Esercizi su equazioni differenziali lineari del primo ordine e a variabili separabili

Mauro Saita

Versione provvisoria. Dicembre 2016 [1]

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

1 Alcuni richiami sulle equazioni differenziali del primo ordine

Equazioni differenziali a variabili separabili.

1. È un'equazione del tipo
$$y' = g(x)h(y) \tag{1.1}$$
dove $(a, b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ e $(c, d) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

2. `Metodo di separazione delle variabili.`
La tecnica formale per risolvere un'equazione a variabili separabili è la seguente:
   - si scrive $\dfrac{dy}{dx}$ (notazione di Leibniz) al posto di y':
   $$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1.2}$$
   - si separano formalmente le variabili:
   $$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \tag{1.3}$$
   - si integrano entrambi i membri:
   $$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{1.4}$$

[1] File: ed_variabili_separabili_primo_ordine_2016.tex

3. `Problema di Cauchy` o `problema ai valori iniziali.`

   Siano $(a,b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ e $(c,d) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ funzioni continue, $x_0 \in (a,b)$ e $y_0 \in (c,d)$. Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

   consiste nel ricercare un intervallo (α,β) contenente x_0 e una funzione $(\alpha,\beta) \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ che sia soluzione di (1.5). Con le ipotesi formulate per le funzioni g e h è garantita l'esistenza ma non l'unicità della soluzione.

4. `Teorema di esistenza e unicità, locale.`

   `Il caso di equazioni differenziali a variabili separabili.`

   Se $(a,b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è continua su (a,b) e $(c,d) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su (c,d) il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

   ha in un intorno di x_0 una e una sola soluzione. In altre parole: esiste un $\delta > 0$ e un'unica funzione

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \xrightarrow{y} \mathbb{R}$$

   che è soluzione di (1.6).

5. `Se vale il teorema di esistenza e unicità locale, le curve integrali non si intersecano.`

   Le soluzioni $y = y(x)$ di una medesima equazione differenziale si chiamano curve integrali. Dal teorema di esistenza e unicità locale segue che due curve integrali $y_1(x)$ e $y_2(x)$ di una stessa equazione differenziale non possono mai intersecarsi. Infatti se esistesse un $\overline{x}$ per il quale $y_1(\overline{x}) = y_2(\overline{x})$ entrambe le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sarebbero soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x) &= y_1(\overline{x}) = y_2(\overline{x}) \end{cases} \tag{1.7}$$

   Ciò contraddice il teorema di esistenza e unicità locale. Ovviamente questo risultato vale anche nel caso di una qualsiasi equazione differenziale del primo ordine.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

6. È un'equazione del tipo

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{1.8}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono funzioni definite e continue su uno stesso intervallo (α, β) di $\mathbb{R}$. Se la funzione $f(x)$ è identicamente nulla, l'equazione lineare:

$$y' + a(x)y = 0 \tag{1.9}$$

si dice *omogenea*, altrimenti (se $f(x)$ non è identicamente nulla) si dice *non omogenea*.

7. `Soluzione generale di un'equazione lineare del primo ordine.`

   La soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine (1.8) è

$$y \quad = \quad Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,dx \tag{1.10}$$

   dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$ e $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

   La soluzione (1.10) è definita sull'intervallo (α, β) sul quale sono definiti e continui i coefficienti di $a(x)$ e $f(x)$.

8. `Teorema di esistenza e unicità, locale.`

   `Il caso di equazioni differenziali lineari del primo ordine.`

   Siano $a(x)$ e $f(x)$ funzioni definite e continue sullo stesso intervallo (α, β). Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

   ammette sempre una e una sola soluzione definita su tutto l'intervallo (α, β).

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili*

1. $y' = 2y$
2. $y' = \dfrac{x}{y}$
3. $y' - y^2 \sin x = 0$
4. $y' = 1 - y^2$
5. $xy^2 + x + (x^2y - y)\, y' = 0$
6. $y' = xy^2 \ln \dfrac{x}{3}$

Esercizio 2.2. *Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine*

1. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2$
2. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3$
3. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

Esercizio 2.3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione di questo problema di Cauchy?

Esercizio 2.4. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.5. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (x+1)y \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.6. *Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali*

1. $(1+x^2)y' = y(y-3)$
2. $y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

Esercizio 2.7. *Siano $y_n(x)$ le soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = n \end{cases}$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Determinare il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, y_n(1)$.

Esercizio 2.8. *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy*

$$1. \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases} \qquad\qquad 2. \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{x} \\ y(-1) = e \end{cases}$$

Esercizio 2.9.

1. *Si consideri nel piano xy la famiglia di curve $\mathcal{C}_a$ di equazione*

   $$y = ax^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

   Dimostrare che le curve ortogonali a $\mathcal{C}_a$ sono ellissi.

2. *Si consideri nel piano xy la famiglia di curve $\mathcal{C}_a$ di equazione*

   $$y = ax^n, \quad a \in \mathbb{R} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Descrivere le curve ortogonali a $\mathcal{C}_a$.

Esercizio 2.10. *Trovare le linee ortogonali alla famiglia di iperboli di equazione*

$$y = \frac{a}{x}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2.11 (Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione. Analisi e Geometria 1. 8 settembre 2014[2]). *Sia*

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y^2}{x(1+x^2)} = 0 \\ \\ y(2) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

1. *Dimostrare che il problema di Cauchy (2.1) ammette una e una sola soluzione $y = y(x)$*
2. *Trovare la soluzione $y = y(x)$*

Sia

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y^2}{x(1+x^2)} = 0 \\ \\ y(-1) = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

3. *Trovare la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy (2.2).*

[2] Il testo è stato leggermente modificato.

3 Soluzioni

Esercizio 2.1

1. Separando le variabili (per $y \neq 0$) si ottiene: $\frac{dy}{y} = 2\,dx$. L'integrale generale è $y = Ae^{2x}$, $A \in \mathbb{R}$.
2. $y^2 - x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$. Le curve soluzione sono iperboli equilatere i cui asintoti hanno equazione $y = \pm x$.
3. $y = 0$ (integrale singolare); $y = \dfrac{1}{\cos x + c}$, $c \in \mathbb{R}$ (integrale generale).
4. $y = 1$ (integrale singolare); $y = \dfrac{ce^{2x} - 1}{ce^{2x} + 1}$, $c \in \mathbb{R}$ (integrale generale).
5. $y^2 = \dfrac{c}{1 - x^2} - 1$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ (integrale generale).
6. $y = 0$ (integrale singolare), $y = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2(\frac{1}{2} - \ln\frac{x}{3}) + c}$, $c \in \mathbb{R}$ (integrale generale).

Esercizio 2.2 Le equazioni differenziali proposte in questo esercizio sono tutte del tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

1. In questo caso $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = x^2$, $\mu(x) = \int -\frac{2}{x}\,dx = \ln\frac{1}{x^2}$, $e^{\mu(x)} = \frac{1}{x^2}$.

   Quindi $\frac{d}{dx}(e^{\mu(x)}y) = -2x^{-3}y + x^{-2}\frac{dy}{dx} = x^{-2}(\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x}) = 1$. Integrando primo e ultimo termine della precedente successione di uguaglianze si ottiene $y = x^3 + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $y = x^2 - 2 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $y = \frac{3}{2} + ce^{-2x}$
4. $y = x - 1 + ce^{-x}$

Esercizio 2.3 L'equazione differenziale $y' + 2xy^2 = 0$ è a variabili separabili, l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x^2+c}$. Posto $y(0) = -1$ si ottiene $c = -1$. Quindi, la soluzione al problema di Cauchy è

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

L'intervallo massimale su cui è definita la soluzione è $(-1, 1)$.

Esercizio 2.4 $y = \dfrac{x^2 - \pi^2}{e^{\sin x}}$

Esercizio 2.5 È un'equazione differenziale a variabili separabili: $y = 0$ è soluzione dell'equazione; per $y \neq 0$ si ottiene

$$\int \frac{dy}{y}\,dy = \int (x+1)\,dx \tag{3.1}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C, \qquad C > 0 \tag{3.2}$$

Passando all'esponenziale (in base e) su entrambi i termini della precedente uguaglianza si ricava

$$|y| = e^{\frac{1}{2}(x+1)^2+C}, \qquad C > 0 \tag{3.3}$$

ossia

$$y = A\,e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}, \qquad A \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

La (3.5) è l'integrale generale dell'equazione differenziale. Infine, dalla condizione iniziale $y(2) = 1$ si ricava $1 = A\,e^{\frac{1}{2}3^2} = A\,e^{\frac{9}{2}}$, $A = e^{-\frac{9}{2}}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = e^{-\frac{9}{2}}\,e^{\frac{1}{2}(x+1)^2} = e^{\frac{1}{2}[(x+1)^2-9]} \tag{3.5}$$

Esercizio 2.6

1. Equazione a variabili separabili. $y(x) = 0$ (integrale singolare); $y(x) = \dfrac{3}{1-ce^{3\arctan x}}$, $c \in \mathbb{R}$ (integrale generale).

2. Equazione lineare del primo ordine. $y(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{c}{\sqrt{1+x^2}}$ $c \in \mathbb{R}$ (integrale generale).

Esercizio 2.7 $y_n(x) = \dfrac{n}{nx+1}$, $y_n(1) = \dfrac{n}{n+1}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} y_n(1) = 0$.

Esercizio 2.8 L'equazione differenziale è a variabili separabili, ossia del tipo

$$y'(x) = g(x)h(y)$$

dove $(-\infty, 0) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $(0, +\infty) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, $h(x) = y\ln y$. Sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale: la funzione g è continua su $(-\infty, 0)$ e h è di classe $\mathcal{C}^1$ su $(0, +\infty)$.

La funzione costante $y = 1$, ottenuta ponendo $\ln y = 0$, è soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Essa è l'*unica* soluzione di (3.6); il suo intervallo massimale è $(-\infty, 0)$.

Per trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{x} \\ y(-1) = e \end{cases} \tag{3.7}$$

è necessario determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale. Separando formalmente le variabili si ottiene:

$$\int \frac{1}{y \ln y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln |\ln y| = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|\ln y| = A|x| \quad A \in \mathbb{R}, A > 0$$

$$\ln y = A|x| \quad A \in \mathbb{R}, A \neq 0$$

Quindi l'integrale generale è: $y(x) = e^{A|x|}$, $A \in \mathbb{R}$. Posto $y(-1) = e$, si ottiene: $y(x) = e^{|x|}$, unica soluzione di (3.7).

Esercizio 2.9

1. Traiettorie ortogonali alla famiglia di curve $y = ax^2$.

   Pendenza delle parabole di equazione $y = ax^2$ nel punto (x, ax^2):

   $$y' = 2\,ax = 2\,\frac{y}{x^2}\,x = \frac{2\,y}{x}$$

   Pendenza della linea ortogonale nel punto (x, ax^2):

   $$y' = -\frac{x}{2\,y} \tag{3.8}$$

   La (3.8) è l'equazione differenziale (a variabili separabili) delle linee ortogonali. Separando formalmente le variabili si ottiene:

   $$\int y\, dy = -\frac{1}{2} \int x\, dx \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{2}\,y^2 = -\frac{1}{4}x^2 \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\,y^2 = -\frac{1}{4}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

$$x^2 + 2y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

Per $C > 0$ le equazioni (3.12) sono ellissi con centro di simmetria nell'origine degli assi.

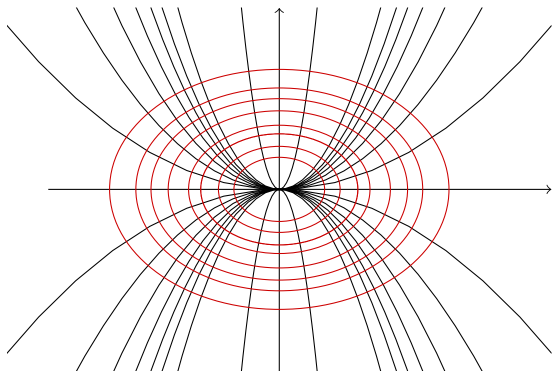

Figura 1: In nero le parabole di equazione $y = ax^2$, in rosso le traiettorie ortogonali.

2. Traiettorie ortogonali alla famiglia di curve $y = ax^n$. Si tratta di generalizzare al caso n il procedimento esposto nel punto precedente.

   Pendenza di $y = ax^n$ nel punto (x, ax^n):

   $$y' = nax^{n-1} = n\,\frac{y}{x^n}\,x^{n-1} = \frac{ny}{x}$$

   Pendenza della linea ortogonale nel punto (x, ax^n):

   $$y' = -\frac{x}{ny} \tag{3.13}$$

   La (3.13) è l'equazione differenziale delle linee ortogonali.

   $$y\,dy = -\frac{1}{n}\,x\,dx \tag{3.14}$$

   $$\int y\,dy = -\frac{1}{n}\int x\,dx \tag{3.15}$$

   $$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2n}x^2 \tag{3.16}$$

   $$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2n}x^2 + c \tag{3.17}$$

$$x^2 + ny^2 = C \tag{3.18}$$

Per $n = 1$ le curve $\mathcal{C}_a$ sono rette per l'origine; le linee ortogonali a $\mathcal{C}_a$ sono le circonferenze con centro l'origine.

Per $n > 1$ le linee ortogonali a $\mathcal{C}_a$ sono ellissi con centro di simmetria l'origine.

Esercizio 2.10

Pendenza dell'iperbole di equazione $y = \frac{a}{x}$ nel punto $(x, \frac{a}{x})$:

$$y' = -\frac{a}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Pendenza della linea ortogonale nel punto $(x, \frac{a}{x})$:

$$y' = \frac{x}{y} \tag{3.19}$$

La (3.19) è l'equazione differenziale (a variabili separabili) delle linee ortogonali. Per $y \neq 0$, separando formalmente le variabili si ottiene:

$$\int y\,dy = \int x\,dx \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = C \quad C \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

Le curve ortogonali sono iperboli equilatere riferite agli assi.

Esercizio 2.11

1. L'equazione differenziale del problema di Cauchy (2.1) è a variabili separabili: è del tipo $y' = g(x)h(y)$, dove $g(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ e $h(y) = y^2$. La funzione $g(x)$ è continua in $(0, +\infty)$ e $h(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Allora per il teormema di esistenza e unicità locale , esiste un $\delta > 0$ e un'unica funzione

   $$(2-\delta, 2+\delta) \xrightarrow{y} \mathbb{R}$$

   che è soluzione del problema di Cauchy (2.1)

2. È facile accorgersi che la soluzione cercata è $y(x) = 0$ (in questo caso, per determinare la soluzione non è necessario trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale). Il suo intervallo massimale è $(0, +\infty)$

3. Per $y \neq 0$, separando formalmente le variabili si ottiene:

   $$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\Big(2\ln|x| - \ln(1+x^2)\Big) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ora, è facile ricavare l'integrale generale dell'equazione in esame:

$$y(x) = -\frac{1}{\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Infine, posto $y(-1) = 1$, si ottiene $C = \ln\sqrt{2} - 1$. La soluzione del problema di Cauchy (2.2) è

$$y(x) = -\frac{1}{\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + \ln\sqrt{2} - 1}$$