Note di elettrostatica.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[1]

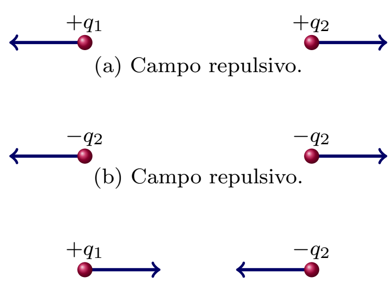
[1]Nome file: 'elettrostatica.tex'

1 Elettrostatica

1.1 Legge di Coulomb (1785).

Due cariche q_1, q_2 si attraggono con una forza $\mathbf{F}$, detta *forza elettrostatica* (frecce blu), diretta lungo la congiungente le due cariche. L'intensità di tale forza è direttamente proporzionale al prodotto dei valori assoluti delle due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \tag{1.1}$$



(a) Campo repulsivo.

(b) Campo repulsivo.

(c) Campo attrattivo

Figura 1: Le forze di Coulomb sono repulsive se le due cariche hanno lo stesso segno, attrattive se hanno segno opposto.

La costante elettrostatica k è di solito espressa nel seguente modo: $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, dove ϵ_0 indica la *costante dielettrica del vuoto*[2]. I valori di k e ϵ_0 sono:

$$k = 8.99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{C^2/(N\,m^2)}$$

La legge di Coulomb per cariche poste nel vuoto assume la forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \tag{1.2}$$

`Analogie e differenze con la forza di gravitazione universale.`

Analogie.

La forza gravitazionale e quella elettrostatica agiscono a distanza (non a contatto). Inoltre entrambe le leggi dipendono dall'inverso del quadrato della distanza ed entrambe coinvolgono una proprietà delle particelle: la massa in un caso, la carica elettrica nell'altro.

Differenze.

[2]Il valore della costante dielettrica nel'aria si discosta molto poco da questo valore.

• La forza di gravitazione universale è sempre attrattiva, quella elettrostatica è repulsiva quando le cariche hanno lo stesso segno, attrattiva quando le cariche hanno segno opposto.

• La costante che compare nella legge di Newton è una costante *universale* (non dipende dal mezzo in cui le due masse sono immerse), mentre la costante di Coulomb non lo è.

• Il valore della costante di Newton è un numero molto piccolo: $6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$, mentre la costante di Coulomb, è un numero molto grande: $8.99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$. Di conseguenza la forza gravitazionale diventa significativa quando almeno una delle due masse ha dimensioni rilevanti (come nel caso di grossi corpi celesti), mentre quella di Coulomb si manifesta anche tra cariche di piccola entità. Per esempio la forza coulombiana che agisce tra un protone e un elettrone è circa 10^{39} volte maggiore di quella gravitazionale. Per questo motivo la forza di gravità, da cui dipende la struttura dell'universo su vasta scala, non è rilevante nella determinazione della struttura microscopica della materia. Su scala atomica e molecolare, le forze che hanno un ruolo significativo sono quelle di natura elettrica. A esse infatti si possono ricondurre tutti i vari tipi di legame chimico (ionico, covalente, a idrogeno, metallico, ecc.).

Esempio. (**Atomo di idrogeno**) Nell'atomo di idrogeno la forza gravitazionale che si esercita tra protone ed elettrone vale (nel SI) $F_g \approx 3,6 \cdot 10^{-47}$ mentre la forza elettrostatica vale $F_e \approx 8,5 \cdot 10^{-8}$. Il rapporto tra le due forze è $\dfrac{F_e}{F_g} = 2,36 \cdot 10^{39}$.

1.2 Campo elettrico.

Se una carica di prova q_0, posta in un punto P dello spazio, è sottoposta a una forza $\mathbf{F}$ allora il campo elettrico $\mathbf{E}$ nel punto P è

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \tag{1.3}$$

Il campo elettrico $\mathbf{E}$ si misura nel SI si misura in Newton al coulomb $\left[\dfrac{N}{C}\right]$.

1.2.1 Campo elettrico generato da una carica puntiforme.

Si consideri una carica puntiforme q posta nell'origine O di $\mathbb{R}^3$. In un punto dello spazio che si trova a distanza r da O il campo elettrico $\mathbf{E}$ ha direzione radiale (quella del vettore $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$), verso 'uscente' se q è positiva, 'entrante' se q è negativa. L'intensità vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2} \tag{1.4}$$

In forma vettoriale si ha

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{1.5}$$

1.2.2 Linee di campo elettrico.

Le regole per tracciare correttamente le linee del campo elettrico sono le seguenti

1. Le linee del campo si originano dalle cariche positive e terminano nelle cariche negative (o all'infinito).
2. Le linee del campo che escono o entrano in una carica sono tracciate in modo simmetrico rispetto alla carica stessa.
3. Il numero di linee di campo che escono o entrano in una carica è direttamente proporzionale alla carica.
4. La densità di linee di campo in un intorno di un punto P (= numero di linee di campo per unità di superficie) è direttamente proporzionale all'intensità del campo elettrico in quell'intorno.
5. A grande distanza (distanza 'infinita')) di un sistema di cariche le linee di campo sono radiali ed equidistanziate, come se fossero generate da una singola carica puntiforme uguale alla carica totale del sistema.
6. Due linee di campo qualsiasi non possono mai intersecarsi.

1.2.3 Campo elettrico generato da un dipolo.

Un dipolo elettrico è una configurazione formata da due cariche elettriche di segno opposto, $+q$ e $-q$, poste a distanza $2d$ l'una dall'altra (si veda la figura 2). Il segmento che unisce le due cariche si chiama *asse del dipolo*, mentre il suo punto medio è il *centro del dipolo*.

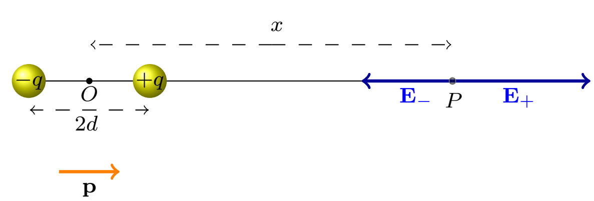


Figura 2: Campi elettrici $\mathbf{E}_+$, $\mathbf{E}_-$ nel punto P (allineato con l'asse del dipolo). Il momento $\mathbf{p}$ del dipolo è diretto dalla carica negativa verso quella positiva.

Per determinare il campo elettrico $\mathbf{E}$ nel punto P indicato in figura (2) bisogna calcolare i campi $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$ prodotti dalle cariche separate e poi sommarli (principio di sovrapposizione delle cariche elettriche). Si trova

$$\begin{aligned} E &= E_+ + E_- \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(x-d)^2} - \frac{q}{(x+d)^2}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4dqx}{(x-d)^2\,(x+d)^2}\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

Se d è "piccolo " , cioè trascurando i termini d^n con $n \geq 2$, dall'ultima uguaglianza si ricava

$$\begin{aligned} E &= E_+ + E_- \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4dqx}{x^4}\right] \\ &= \frac{dq}{\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^3}\right] \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si dimostra (non qui) che in ogni punto P dello spazio il vettore $\mathbf{E}$ *è inversamente proporzionale a* r^3, dove r è la distanza del punto in questione dal centro del dipolo.

Si chiama *momento di dipolo elettrico* il vettore

$$\mathbf{p} = 2q\,\mathbf{d}$$

dove $2\mathbf{d}$ è il vettore che va dalla carica $-q$ alla carica $+q$ del dipolo.

1.3 Moto di cariche puntiformi in campi elettrici.

Si ponga una carica q in un campo elettrico elettrico $\mathbf{E}$. Come si è già osservato la forza gravitazionale che agisce sulla carica elettrica è trascurabile rispetto alla forza elettrica $q\mathbf{E}$. Se non sono presenti altre forze la carica ha accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

dove m è la massa della carica in esame.

Se per via sperimentale si determina l'accelerazione della carica ed è noto il campo elettrico E, si può determinare il rapporto tra la carica e la massa della carica. J.J. Thomson (1897) studiò la deviazione degli elettroni in un campo elettrico uniforme per dimostrare l'esistenza degli elettroni e per misurare il loro rapporto $\frac{q}{m}$.

Osservazione. Quanto detto sopra è vero solo in parte! Molto spesso la velocità di un elettrone è prossima alla velocità della luce e in questi casi le leggi del moto di Newton devono essere modificate mediante la *teoria della relatività ristretta* di Einstein (1905).

Esempio. (Elettrone in un campo elettrico uniforme con velocità iniziale parallela e concorde con quella di $\mathbf{E}$.)

Un elettrone viene proiettato con velocità $v_0 = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10^3\,\mathrm{N/C}$. Se $\mathbf{E}$ e $\mathbf{v}_0$ hanno stessa direzione e verso opposto, quanto spazio percorre l'elettrone prima di fermarsi?

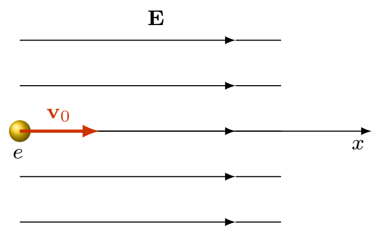


Figura 3: Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme. La velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ dell'elettrone ha stessa direzione e verso di $\mathbf{E}$.

Soluzione.

La forza elettrica che agisce sull'elettrone ha intensità $F = e\,E$, direzione quella di $\mathbf{E}$ e verso opposto. L'elettrone si muove di moto rettilineo uniformemente decelerato (il verso della sua accelerazione è opposto rispetto a quello della sua velocità iniziale). Si scelga per sistema di riferimento l'asse x indicato in figura; all'istante $t_0 = 0$ l'elettrone si trova nell'origine di tale asse con velocità $v_0 = 2 \cdot 10^6$ m/s.

Per determinare lo spazio percorso dall'elettrone prima di fermarsi si utilizzi l'uguaglianza

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{1.8}$$

che esprime il legame tra velocità e spazio percorso in un moto uniformemente accelerato. Posto $v = 0$ si ottiene:

$$0 = (2 \cdot 106\,\mathrm{m/s})^2 - 2\,\frac{\mathrm{eE}}{\mathrm{m}}(\mathrm{x} - 0) \tag{1.9}$$

La massa e la carica dell'elettrone sono, nell'ordine, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}\mathrm{Kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Sostituendo tali valori in (1.9) ed esplicitando rispetto a x si ha:

$$x = \frac{(9,11 \cdot 10^{-31}\mathrm{Kg})(2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s})^2}{2\,(1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})(10^3\,\mathrm{N/C})} = 1,14 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{1.10}$$

Esempio. (Elettrone in un campo elettrico uniforme con velocità iniziale ortogonale a $\mathbf{E}$.)

Un elettrone viene proiettato con velocità $v_0 = 10^6$ m/s in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 2 \cdot 10^3$ N/C. Se $\mathbf{E}$ e $\mathbf{v}_0$ sono perpendicolari, determinare la deviazione subita dall'elettrone dopo che ha percorso la distanza orizzontale di un centimetro.

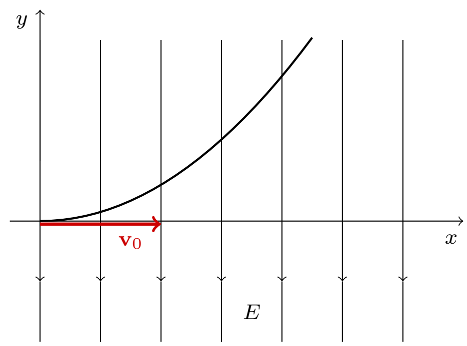


Figura 4: Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme. La velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ dell'elettrone è perpendicolare a $\mathbf{E}$.

Soluzione.

L'elettrone descrive in questo caso un moto piano. Si fissi il sistema di riferimento nel modo indicato in figura; all'istante $t_0 = 0$ l'elettrone si trova nell'origine degli assi con velocità $v_0 = 10^6\,\mathrm{m/s}$. Allora il tempo che esso impiega per percorrere un tratto di lunghezza $1\,\mathrm{cm}$ nella direzione dell'asse x è

$$t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{10^6\,\mathrm{m/s}} = 10^{-8}\,\mathrm{s} \tag{1.11}$$

Durante questo intervallo di tempo l'elettrone viene deviato verso l'alto (direzione verticale) di un tratto

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\,t^2 \tag{1.12}$$

Sostituendo in (1.12) i valori noti di e, m, E, t si trova

$$y = 1,76 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1,76\,\mathrm{cm} \tag{1.13}$$

Nella descrizione del moto si è supposto che sull'elettrone agisse la sola forza elettrica $\mathbf{F}_e$ e si è completamente ignorata la forza gravitazionale $\mathbf{F}_g$. La scelta è del tutto ragionevole in quanto il rapporto tra le due forze è

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e\,E}{mg} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})(2000\,\mathrm{N/C})}{(9,1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Kg})(9,8\,\mathrm{N/Kg})} = 3,6 \cdot 10^{13}$$

1.4 Conduttori ed isolanti.

Gli elementi della tavola periodica possono essere classificati, secondo la struttura elettronica a "livelli" dei loro atomi, in quattro categorie:

1. *Gas nobili* (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn). Non manifestano alcuna tendenza al legame chimico in quanto hanno l'ultimo livello è caratterizzato da un ottetto completo.

2. *Metalli.* Sono i conduttori. Il loro numero atomico (= numero di elettroni) è tale che gli atomi presentano una notevole tendenza a cedere i pochi elettroni presenti nell'ultimo livello orbitale. Questi elettroni, detti *elettroni di conduzione*, risultano così poco legati ai rispettivi nuclei che la sola agitazione termica è sufficiente a svincolarli. Si devono considerare, a tutti gli effetti, come elettroni "liberi" nell'ambito del metallo, patrimonio comune di tutti gli atomi del conduttore. Essi non hanno sufficiente energia per uscire dal metallo, tuttavia in esso possono muoversi con grande facilità come una sorta di gas libero di muoversi sulla superficie del conduttore.

   Queste sostanze sono conduttrici di elettricità.

3. *Non metalli.* Per essi vale il contrario di quanto appena detto; i loro atomi tendono a catturare elettroni, e quindi a ostacolarne il libero movimento. Si tratta di sostanze *isolanti.*

4. *Elementi del IV gruppo della tavola periodica* (per esempio, i semiconduttori). Hanno un comportamento intermedio tra i conduttori e gli isolanti. Le particolari proprietà di queste sostanze (quali il silicio e il germanio) sono state di grandissima importanza nei recenti sviluppi dell'elettronica.

1.4.1 Elettrizzazione statica di conduttori e isolanti.

Elettrizzare un oggetto significa alterare la parità numerica delle cariche di ciascun segno presenti nell'oggetto o in una parte dell'oggetto. Un corpo risulta carico positivamente se è in difetto di elettroni mentre risulta carico negativamente se è in eccesso di elettroni (gli elettroni possono essere facilmente ceduti o acquistati mentre i protoni, situati nel nucleo atomico, non possono essere facilmente rimossi).

`Elettrizzazione per contatto.` Un conduttore metallico può facilmente essere elettrizzato per contatto con un corpo carico, per cui parte della carica del corpo (sia che si tratti di carenza o eccesso di elettroni) si andrà a distribuire su tutta la superficie libera del metallo.

`Elettrizzazione per induzione elettrostatica.` Se si avvicina un corpo carico a un metallo (senza che vi sia contatto) quest'ultimo si elettrizza. Gli elettroni di conduzionetendono ad concentrarsi *sulla* superficie del metallo dalla parte più vicina o più lontana al corpo carico (a seconda del segno della carica di questo), lasciando scoperte cariche nucleari positive dal lato opposto. Allontanando il corpo carico, in pochissimo tempo, si ristabilisce l'equilibrio elettrico in ogni parte del conduttore.

`Elettrizzazione per strofinio.`

Si ricordi che negli isolanti (i dielettrici), gli elettroni hanno scarsa capacità di movimento perchè sono fortemente legati ai propri nuclei. Solo mediante forze localizzate molto intense (per strofinio o scariche elettriche) è possibile che alcuni elettroni vengano strappati dalla loro posizione. Elettrizzare un corpo isolante per strofinio comporta strappargli elettroni mediante, per esempio, lo sfregamento su un panno (in tal caso il corpo si elettrizza positivamente), o cedergli elettroni del panno (in questo caso il corpo si carica negativamente). In ogni caso gli elettroni mancanti (assimilabili a cariche positive) o in eccesso restano concentrati là dove è avvenuto lo sfregamento, cioè la carica elettrica che si viene a realizzare rimane localizzata nei punti dove viene artificiosamente realizzata.

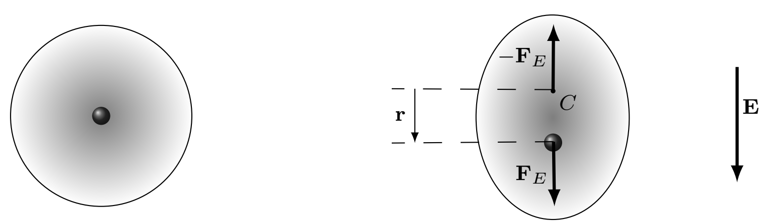
1.5 Polarizzazione elettrica.

1.5.1 Polarizzazione per deformazione.

Si pensi a un atomo (si veda la figra 5 (a)) come a un sistema elettricamente neutro costituito da un nucleo centrale molto piccolo dotato di carica positiva $+Ze$ (Z = numero atomico) circondato da una nube elettronica, a simmetria sferica, avente carica elettrica negativa pari a $-Ze$. I baricentri di carica positiva e di carica negativa coincidono (il nucleo si può considerare puntiforme perchè il suo raggio ha ordine di grandezza di $10^{-5} - 10^{-4}$ rispetto al raggio atomico).

Se posto in un campo elettrico $\mathbf{E}$, un atomo di questo tipo (detto *non polare*) tende a "deformarsi"(si veda la figura 5,(b)). Nucleo e nuvola elettronica si allontanano sotto l'azione del campo elettrico poichè sul nucleo agisce la forza di intensità $\mathbf{F}_E = +Ze\,\mathbf{E}$ mentre sulla nuvola elettronica agisce una forza uguale e di segno opposto, $-\mathbf{F}_E = -Ze\,\mathbf{E}$.[3]

Una volta che i baricentri di carica si sono distanziati di un tratto $\mathbf{r}$, parallelo a $\mathbf{E}$, la carica positiva del nucleo e quella della nuvola cominciano ad attrarsi sotto l'azione della forza elettrostatica (di Coulomb) $\mathbf{F}$. Il "sistema atomo" raggiunge la situazione di equilibrio quando $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E$.



(a) Nuvola elettronica a simmetria sferica. (b) Polarizzazione per deformazione.

Figura 5: Un atomo con i baricentri di carica che coincidono (non polare) si deforma sotto l'azione del campo elettrico.

[3] Il punto di applicazione di quest'ultima forza è il baricentro di carica negativa C.

1.5.2 Polarizzazione per orientamento.

Se l'atomo non è a simmetria sferica, esso è assimilabile a un dipolo, ovvero a un sistema costituito da due cariche uguali, di segno opposto, situate a piccola distanza l'una dall'altra. In questo caso l'atomo si dice *polare*. Un atomo di questo tipo, posto in un campo elettrico, tende a ruotare orientando l'asse del dipolo lungo la direzione d'azione della forza coulombiana. Sia nel caso di deformazione che in quello di orientamento, la disposizione molecolare del dielettrico si presenta (qualitativamente) come in figura 6: i dipoli tendono a disporsi lungo la direzione della forza esercitata dal corpo inducente, volgendo verso di esso la carica di segno opposto. La superficie del dielettrico più vicina al corpo inducente ha complessivamente carica di segno contrario rispetto a quella del corpo inducente mentre ha carica dello stesso segno sulla sua superficie più lontana.

Ne segue che in un punto interno al dielettrico, una carica di prova q risente meno della forza esercitata dalla carica Q del corpo inducente, in quanto quest'ultima viene in parte neutralizzata dalle cariche di polarizzazione che il dielettrico le contrappone: se F_0 è la forza agente sulla carica di prova in assenza nel vuoto e F la forza agente in presenza del dielettrico, si ha

$$\frac{F_0}{F} = \epsilon_r > 1$$

Il numero ϵ_r si chiama *costante dielettrica relativa al vuoto* del dielettrico mentre il numero $\epsilon = \epsilon_0\, \epsilon_r$ si chiama *costante dielettrica assoluta.* La legge di Coulomb, in presenza di un dielettrico assume la seguente forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, \epsilon_r} \frac{q_1\, q_2}{r^2}$$

L'ultima uguaglianza spiega in che senso la costante della legge di Coulomb "dipende dal mezzo" interposto.

Ovviamente la deformazione e l'orientamento molecolare sono in generale ostacolati dalle forze di aggregazione tra le molecole le quali, essendo diverse da un dielettrico all'altro, conferiscono ai vari dielettrici una diversa capacità di polarizzarsi. In generale i dielettrici polari hanno una superiore capacità di polarizzazione rispetto agli altri in quanto orientare una molecola è più facile che deformarne la struttura. Quindi i dielettrici polari hanno anche una superiore capacità di attenuare le forze coulombiane; per esempio, la costante dielettrica relativa dell'acqua vale $\epsilon_r \approx 80$ ed è una delle più elevate tra i diversi mezzi. La forza coulombiana tra due cariche poste in acqua è circa 80 volte inferiore a quella che si registrerebbe nel vuoto.

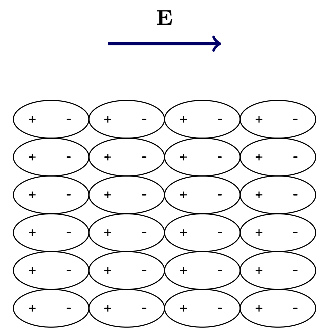


Figura 6: Polarizzazione per orientamento.

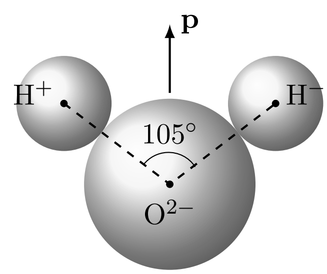


Figura 7: Momento di dipolo elettrico della molecola d'acqua.

1.6 Conservazione della carica elettrica.

Il principio di conservazione della carica elettrica è stato formulato per la prima volta da Benjamin Franklin (1706-1790) ed è valido sia su scala macroscopica che su scala atomica e nucleare. Quando si carica una bacchetta di vetro per strofinio su un panno di lana, si ha un flusso di elettroni dal vetro alla lana. La carica positiva che compare sul vetro è in modulo pari alla carica negativa che compare sulla lana. La conservazione della carica è rispettata anche nei processi nucleari, come i decadimenti radioattivi, e nei processi che coinvolgono le particelle elementari, come l'annichilazione e la produzione di coppie.

1.7 Quantizzazione della carica.

La carica elettrica non è un fluido continuo. Così come i fluidi, per esempio l'acqua, sono costituiti da atomi (e molecole) il "fluido elettrico" è costituito da multipli di una certa carica elementare. Una qualunque carica q si può sempre scrivere nel seguente modo

$$q = n\,e, \qquad\qquad n = \pm 1, \pm 2 \pm 3, \dots$$

dove e è detta *unità di carica elementare* e vale

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$$

Il protone ha carica $+e$, l'elettrone $-e$. Quando una grandezza fisica, come la carica elettrica, assume solo valori discreti si dice che la grandezza è *quantizzata*.

1.8 Flusso.

Esempio. Fluido con densità costante che scorre in una condotta con velocità $\mathbf{v}$ costante.

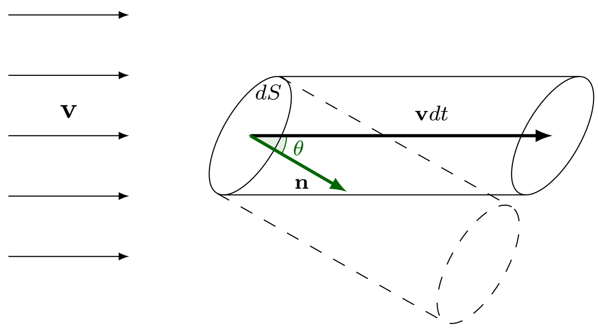


Figura 8: Flusso di un campo di velocità attraverso la superficie infinitesima dS.

Si vuole determinare il volume di fluido che attraversa la sezione dS (un cerchio di centro P e raggio 'piccolo') nell'unità di tempo. In un intervallino di tempo dt il fluido che attraversa dS occupa un cilindro avente area di base dS e altezza $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dt$, dove $\mathbf{n}$ è la normale unitaria a dS. Quindi, il volume del cilindro è $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS\, dt$. Si chiama *flusso di* $\mathbf{v}$ *attraverso* dS (flusso volumetrico) il volume di fluido che attraversa dS nell'unità di tempo cioè

$$\texttt{Flusso di } \mathbf{v} \texttt{ attraverso } dS = d\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Per calcolare il flusso attraverso una superficie finita S bisogna sommare tutti i contributi elementari di flusso, cioè

$$\texttt{Flusso di } \mathbf{v} \texttt{ attraverso } S = \Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Definizione 1.1 (Flusso)**.** *Sia* $\mathbf{F}$ *è un campo vettoriale qualsiasi, si chiama* flusso di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie (orientata) S *(si scrive* $\Phi_S(\mathbf{F})$*) l'integrale*

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esempio. (**Flusso di un campo elettrico uniforme attraverso una superficie piana.**)

Sia $\mathbf{E}$ un campo elettrico costante in ogni punto dello spazio, S una superficie piana e P un punto di S. Indicato con $\mathbf{n}$ il vettore unitario uscente da P e normale alla superficie, il *flusso di* $\mathbf{E}$ *attraverso* S è la quantità scalare

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, S = E\, S \cos\vartheta \tag{1.14}$$

dove S è l'area della superficie piana e ϑ è l'angolo formato da $\mathbf{n}$ e S[4].

Casi particolari.

• S ortogonale a $\mathbf{E}$. In questo caso

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = ES$$

• S parallela a $\mathbf{E}$. In questo caso $\vartheta = 90°$ e quindi il flusso è nullo

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

1.9 Teorema di Gauss. Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa.

Teorema 1.2 (Teorema di Gauss.)**.** *Il flusso del campo elettrico* $\mathbf{E}$ *attraverso una qualsiasi superficie (orientata) chiusa* S *è*

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{1.15}$$

dove Q_{int} *è la carica complessiva racchiusa da* S*.*

Il teorema di Gauss e la legge di Coulomb appaiono come due leggi indipendenti dell'elettrostatica. In realtà esse sono equivalenti: si tratta cioè della stessa legge formulata in due modi diversi.

1.9.1 Dimostrazione del teorema di Gauss.

`Caso di un campo elettrico generato da una singola carica.`

Sia q la carica positiva[5] che genera il campo elettrico e S una superficie chiusa.

Primo caso. S racchiude la carica q.

Si scelga una sfera S_1 avente il centro nel punto in cui è posizionata la carica e tutta racchiusa in S. Si suddivida la sfera in tanti piccoli elementi infinitesimi di area dS; ogni dS si può con buona approssimazione considerare una 'piccola' superficie piana.

Il campo elettrico in un punto P della sfera risulta perpendicolare all'elemento d'area dS che contiene il punto, pertanto il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso dS è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = E\, dS \tag{1.16}$$

[4]Si ricordi che $\mathbf{E}$ è proporzionale alla "densità " di linee di forza e $S\cos\vartheta$ è la proiezione di S su un piano perpendicolare alla direzione di $\mathbf{E}$, la relazione precedente fornisce quantitativamente il numero di linee di forza che attraversano S, ovvero "quanto" campo elettrico viene intercettato dalla superficie S.

[5]Nel caso la carica fosse negativa la dimostrazione è analoga e lasciata per esercizio.

Ora, per calcolare il flusso totale attraverso la sfera bisogna sommare tra loro tutti i flussi elementari

$$\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \int E\, dS \tag{1.17}$$

Nella somma (integrale) di (1.17) l'intensità di E è costante perchè tutti i punti sulla superficie della sfera hanno la medesima distanza dalla carica. Quindi

$$\begin{aligned}\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) &= E \int_{S_1} dS \\ &= E\, 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{q}{r^2}\, 4\pi r^2 \\ &= \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Infine, essendo S_1 tutta contenuta in S, il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso la superficie S è uguale al flusso di $\mathbf{E}$ attraverso S_1

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Secondo caso. S non racchiude la carica q.

Il flusso "entrante" in S è esattamente uguale al flusso "uscente" da S. Quindi

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

1.9.2 Campo elettrico generato da un filo rettilineo infinito.

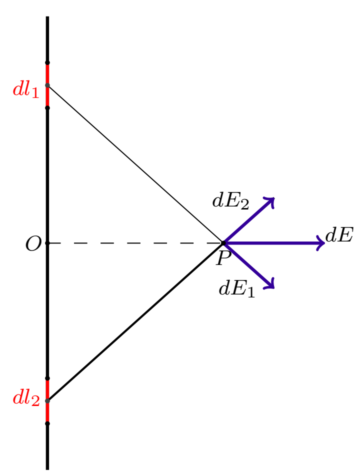


Figura 9: Il campo elettrico generato da un filo infinito è in ogni punto ortogonale al filo.

Si osservi la figura 9. Conviene pensare al campo elettrico nel punto P come alla somma di infiniti campi elettrici elementari $d\mathbf{E}$ generati da trattini infinitesimi dl di filo. Ogni campo elementare $d\mathbf{E}$ giace nel piano individuato dal filo e dal punto P, pertanto anche il campo elettrico $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$ in P giace in tale piano.

Inoltre la direzione di $\mathbf{E}$ è perpendicolare al filo. Sia dl_2 l'elemento infinitesimo di filo, simmetrico di dl_1 rispetto ad O. Questi due elementi generano due contributi del campo elettrico, $d\mathbf{E}_2$ e $d\mathbf{E}_1$, le cui componenti parallele al filo sono uguali e opposte. Pertanto $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$ risulta perpendicolare al filo carico.

L'intensità del campo elettrico si può determinare mediante un calcolo diretto dalla definizione di campo, oppure utilizzando il teorema di Gauss. Si ottiene

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, r}$$

dove λ indica la densità lineare di carica elettrica.

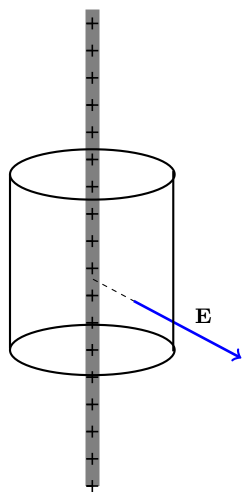


Figura 10: Campo elettrico generato da un filo infinito uniformemente carico.

1.9.3 Campo elettrico generato da una distribuzione piana infinita di carica.

Si vuole determinare il campo elettrico generato da un piano con densità di carica superficiale costante pari a σ. Con riferimento alla figura (11) si consideri un cilindro S avente le generatrici perpendicolari al piano e sezione normale A. Per ragioni di simmetria il campo elettrico $\mathbf{E}$ è ortogonale al piano e pertanto il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo. Il flusso di $\mathbf{E}$ è solo quello attraverso le due basi; si ha

$$\Phi_S(\mathbf{E}) \quad = \quad 2\, A\, E$$

Inoltre la carica contenuta in S è $\sigma\, A$. Allora, per il teorema di Gauss si ha

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2\, A\, E = \frac{\sigma\, A}{\epsilon_0}$$

L'intensità del campo elettrico è dunque

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{1.18}$$

Il campo elettrico **E** risulta quindi uniforme, in entrambe le regioni di spazio suddivise dal piano contenente le cariche. Si noti che l'intensità di **E** in un punto qualsiasi dello spazio non dipende dalla sua distanza dal piano.

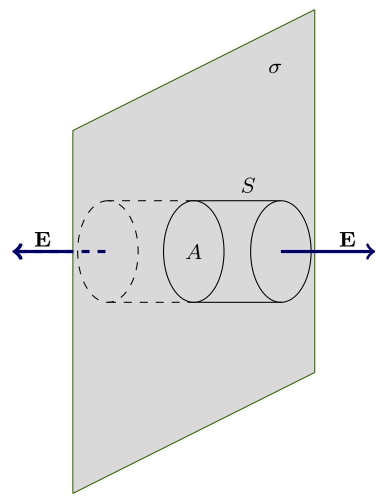


Figura 11: Campo elettrico generato da un piano infinito.

1.9.4 Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica.

Si vuole determinare il campo elettrico all'interno e all'esterno di un guscio sferico di raggio R e carica totale Q.

Primo caso. Sia P un punto esterno alla sfera.

La posizione di P è individuata dal vettore posizione $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ $(r > R)$ dove O è il centro della sfera. Per questioni di simmetria il campo elettrico deve avere direzione radiale (la direzione di **E** è quella del vettore posizione **r**) e modulo che dipende solo da r. Inoltre, il verso è 'uscente' se la carica distribuita sulla superficie sferica è positiva, 'entrante' se negativa.

Per determinare l'intensità del campo si consideri la sfera S di centro O e raggio r e si suddivida la sfera in tanti piccoli elementi di area dS. Il flusso elementare uscente da ogni dS è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = E\, dS$$

Sommando tutti i flussi elementari si ottiene il flusso totale attraverso la sfera S

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = E\, 4\pi r^2$$

Essendo Q la carica totale racchiusa all'interno di S, dal teorema di Gauss si ottiene

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Quindi

$$E = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Secondo caso. Sia P un punto interno alla sfera.

Sia $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ il vettore posizione di P e S una sfera di centro O e raggio r, con $r < R$. Il flusso totale uscente da S è , anche in questo caso,

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = E\,4\pi r^2$$

Dal teorema di Gauss si ricava

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

perchè la carica totale racchiusa all'interno di S è nulla. Pertanto

$$E = 0$$

Riassumendo, il campo elettrico $\mathbf{E}$ generato da una quantità di carica Q (positiva) uniformemente distribuita sul guscio sferico di centro O e raggio R ha in ogni punto P esterno alla sfera

1. direzione quella di $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$;
2. verso uscente se la carica distribuita uniformemente sulla superficie sferica è positiva, entrante se negativa.
3. intensità pari a
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{1.19}$$

All'interno della sfera il campo elettrico è nullo, $\mathbf{E} = 0$.

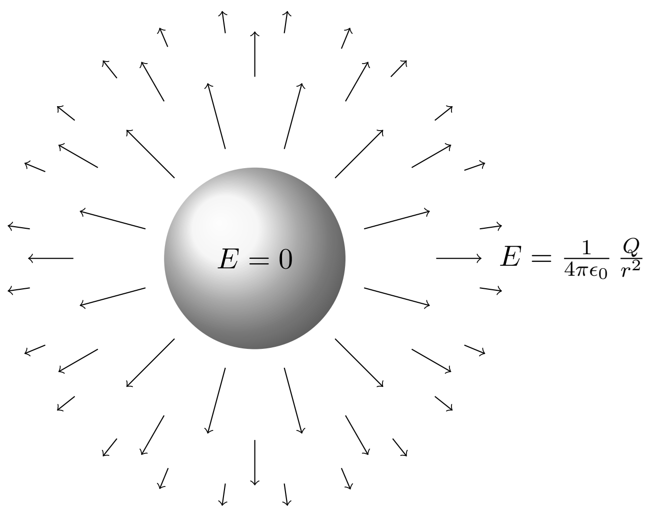


Figura 12: Campo elettrico generato da una carica totale Q (positiva) uniformemente distribuita su un guscio sferico. Il campo elettrico è repulsivo. Nei punti interni alla sfera $\mathbf{E}$ è nullo.

1.9.5 Campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica

Sia Q è la carica totale uniformemente distribuita in tutto il volume della sfera di raggio R. Il vettore posizione di un punto P esterno alla sfera è $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, con $r > R$. In questo caso l'intensità del campo elettrico è

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{1.20}$$

Si può pensare l'intera carica concentrata nel centro O della sfera, infatti nei punti esterni alla sfera il campo $\mathbf{E}$ coincide con quello generato da una carica puntiforme Q posta in O.

Se invece si trova a distanza r dal centro della sfera, con $r < R$ l'intensità del campo elettrico vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r \tag{1.21}$$

1.10 Differenza di potenziale elettrico. Potenziale elettrico.

Una carica di prova q_0 soggetta all'azione del campo di forze

$$\mathbf{F}_{el} = q_0\mathbf{E}$$

viene spostata dal punto iniziale O al punto finale P lungo un certo cammino orientato γ. Il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}_{el}$ dipende esclusivamente dal punto iniziale O e dal punto finale P (non dipende da γ) perchè la forza elettrostatica è conservativa.

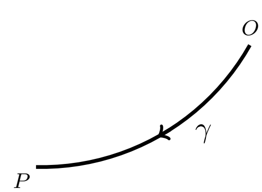


Figura 13

A essa è pertanto associata un'energia potenziale.

Definizione 1.3 (Variazione di energia potenziale elettrostatica). *Si chiama* variazione di energia potenziale elettrostatica ΔU *l'opposto del lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}_{el} = q_0 \boldsymbol{E}$ per spostare la carica q_0 da O a P lungo un qualsiasi cammino orientato che connette i due punti, cioè*

$$\Delta U = U_P - U_O = -L_\gamma(\mathbf{F}_{el}) = -\int_O^P q_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.22}$$

La variazione di energia elettrostatica è direttamente proporzionale alla carica di prova q_0.

Definizione 1.4 (Differenza di potenziale elettrico). *La differenza di potenziale elettrico $\Delta V = V_P - V_O$ è l'opposto del lavoro riferito all'unità di carica compiuto dal campo elettrostatico $\boldsymbol{F}_{el}$ su una carica di prova q_0 (positiva) per spostarla dal punto O al punto P, cioè*

$$\Delta V = V_P - V_O = \frac{-L_\gamma(\mathbf{F}_{el})}{q_0} = -\int_O^P \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.23}$$

Se il punto O è un punto di riferimento preventivamente fissato ed è noto il valore V_O la funzione

$$V_P = \frac{-L_\gamma(\mathbf{F}_{el})}{q_0} + V_O = -\int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + V_O \tag{1.24}$$

si chiama *potenziale elettrico*. Di solito si assume il punto O all'infinito e $V_O = 0$. Con questa convenzione il potenziale elettrico in P è

$$V = -\int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.25}$$

Quindi *il potenziale elettrico V nel punto P è l'opposto del lavoro riferito all'unità di carica compiuto dal campo elettrostatico $\boldsymbol{F}_{el}$ su una carica di prova q_0 (positiva) per spostarla dall'infinito al punto P.*

L'energia potenziale elettrostatica è un lavoro e pertanto si misura in `Joule`, mentre il potenziale elettrico si misura in `Volt` (simbolo V):

$$1\mathrm{V} = \frac{1\,\texttt{Joule}}{1\,\texttt{Coulomb}} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}}$$

1.10.1 Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme.

Sia E il campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme q posta nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Allora il potenziale elettrico in P è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

dove r è la distanza di P dall'origine (e $V_0 = 0$ in $r = \infty$).

1.10.2 Potenziale elettrico generato da una suprficie sferica carica.

Sia Q la quantità di carica uniformemente distribuita su una superficie sferica di raggio R. Il potenziale elettrico nel punto P che si trova a distanza r dal centro della sfera è

$$V = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{Q}{R} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

Si noti che all'interno della superficie sferica il potenziale è costante e vale $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{Q}{R}$ (non è zero sebbene il campo elettrico lo sia).

1.10.3 Potenziale elettrico per distribuzioni continue di cariche elettriche. Casi importanti.

1. Potenziale elettrico sull'asse di un anello carico.

2. Potenziale elettrico sull'asse di un disco uniformemente carico.

3. Potenziale elettrico in prossimità di una distribuzione lineare definita di carica.

4. Potenziale elettrico in prossimità di una distribuzione piana indefinita di carica.

[Da scrivere.]

1.11 Capacità di un conduttore.

La capacità elettrica di un conduttore misura la "capacità "del conduttore di accumulare carica elettrica per una data differenza di potenziale.

Se si carica un conduttore isolato e lontano da altri conduttori, si verifica sperimentalmente che il potenziale che esso assume è direttamente proporzionale alla carica conferitagli. Quindi il rapporto tra carica Q e potenziale V si mantiene costante e pertanto rappresenta una caratteristica intrinseca del conduttore (dipende solo dalla sua geometria e dimensione). Il rapporto

$$C = \frac{Q}{V} \tag{1.26}$$

si chiama *capacità del conduttore*.

Nel S.I. la capacità si misura in `farad` (simbolo F), dal nome del fisico sperimentale Michael Faraday.

$$1\mathrm{F} = \frac{1\,\texttt{Coulomb}}{1\,\texttt{Volt}} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}}$$

Un Farad è un'unità enorme (un conduttore sferico, per avere la capacità di 1F dovrebbe avere un raggio pari a circa 1500 raggi terrestri!). Per tale motivo è frequente utilizzare alcuni suoi sottomultipli, il nanofarad, $1\,\mathrm{nF} = 10^{-9}\,\mathrm{F}$ e il picofarad $1\,\mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}$

Conoscere la capacità di un conduttore significa sapere quanta carica è accumulabile su di esso senza dover utilizzare un potenziale troppo elevato (cosa che comporta molti problemi pratici di isolamento). Per ottenere una capacità maggiore di quella di un conduttore, che generalmente è molto piccola, si utilizzano i *condensatori*.

1.12 Condensatori.

Un *condensatore* è un dispositivo utile per accumulare o immaganizzare carica elettrica ed energia elettrostatica. Un *condensatore piano* è formato da due armature metalliche piane e parallele, le armature sono supposte molto grandi in modo da poter trascurare gli "effetti di bordo" mentre la distanza tra le armature è molto piccola. Quando il condensatore viene *caricato*, per esempio collegando le due armature con i poli di una batteria, si ha un trasferimento di carica elettrica da un conduttore piano all'altro finchè la loro differenza di potenziale non eguaglia quella tra i poli della batteria. Una volta raggiunta questo stato la carica complessiva su un'armatura è uguale e opposta a quella distribuita sull'altra.

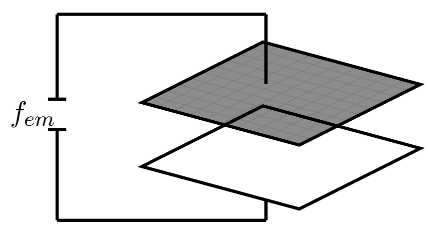


Figura 14: Condensatore.

Campo elettrico in un condensatore piano.

Sia A l'area di ciascuna delle due armature, d la distanza che le separa e ΔV la loro differenza di potenziale. Se inoltre $+Q$ e $-Q$ sono le cariche complessive uniformemente distribuite sulle due armature, la densità superficiale di carica su entrambe le armature è $\sigma = \frac{Q}{A}$.

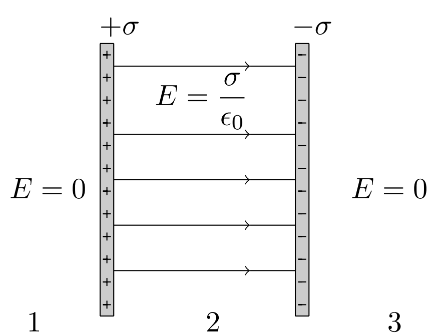


Figura 15: Campo elettrico in un condensatore piano.

Per determinare il campo elettrico del condensatore conviene considerare separatamente i valori dei campi elettrici generati dai due conduttori. Con riferimento alla figura (15) nelle regioni 1 e 3 il campo elettrico totale è nullo. Infatti le due armature danno luogo a campi elettrici aventi direzioni perpendicolari alle armature stesse ma verso opposto. Invece nella regione 2, si indichi con E_+ il campo generato dalla distribuzione $+\sigma$ e con E_- quello dovuto alla distribuzione $-\sigma$ si ha:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Capacità di un condensatore.

Sperimentalmente si verifica che il rapporto tra Q e la differenza di potenziale ΔV non dipende da nè da Q nè da ΔV, cioè il rapporto

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

è costante e definisce la *capacità del condensatore*.

Infine, indicata con $\sigma = \frac{Q}{A}$ la densità superficiale di carica sulle armature si ottiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{E d} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d}$$

cioè

$$C = \epsilon_0\,\frac{A}{d}$$

La capacità C è dunque una caratteristica intrinseca del condensatore che dipende solo dalla sua geometria.