 1.18 (Rappresentazione cartesiana di una rotazione)**.** *Scrivere le equazioni cartesiane che rappresentano la rotazione attorno all'origine di angolo* α.

R

Esercizio 1.19. *Il vettore* $z = 2 - i$ *viene ruotato attorno all'origine dell'angolo* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *(in senso antiorario). Scrivere il vettore immagine in notazione algebrica.*

R

Esercizio 1.20. *Spiegare perché la rotazione* $R_v^\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *di un angolo* θ *attorno a* v *in* $\mathbb{C}$, *si scrive:* $R_v^\theta = T_v \circ R_O^\theta \circ T_{-v}$. *Se si effettua una rotazione di* $+\frac{\pi}{2}$ *attorno al punto* $1 + i$, *dove va a finire il punto* $z = 2 + i$*?*

R

Esercizio 1.21. *Si considerino due rototraslazioni* $T_u \circ R_O^\alpha$ *e* $T_v \circ R_O^\beta$. *Dimostrare che la loro composizione* $(T_v \circ R_O^\beta) \circ (T_u \circ R_O^\alpha)$ *è una rototraslazione (del tipo* $T_w \circ R_O^\gamma$*).*

R

Esercizio 1.22. *Dimostrare che ogni roto-traslazione* $T_v \circ R_O^\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *con* $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *ha esattamente un punto fisso.*

R

Esercizio 1.23. *Trovare il punto fisso della roto-traslazione* $T_v \circ R_O^\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *con* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *e* $v = i$. R

Esercizio 1.24. *Si consideri* $R_O^\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $R_O^\theta(z) = e^{i\theta}z$ *(rotazione di angolo* θ *attorno all'origine) e* $T_v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T_v(z) = z + v$*(traslazione individuata dal vettore* v *di* $\mathbb{C}$*). Dimostrare che*

$$T_v \circ R_O^\theta = R_O^\theta \circ T_{e^{-i\theta}v}$$

R

Esercizio 1.25. *Dimostrare che la simmetria*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}, \quad S(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}\,\overline{z}$$

ha per asse la retta passante per l'origine che forma con il semiasse positivo delle ascisse l'angolo di $\dfrac{\pi}{6}$.

R

Esercizio 1.26. *Sia* $u = e^{i\theta}$ *è un numero complesso unitario. Dimostrare che la funzione*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}, \quad S(z) = e^{i\theta}\overline{z} \tag{1.1}$$

è una simmetria assiale avente per asse una retta passante per l'origine e viceversa, dimostrare che ogni simmetria rispetto a una retta passante per l'origine può essere rappresentata nella forma 1.1. R

Esercizio 1.27. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; \frac{1}{2} < |z| \leq \frac{3}{2},\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{4}\pi\}$

$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |Im(z)| < \frac{1}{2},\ |Re(z)| \leq 1\}$ R

Esercizio 1.28. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

a) $E = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 1 < |z| < 2,\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi\}$

b) $F = \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; w = z^2,\ con\ z \in E\}$ R

Esercizio 1.29. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 1 \leq |z| \leq 2,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\}$

b) $B = \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; w = z^3,\ con\ z \in A\}$

c) $C = \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; w^4 \in A\}$ R

Esercizio 1.30 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1 (prima prova in itinere). 11 novembre 2008)**.**

Risolvere in $\mathbb{C}$ *la seguente equazione:*

$$(z^4 - 5i)(z^2 - 3z + 3) = 0$$

R

Esercizio 1.31 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1. 9 febbraio 2009)**.**

Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$z - 1 - 6i = z^2 - 2zRe[z] + |z|^2$$

R

Esercizio 1.32 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1. 15 febbraio 2010).

Si consideri l'equazione

$$z^4 + 2z = 0$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$*.*

(a) *Scrivere tutte le soluzioni nella forma* $a + ib$*.*

(b) *Sia* $\widetilde{z}$ *la soluzione che verifica*

$$Re(\widetilde{z}) > 0 \text{ e } Im(\widetilde{z}) < 0$$

(c) *Calcolare*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{Re(\widetilde{z})}{Im(\widetilde{z})}\right|^n + 1\right)$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli. R

Esercizio 1.33. (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1. 6 settembre 2010)

Si consideri la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^4 - 4z^2 + 8 = 0$$

Scrivere le soluzioni nella forma esponenziale $re^{i\theta}$ *e rappresentarle nel piano di Gauss.* R

Esercizio 1.34. *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione:*

$$(|z - 6i| - |z + 4i|)(z^3 - i) = 0$$

R

Esercizio 1.35 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1. 9 settembre 2013).

Rappresentare nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$|e^{iz^2+1}| < 1$$

R

Esercizio 1.36. *Dimostrare che ogni isometria* $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ *si può scrivere nella forma*

$F(z) = uz + v$ *oppure nella forma* $F(z) = u\overline{z} + v$*, dove* u *e* v *sono numero complessi fissati e* $|u| = 1$*.* R

Esercizio 1.37.

(a) Scrivere in forma esponenziale e riportare nel piano di Gauss le soluzioni in $\mathbb{C}$ *dell'equazione:*

$$z^4 = e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}$$

(b) Trovare i punti fissi della trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ *che manda* $z \in \mathbb{C}$ *in*

$$f(z) = \frac{1}{i}z + i$$

(c) Di quale trasformazione geometrica si tratta? Motivare la risposta.

R

2 Risposte e suggerimenti.

Esercizio 1.1

1) $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ 2) $\dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$ 3) $\dfrac{1}{i^5} = -i$;

4) $(2-3i)^2 = -5 - 12i$ 5) $\dfrac{(1+2i)^2}{(2+i)^2} = \dfrac{7}{25} + \dfrac{24}{25}i$ 6) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{3-i} = i$

Esercizio 1.2

1. $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, $F(z) = \overline{z}$.
2. $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, $F(z) = -z$.

Esercizio 1.3 $u^{-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 1.4 Basta ricordare che $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ eccetera.

Esercizio 1.5 $z = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$.

Esercizio 1.6 $u^0 = 1$, $u^1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $u^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $u^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $u^4 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$, $u^5 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

Esercizio 1.7 $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Esercizio 1.8 $z_1 z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Esercizio 1.9 $z = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + \sin\dfrac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$.

Esercizio 1.10 $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

Esercizio 1.11 $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = -z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

Esercizio 1.12 $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{7}{9}\pi + i\sin\dfrac{7}{9}\pi\right)$, $z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{13}{9}\pi + i\sin\dfrac{13}{9}\pi\right)$.

Esercizio 1.13 $z = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Esercizio 1.14 *1.* Sia $z = a + ib$ e $w = c + id$. Allora $z + w = (a+c) + i(b+d)$ e

$$\overline{z+w} = (a+c) - i(b+d) \tag{2.1}$$

Inoltre,

$$\overline{z}+\overline{w}=(a-ib)+(c-id)=(a+c)-i(b+d) \tag{2.2}$$

Dalle uguaglianze 2.1 e 2.2 si ha $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

2. Si ha:

$$zw=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\overline{zw}=(ac-bd)-i(bc+ad) \tag{2.3}$$

$$\overline{z}\,\overline{w}=(a-ib)(c-id)=(ac-bd)-i(bc+ad) \tag{2.4}$$

Dalle uguaglianze 2.3 e 2.4 si ottiene $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$.

Esercizio 1.15

1. $z_1=-4i$, $z_2=i$.
2. $z_1=-1$, $z_2=-i$
3. L'equazione è equivalente a $(z+1)^3=-i$. Posto $z+1=w$, si deve risolvere l'equazione $w^3=-i$, ossia occorre trovare le tre radici terze di $-i$, che sono

$$e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}, e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})}$$

   Le soluzioni di $(z+1)^3=-i$ sono allora

$$e^{-i\frac{\pi}{6}}-1,\ e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}-1,\ e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})}-1$$

4. Le soluzioni sono $-5i$ e le tre radici terze di 1.
5. $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Esercizio 1.16

(a) Se z è una radice del polinomio $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ si ha

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_2\overline{z}^2+a_1\overline{z}+a_0 \\ &= \overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+\overline{a_0} \\ &= \overline{a_2z^2+a_1z+a_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Si generalizza in modo ovvio.

Esercizio 1.17 A_1 è la regione di piano compresa tra l'asse y e la retta r di equazione $x = 2\pi$. (l'asse y è compreso, la retta r no).

A_2 è la regione di piano compresa tra l'asse x e la retta r di equazione $y = -2\pi$. (l'asse x è compreso, la retta r no).

A_3 è la regione di piano esterna alla circonferenza C di centro l'origine e raggio uno (i punti della circonferenza C sono compresi).

L'insieme A_4 è visualizzato nella figura qui sotto.

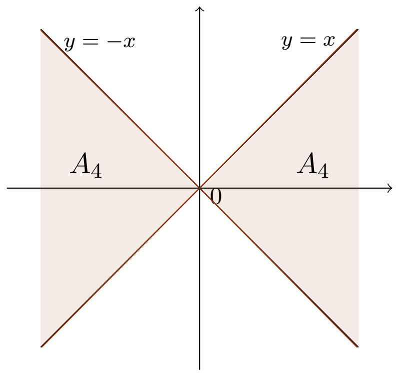

Figura 1

Esercizio 1.18 La rotazione di centro l'origine e angolo α è rappresentata dalla funzione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{C}, \quad R(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z \tag{2.5}$$

Posto $R(z) = x' + iy'$ e $z = x + iy$, da (2.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}$$

Quindi le equazioni cartesiane della rotazione di centro l'origine e angolo α sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Esercizio 1.19 $z = \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Esercizio 1.20 $z = 1 + 2i$

Esercizio 1.21 Si ha $T_u \circ R_O^\alpha(z) = e^{i\alpha} + u$ e $T_v \circ R_O^\beta(z') = e^{i\beta} + v$. Allora

$$(T_w \circ R_O^\beta) \circ (T_v \circ R_O^\alpha)(z) = e^{i\beta}\Big(e^{i\alpha}z + u\Big) + v = e^{i(\alpha+\beta)}z + \big(e^{i\beta}u + v\big)$$

Tale trasformazione è una rotazione di centro O e angolo $\gamma = \alpha+\beta$ seguita da una traslazione individuata dal vettore $w = e^{i\beta}u + v$.

Esercizio 1.22 La rotazione attorno all'origine di angolo θ seguita dalla traslazione di vettore v è rappresentata dalla funzione (da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$)

$$z \longmapsto z\, e^{i\theta} + v$$

Per trovare i punti fissi di tale funzione occorre risolvere l'equazione (di primo grado) in z

$$z\, e^{i\theta} + v = z$$

Per $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si ottiene

$$z = -\frac{v}{e^{i\theta} - 1}$$

Esercizio 1.23 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Esercizio 1.24 Si ha: $\left(R_O^\theta \circ T_{e^{-i\theta}v}\right)(z) = e^{i\theta}(z + e^{-i\theta}v) = e^{i\theta}z + v = (T_v \circ R_O^\theta)(z)$

Esercizio 1.25 Sia r la retta passante per l'origine, che forma con il semiasse positivo delle x l'angolo di $\dfrac{\pi}{6}$. Occorre verificare che i punti di r sono gli unici punti fissi di S. In altri termini bisogna mostrare che i numeri complessi del tipo $z = \rho\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ $(\rho \in \mathbb{R})$ sono le uniche soluzioni dell'equazione

$$e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{\rho\, e^{i\frac{\pi}{6}}} = \rho\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

.

Il conto è immediato.

Esercizio 1.26 Si ricordi che una simmetria assiale $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è un'isometria che ha esattamente una retta di punti fissi. L'esercizio chiede di dimostrare l'equivalenza tra le due seguenti proposizioni:

i) $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è una simmetria rispetto a una retta s passante per l'origine.

ii) $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è definita da $S(z) = u\overline{z}$, dove u è un numero complesso unitario.

ii) $\Rightarrow$ *i)* $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$, $S(z) = u\overline{z}$ preserva le distanze perchè è la composizione di una simmetria rispetto all'asse x seguita da una rotazione (moltiplicazione per un complesso unitario). Posto $u = e^{i\theta}$, i punti fissi di $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ sono i numeri complessi $z = re^{i\varphi}$ per i quali risulta

$$e^{i\theta}\, \overline{re^{i\varphi}} = re^{i\varphi} \tag{2.6}$$

Da (2.6) si ottiene $e^{i\theta}\, re^{-i\varphi} = re^{i\varphi}$; $e^{i(\theta-\varphi)} = e^{i\varphi}$. Di qui si ricava $\varphi = \frac{\theta}{2}$ oppure $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi$. Quindi i punti fissi di S sono tutti e soli i punti della retta s che passa per l'origine e per il punto $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Premettiamo la seguente osservazione. *Se S_1 e S_2 sono due simmetrie con la medesima retta s di punti fissi allora S_1 e S_2 coincidono.* Infatti, se $w \in \mathbb{C}$ è ortogonale alla retta s allora le due simmetrie in questione trasformano w in $\pm w$ (le simmetrie conservano gli angoli). Infine si ha che $S_1(w) = S_2(w) = w$ perchè altrimenti non sarebbero simmetrie.

Esercizio 1.27

Figura 2

Esercizio 1.28

I numeri complessi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in E$ sono soggetti alle seguenti limitazioni: $1 < r < 2$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$. Pertanto i numeri complessi w che stanno in F sono del tipo

$$w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

con $1 < r^2 < 4$ e $\pi \le 2\theta \le 2\pi$. Gli insiemi E e F sono quelli evidenziati in figura.

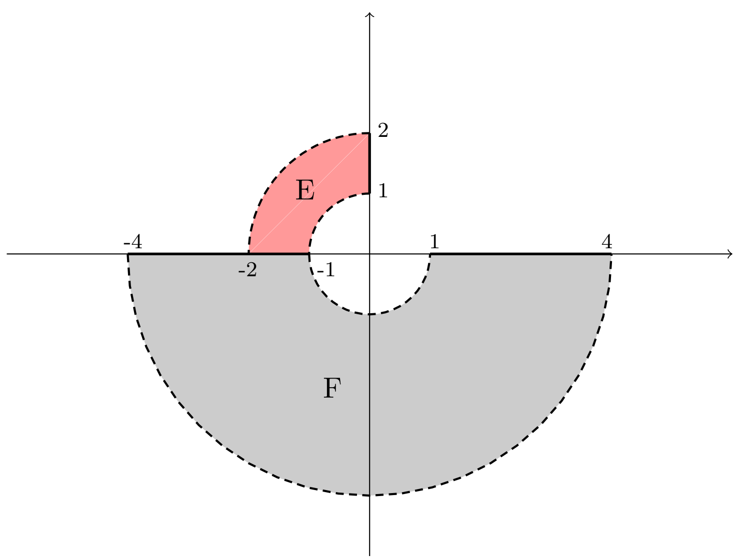

Figura 3

Esercizio 1.29 a) I numeri complessi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in A$ sono soggetti alle seguenti limitazioni: $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.

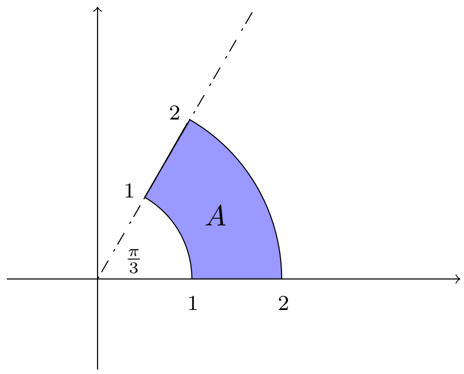

Figura 4

b) I numeri complessi w che stanno in B sono del tipo

$$w = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

con $1 \leq r^3 \leq 8$ e $0 \leq 3\theta \leq \pi$.

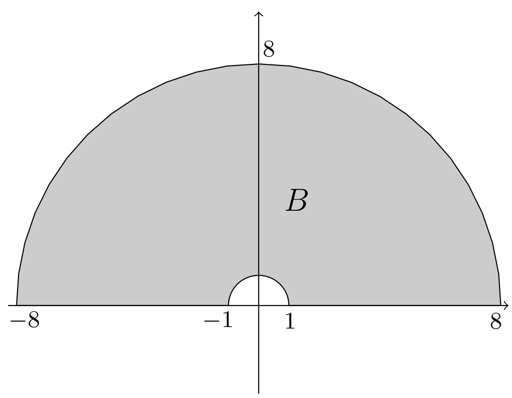

Figura 5

c) Sia $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in A$. I numeri complessi w per i quali

$$w^4 = z \tag{2.7}$$

sono le radici quarte di z. Posto $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, da (2.7) si ottiene:

$$\rho^4(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ovvero

$$\begin{cases} \rho^4 & = & r \\ 4\alpha & = & \theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho & = & \sqrt[4]{r} \\ \alpha & = & \dfrac{\theta}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Allora le radici quarte di z (scritte in forma esponenziale) sono:

$$w_1 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{\theta}{4} i}, \qquad w_2 = \sqrt[4]{r} e^{(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2}) i}, \qquad w_3 = \sqrt[4]{r} e^{(\frac{\theta}{4} + \pi) i}, \qquad w_4 = \sqrt[4]{r} e^{(\frac{\theta}{4} + \frac{3}{2}\pi) i}.$$

Ricordando le limitazioni $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, per ogni radice quarta w_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ si ottiene un insime di numeri complessi così definito:

$$C_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\theta}{4} i},\ \ 1 \le \sqrt[4]{r} \le \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad 0 \le \frac{\theta}{4} \le \frac{\pi}{12} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2}) i},\ \ 1 \le \sqrt[4]{r} \le \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} \le \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2} \le \frac{7}{12}\pi \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4} + \pi) i},\ \ 1 \le \sqrt[4]{r} \le \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \pi \le \frac{\theta}{4} + \pi \le \frac{13}{12}\pi \right\}$$

$$C_4 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4} + \frac{3}{2}\pi) i},\ \ 1 \le \sqrt[4]{r} \le \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}\pi \le \frac{\theta}{4} + \frac{3}{2}\pi \le \frac{19}{12}\pi \right\}$$

L'insieme delle soluzioni è $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (si veda la figura qui sotto).

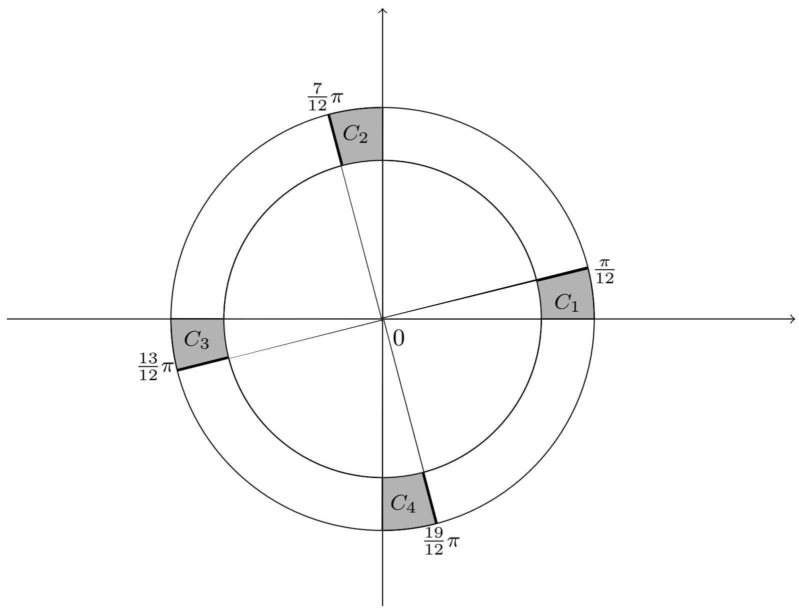

Figura 6

Esercizio 1.30

Esercizio 1.31 Posto $z = x + iy$, l'equazione data assume la forma

$$x + iy - 1 - 6i = (x + iy)^2 - 2(x + iy) + x^2 + y^2$$

ossia: $x - 1 + (y - 6)i = 0$. Ponendo $x - 1 = 0$ e $y - 6 = 0$ si ottiene il numero complesso $z = 1 + 6i$, che è l'unica soluzione dell'equazione.

Esercizio 1.32

(a) Dall'equazione $z(z^3 + 2) = 0$ si ottiene

$$z = 0 \tag{2.8}$$

$$z^3 + 2 = 0 \tag{2.9}$$

Per trovare le soluzioni di (2.9) bisogna detrminare le radici terze di -2. Posto $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Pertanto

$$\begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Riassumendo, le soluzioni di $z(z^3 + 2) = 0$ sono:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = \sqrt[3]{2}(-1 + 0i) = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5}{3}\pi} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$$

(b) La soluzione $\widetilde{z}$ è

$$\widetilde{z} = z_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,i$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{Re(\widetilde{z})}{Im(\widetilde{z})}\right|^n + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1.33

Esercizio 1.34

Le soluzioni dell'equazione $|z - 6i| = |z + 4i|$ si possono determinare immediatamente ragionando per via geometrica. Esse sono i punti dell'asse del segmento di estremi $6i$ e $-4i$ (si veda la figura 7), cioè

$$\{x + i,\ x \in \mathbb{R}\}$$

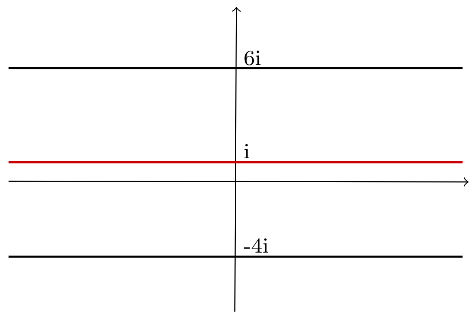

Figura 7

Un altro modo per ottenere le soluzioni dell'equazione

$$|z - 6i| = |z + 4i| \tag{2.10}$$

è il seguente: da (2.10), posto $z = x + yi$, si ottiene

$$|x + (y - 6)i| = |x + (y + 4)i|$$

Ovvero

$$x^2 + (y - 6)^2 = x^2 + (y + 4)^2$$

le cui soluzioni sono $y = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Le radici terze di i sono $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(|z - 6i| - |z + 4i|)(z^3 - i) = 0$ è

$$\{x + i,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$$

Esercizio 1.35 Posto $z = x + iy$ si ha

$$\left|e^{iz^2+1}\right| = \left|e^{i(x+iy)^2+1}\right| = \left|e^{i(x^2-y^2)-2xy+1}\right| = \left|e^{-2xy+1}\, e^{i(x^2-y^2)}\right| = e^{-2xy+1}$$

Quindi

$$\left|e^{iz^2+1}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2xy + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy > \frac{1}{2}$$

Il luogo richiesto è quello rappresentato in figura

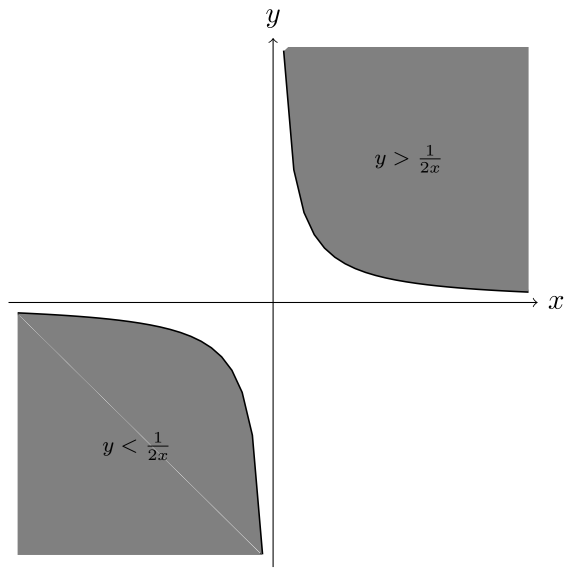

Figura 8

Esercizio 1.36

Esercizio 1.37

(a) Si tratta di trovare le radici quarte di $e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}$. Le soluzioni sono: $z_0 = e^{i(-\frac{\pi}{6})}$, $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3})}$, $z_2 = e^{i(\frac{5}{6}\pi)}$, $z_3 = e^{i(-\frac{2}{3}\pi)} = e^{i(\frac{4}{3}\pi)}$.

(b) I punti fissi richiesti sono le soluzioni dell'equazione $\dfrac{1}{i}z + i = z$ (equazione algebrica di primo grado). L'unica soluzione (e quindi l'unico punto fisso) è

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

(c) La trasformazione $z \mapsto \frac{1}{i}z + i = -iz + i$ è una rotazione attorno all'origine di angolo $-\frac{\pi}{2}$ seguita da una traslazione di vettore i. Quindi f è un'isometria con un unico punto fisso, ossia una rotazione il cui centro è il punto fisso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.