Note sulle coniche

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

[0] Nome file: 'coniche_prop_focali_2018.tex'

1 Parabole

Definizione 1.1 (Parabola)**.** *In un piano è data una retta d e un punto F che non sta su d. Si chiama* parabola *il luogo geometrico di tutti i punti P del piano che hanno la stessa distanza da d e da F, cioè per i quali risulta*

$$PF = PH \tag{1.1}$$

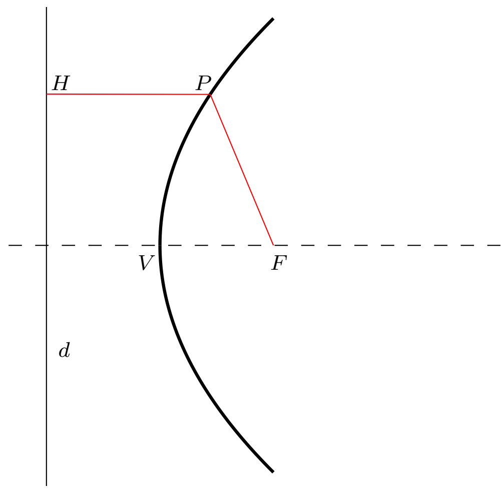

Figura 1: Parabola.

La retta d e il punto F si chiamano rispettivamente direttrice *e* fuoco *della parabola.*

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama *asse* della parabola, essa interseca la parabola nel punto V detto *vertice*. La parabola è simmetrica rispetto al proprio asse.

1.1 Proprietà focale della parabola

Teorema 1.2. *Sia P è un punto qualsiasi della parabola di fuoco F e direttrice d. Allora la tangente in P alla parabola divide in parti uguali l'angolo $\widehat{FPH}$.*

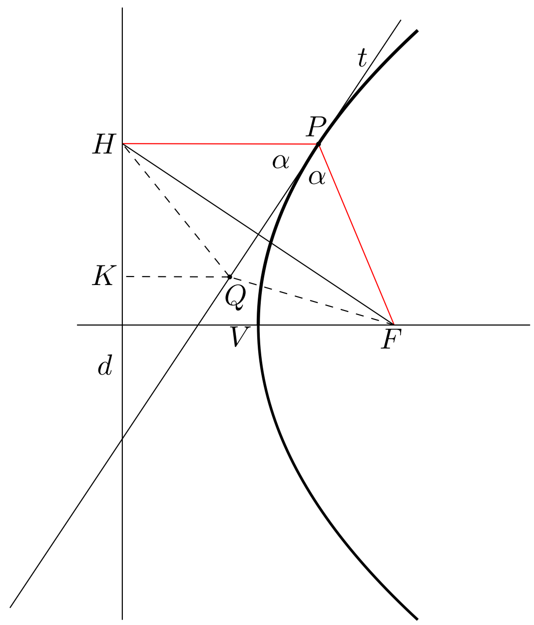

Figura 2: Proprietà focale della parabola: la tangente in P alla parabola è bisettrice dell'angolo $\widehat{FPH}$.

Dimostrazione.

Si consideri la parabola avente direttrice d e fuoco F. Sia P un punto qualsiasi della parabola e H il piede della retta ortogonale alla direttrice, passante per P. Si congiunga P rispettivamente con H e F e si tracci la bisettrice t dell'angolo $\widehat{FPH}$.

Si tratta ora di dimostrare che la retta t coincide con la tangente in P alla parabola. Si scelga un punto qualsiasi Q su t, con $Q \neq P$, e sia K il piede della perpendicolare a d passante per Q; si ha:

- $QF = QH$ perchè i triangoli QHP e QPF sono congruenti;

- $QH > QK$ perchè QK è la distanza di Q dalla direttrice d e quindi è minore di qualsiasi segmento 'obliquo' congiungente Q con la direttrice stessa.

Segue $QF > QK$ e, di conseguenza, Q non appartiene alla parabola. Per l'arbitrarietà con cui è stato scelto il punto Q su t, l'unico punto in comune tra t e la parabola è il punto P. Pertanto la bisettrice t coincide con la tangente in P alla parabola. ∎

Immediata conseguenza del teorema precedente e della legge della riflessione è la seguente proposizione

Proposizione 1.3. *In uno specchio parabolico i raggi incidenti paralleli all'asse della parabola vengono riflessi in raggi passanti per il fuoco e viceversa, raggi uscenti dal fuoco si riflettono in raggi paralleli alla direttrice.*

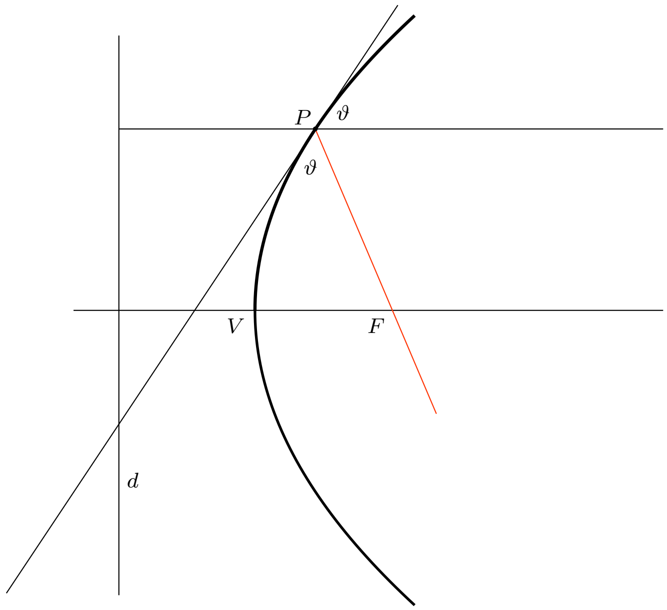

Figura 3: Proprietà focale della parabola: il raggio incidente, parallelo alla direttrice viene riflesso nel raggio (di colore rosso) passante per il fuoco della parabola.

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Nella costruzione di antenne paraboliche, di proiettori e di telescopi astronomici si utilizza questa proprietà .

1.2 La parabola vista come sezione conica

In questa sezione si vuole dimostrare che l'intersezione di un cono circolare con un piano π parallelo a una generatice del cono è una parabola. La dimostrazione proposta utilizza la sfera di Dandelin: con riferimento alla figura, essa è una sfera tangente al cono (i punti di tangenza sono i punti della circonferenza di colore rosso) e al piano π (il punto di tangenza è il punto denominato con F). La retta d (di colore verde) è l'intersezione tra piani π e σ (dove σ è il piano che contiene la circonferenza, luogo dei punti di intersezione tra cono e sfera).

Sia P un punto qualsiasi della curva γ intersezione tra cono e piano π, sia Q il punto di intersezione tra la generatrice VP del cono e il piano σ e, infine, sia R la proiezione ortogonale di P sulla retta d.

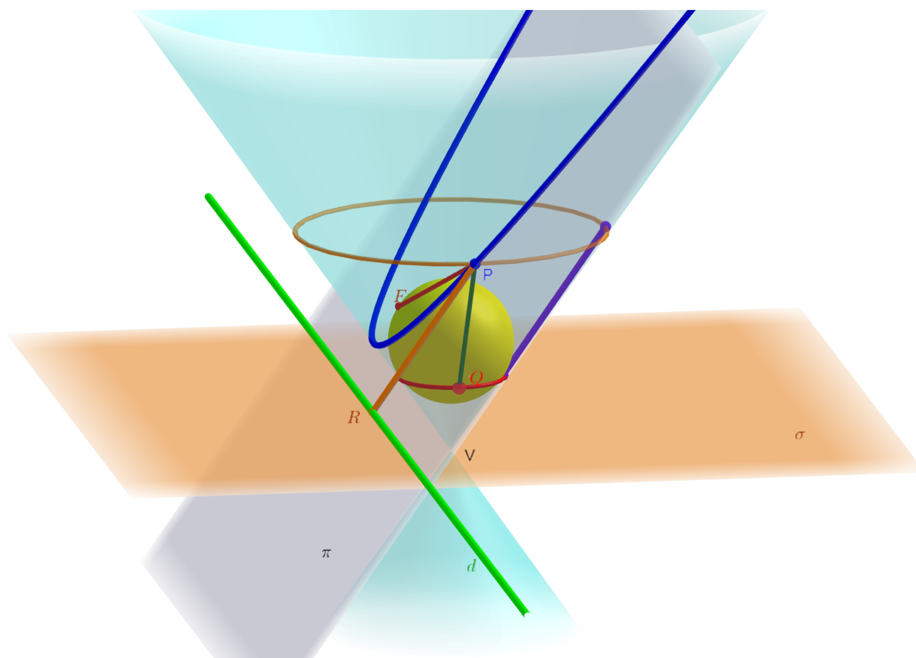

Figura 4: Il piano π è parallelo a una generatrice del cono. L'intersezione tra cono e piano π è una parabola.

Il primo fatto importante della dimostrazione consiste nell'osservare che

$$PF = PQ \tag{1.2}$$

perchè i due segmenti hanno il vertice P in comune e sono tangenti alla sfera. Inoltre, l'angolo formato dalla generatrice PQ del cono e σ è uguale all'angolo formato da PR e σ (P e R stanno su π). Per come è stato scelto il piano π (parallelo a una generatrice del cono) risulta

$$PQ = PR \tag{1.3}$$

Per la proprietà transitiva della congruenza segue

$$PF = PR \tag{1.4}$$

Quindi, il punto P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice d. ∎

Per comprendere meglio la dimostrazione si consiglia di vedere la figura dinamica reperibile in rete al seguente indirizzo: https://www.geogebra.org/m/luPINhPD (dalla quale è stata tratta quella proposta sopra).

1.3 Tangente alla parabola condotta da un punto dell'asse di simmetria

Proposizione 1.4 (Tangente alla parabola condotta da un punto del suo asse di simmetria)**.** *Sia t la tangente alla parabola condotta per il punto Q che sta sul suo asse di simmetria (esternamente a essa); P il punto di tangenza e H il piede della perpendicolare all'asse di simmetria passante per P. Allora il vertice V della parabola è punto medio del segmento HQ*

$$HV = VQ \tag{1.5}$$

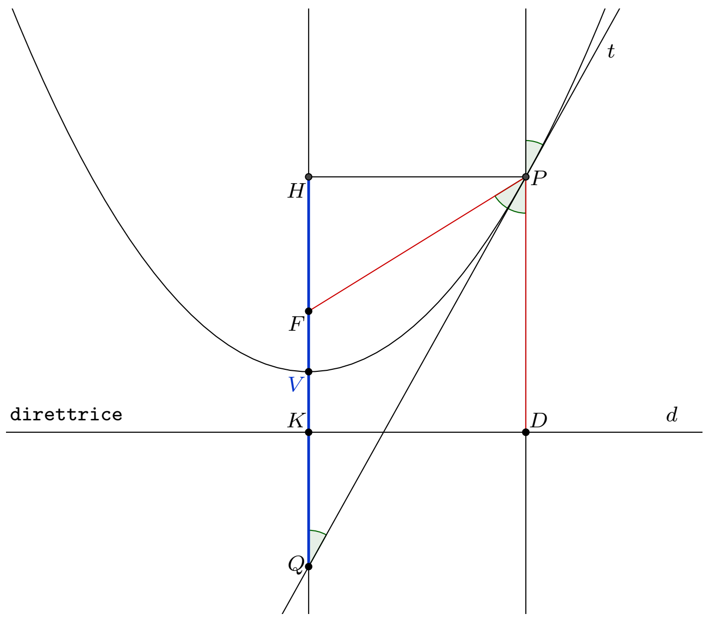

Figura 5: Tangente alla parabola condotta da un punto del suo asse di simmetria: $HV \simeq VQ$.

Dimostrazione.

Si osservi la figura (5). Il punto di tangenza P appartiene alla parabola mentre i segmenti PD e HK sono congruenti per costruzione. Allora

$$PF = PD = HK \tag{1.6}$$

Utilizzando la proprietà focale della parabola si verifica facilmente (spiegare come) che il triangolo di vertici P, F, Q è isoscele e

$$FQ = PF \tag{1.7}$$

Da (1.7) e (1.6), per la proprietà transitiva della congruenza, segue

$$FQ = HK \tag{1.8}$$

Infine, sottraendo da entrambi i termini della precedente uguaglianza il segmento $FV = VK$ si ottiene:

$$FQ - FV = HK - VK \tag{1.9}$$

ossia

$$VQ = HV \tag{1.10}$$

$\blacksquare$

2 Circonferenze e ellissi

Definizione 2.1 (Circonferenza)**.** *Sia r un numero reale positivo e O un punto del piano. Si chiama* circonferenza *il luogo geometrico di tutti i punti P del piano che hanno distanza da O uguale a r*

$$PO = r$$

Definizione 2.2 (Ellisse)**.** *Siano F_1 e F_2 due punti prefissati del piano. Si chiama* ellisse *l'insieme dei punti P del piano per i quali la somma delle distanze da F_1 e F_2 è costante*

$$PF_1 + PF_2 = \texttt{costante} \tag{2.1}$$

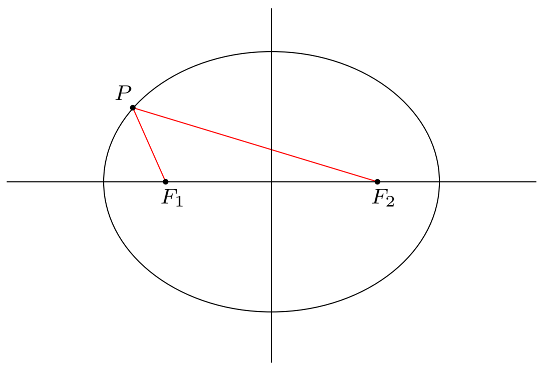

Figura 6: Ellisse.

Proprietà dell'ellisse.

1. L'ellisse è simmetrica
   - rispetto alla retta r contenente i fuochi F_1 e F_2;
   - rispetto all' asse s del segmento F_1F_2;
   - rispetto a $O = r \cap s$. Il punto O si chiama *centro di simmetria* dell'ellisse.

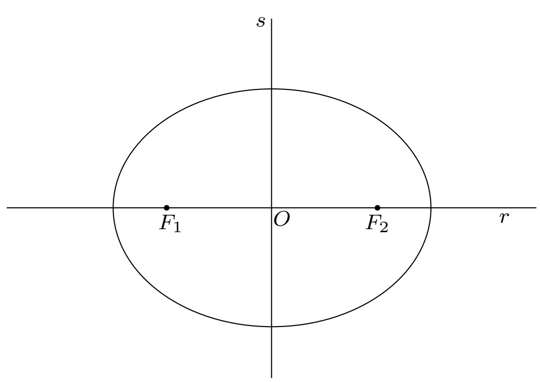

Figura 7: Le simmetrie dell'ellisse.

2. Se nell'uguaglianza (2.1) che definisce l'ellisse si pone `costante` $= 2a$ si ottiene

$$PF_1 + PF_2 = 2a \tag{2.2}$$

La costante $2a$ coincide con la lunghezza del diametro più lungo dell'ellisse (per convincersene si osservi la figura qui sotto in cui si è evidenziato il punto P dell'ellisse che si trova a sinistra sulla retta r). Il *semiasse maggiore* misura a.

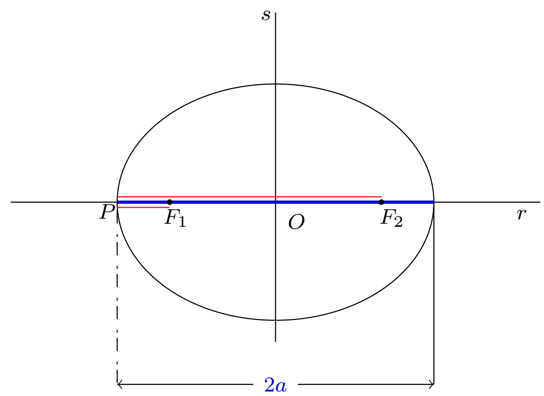

Figura 8: L'asse maggiore è lungo $2a$.

3. Indicata con c la distanza dei fuochi dal centro O, cioè $OF_1 = OF_2 = c$ si ha

$$b^2 = a^2 - c^2$$

dove b è la lunghezza del *semiasse minore*.

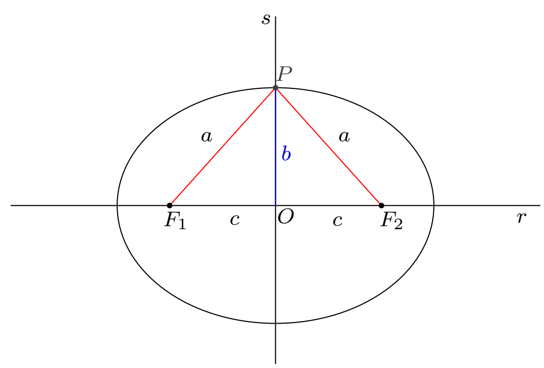

Figura 9: Il semiasse minore misura b.

2.1 Proprietà focale dell'ellisse (Apollonio, *Coniche*, Libro III, Proposizione 48)

Teorema 2.3. *Sia P è un punto qualsiasi dell'ellisse di fuochi F_1 e F_2. I segmenti PF_1 e PF_2 formano angoli uguali con la tangente in P all'ellisse.*

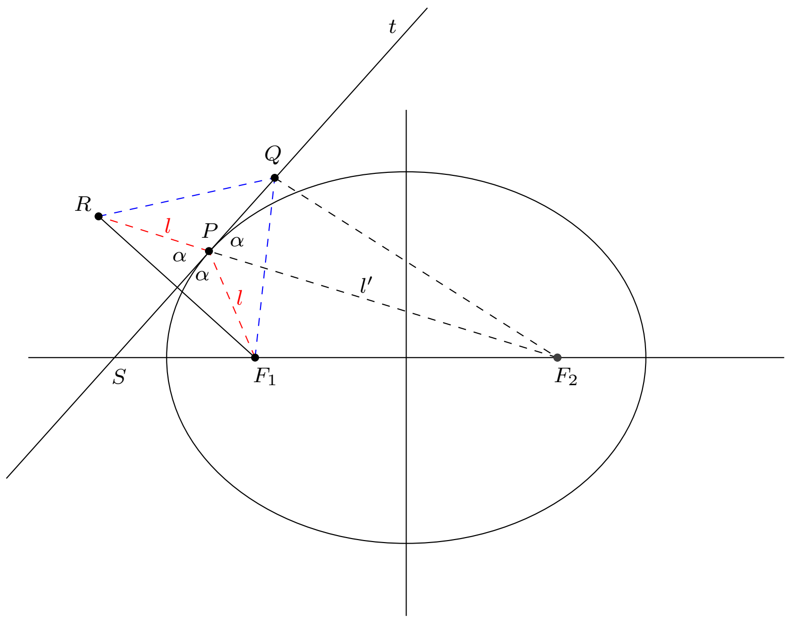

Figura 10: Proprietà focale dell'ellisse.

Dimostrazione.

Con riferimento alla figura, sia P un punto dell'ellisse di fuochi F_1, F_2.

Si congiunga il punto P rispettivamente con F_1 e F_2 e si determini sul prolungamento del segmento F_2P (dalla parte di P) il punto R in modo tale che $RP = PF_1$. La lunghezza del segmento RF_2 è la stessa per tutti i punti dell'ellisse (si veda l'uguaglianza 2.1 che definisce l'ellisse). Posto $PF_1 = l$ e $PF_2 = l'$ si ha

$$\begin{aligned} RF_2 &= RP + PF_2 \\ &= PF_1 + PF_2 \\ &= l + l' \end{aligned}$$

Si tracci ora la *bisettrice* t dell'angolo $\widehat{RPF_1}$ ($\widehat{RPS} = \widehat{SPF_1} = \alpha$).

Per ogni punto $Q \in t$, $Q \neq P$, si ha $RQ = QF_1$ (la verifica è immediata) e

$$QF_1 + QF_2 = RQ + QF_2 > l + l'$$

perchè i punti R, Q, F_2 non sono allineati.

Segue che ogni $Q \in t$ (con Q distinto da P) risulta esterno all'ellisse. Pertanto la bisettrice t, che ha in comune con l'ellisse il solo punto P, coincide con la tangente.

Infine, è immediato osservare che $\widehat{SPF_1} = \widehat{QPF_2}$ ∎

3 Iperbole

Definizione 3.1 (Iperbole)**.** *Siano F_1 e F_2 due punti prefissati del piano. Si chiama* iperbole *l'insieme dei punti P del piano per i quali il valore assoluto della differenza delle distanze da F_1 e F_2 è costante*

$$|PF_1 - PF_2| = \texttt{costante}$$

Posto $2a = \texttt{costante}$ si ottiene:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \tag{3.1}$$

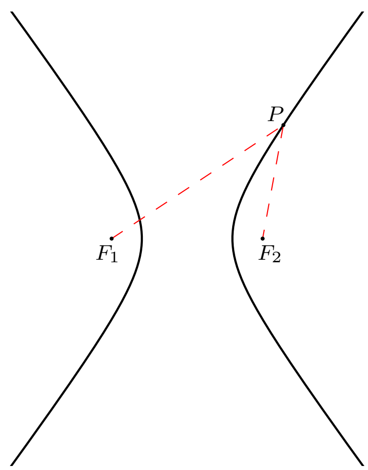

Figura 11: Iperbole.

4 Diametri e direzioni coniugate

Un'altra proprietà sulle coniche, anche questa dimostrata da Apollonio, è la seguente

Teorema 4.1. *Assegnata una conica e una direzione nel suo piano vale il seguente fatto:*

il luogo geometrico dei punti medi di tutte le corde parallela a quella direzione è una retta

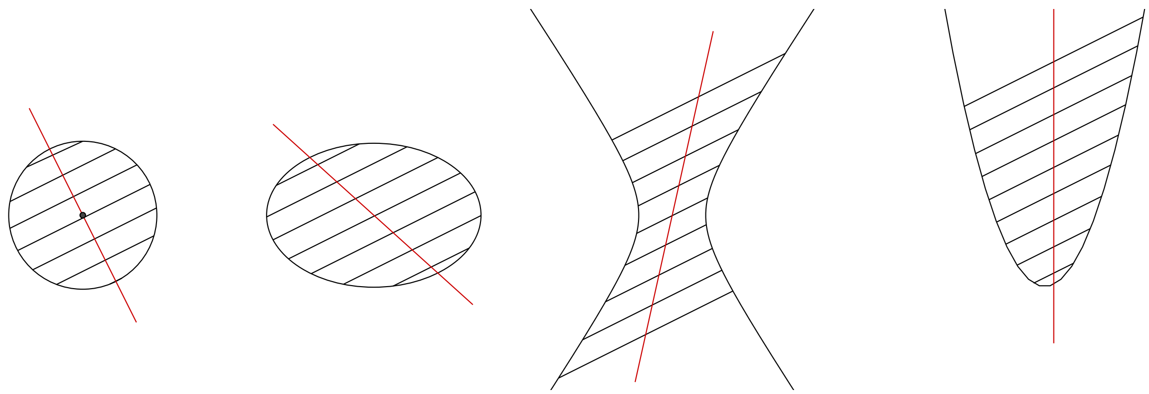

Figura 12: Diametro (in rosso) di una conica secondo una direzione prestabilita.

Definizione 4.2. *Data una conica $\mathcal{C}$ e una direzione nel suo piano, si chiama* diametro *della conica la retta che contiene i punti medi di tutte le corde parallele a quella direzione. Si chiama* direzione coniugata *al diametro la direzione della famiglia di corde parallele.*

Nel caso della circonferenza la direzione del diametro e quella coniugata sono perpendicolari, per le altre coniche no.

Nel caso dell'ellisse e dell'iperbole tutti i diametri passano per uno stesso punto: il centro di simmetria della conica, mentre nel caso della parabola tutti i diametri sono paralleli all'asse di simmetria della parabola.

Le proposizioni citate in questo paragrafo verranno dimostrate in seguito, con l'ausilio del metodo delle coordinate. Si consiglia di verificare la validità di tali risultati facendo opportune figure dinamiche con Geogebra.

5 Una seconda definizione di ellisse e iperbole.

Definizione 5.1 (Ellisse)**.** *In un piano è data una retta d e un punto F che non sta su d e un numero e, $0 \leq e < 1$. Si chiama* ellisse *il luogo geometrico di tutti i punti P del piano per i quali il rapporto delle distanze del punto P da F e dalla direttrice d è uguale al numero e, cioè*

$$\frac{PF}{PH} = e$$

dove $0 \leq e < 1$.

La retta d e il punto F si chiamano rispettivamente *direttrice* e *fuoco* dell'ellisse, il numero e si chiama *eccentricità* .

Definizione 5.2 (Iperbole)**.** *In un piano è data una retta d e un punto F che non sta su d e un numero e, $e > 1$. Si chiama* iperbole *il luogo geometrico di tutti i punti P del piano per i quali il rapporto delle distanze del punto P da F e dalla direttrice d è uguale alla costante e, cioè*

$$\frac{PF}{PH} = e$$

dove $e > 1$.

La retta d e il punto F si chiamano rispettivamente *direttrice* e *fuoco* dell'iperbole, il numero e si chiama *eccentricità* .

6 Equazioni

Parabola.

Scelta del sistema di riferimento.

Asse x = asse del segmento FK, dove K è il piede della perpendicolare alla direttrice contenente il fuoco F (il verso di x è scelto in modo arbitrario).

Asse y = perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco (il verso positivo di y è quello contenente F).

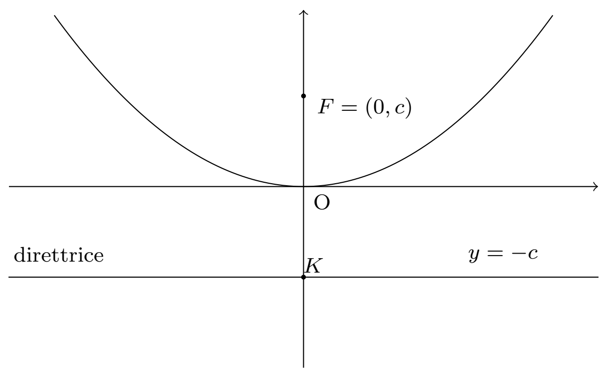

Figura 13: Il sistema di riferimento è stato scelto in modo che l'asse di simmetria della parabola coincida con l'asse y e il vertice con l'origine O degli assi.

Posto $F = (0, f)$ con $f > 0$, l'equazione della direttrice è $y = -f$. Se $P = (x, y)$ è un punto qualsiasi del piano cartesiano, dall'uguaglianza (1.1) che definisce la parabola si ottiene:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-f)^2} = |y + f|$$

Da cui si ricava

$$y = \frac{1}{4f}\, x^2$$

Posto $a = \frac{1}{4f}$ l'equazione della parabola è del tipo

$$y = ax^2 \tag{6.1}$$

Ora se si esegue la traslazione di vettore $V = (x_v, y_v)$ la parabola $y = ax^2$ viene trasformata in un'altra parabola avente vertice in V e asse di simmetria parallelo all'asse y. *Qual è l'equazione della parabola traslata?*

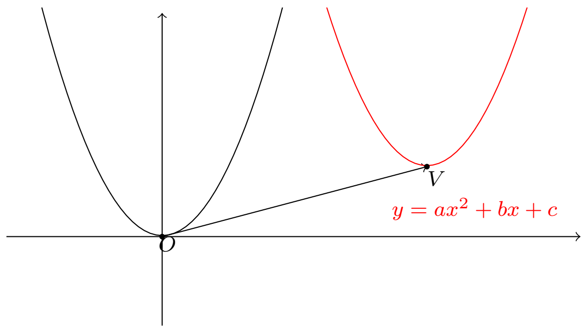

Figura 14: Equazione della parabola con vertice in V asse di simmetria parallelo all'asse y.

Le equazioni della traslazione di vettore V sono

$$\begin{cases} x' = x + x_v \\ \\ y' = y + y_v \end{cases} \tag{6.2}$$

e quelle inverse

$$\begin{cases} x = x' - x_v \\ \\ y = y' - y_v \end{cases} \tag{6.3}$$

Sostituendo le (6.3) in (6.1) si ottiene $y' = ax'^2 - 2ax_v\, x' + ax_v^2 + y_v$ che, riscritta senza apici, è

$$y = ax^2 - 2ax_v\, x + ax_v^2 + y_v \tag{6.4}$$

Dunque l'equazione della parabola con asse di simmetria una retta parallela all'asse y e vertice in $V = (x_v, y_v)$ ha equazione

$$y = ax^2 + b\, x + c \tag{6.5}$$

dove si è posto $b = -2ax_v$ e $c = ax_v^2 + y_v$

Ellisse.

Scelta del sistema di riferimento.

Asse x = retta contenente i fuochi F_1, F_2 (il verso di x è scelto in modo arbitrario).

Asse y = asse del segmento F_1F_2 (il verso di y è scelto in modo arbitrario).

Posto $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ con $c > 0$ e indicato con $P = (x, y)$ un punto qualsiasi del piano cartesiano, dall'uguaglianza (2.2) che definisce l'ellisse si ottiene:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Dopo un po' di calcoli e semplificazioni (per eliminare le radici bisogna elevare al quadrato due volte) si ottiene

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2\,y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Posto $b^2=a^2-c^2$ si ha:

$$b^2\,x^2+a^2\,y^2=a^2b^2 \tag{6.6}$$

Infine, dividendo per a^2b^2 si ottiene l'equazione dell'ellisse riferita agli assi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6.7}$$

Iperbole.

L'iperbole di fuochi F_1, F_2 è il luogo geometrico dei punti P del piano che soddisfa l'equazione

$$|PF_1-PF_2|=2a$$

dove $2a$ è una costante positiva. La condizione affinchè l'iperbole esista è

$$|PF_1-PF_2|<F_1F_2 \tag{6.8}$$

Posto $F_1F_2=2c$, da (6.8) si ottiene $a<c$.

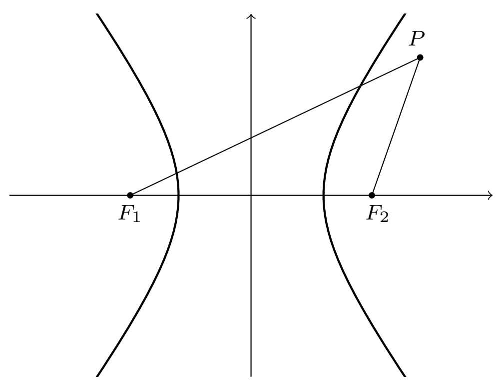

Figura 15: Si osservi il triangolo PF_1F_2. Per una nota proprietà dei triangoli, il lato F_1F_2 è maggiore della differenza degli altri due lati, cioè $2a<2c$.

Per determinare l'equazione dell'iperbole si procede come per le altre coniche.

Scelta del sistema di riferimento.

Asse x = retta contenente i fuochi F_1, F_2 (il verso di x è scelto in modo arbitrario).

Asse y = asse del segmento F_1F_2 (il verso di y è scelto in modo arbitrario).

Posto $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ con $c > 0$ e indicato con $P = (x, y)$ un punto qualsiasi del piano cartesiano, dall'uguaglianza (3.1) che definisce l'iperbole si ottiene

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

Elevando al quadrato si ha

$$2(x^2 + c^2 + y^2) - 2\sqrt{(x^2 + c^2 - 2cx + y^2)(x^2 + c^2 + 2cx + y^2)} = 4a^2 \tag{6.9}$$

$$(x^2 + c^2 + y^2) - \sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 \tag{6.10}$$

Isolando la radice quadrata, elevando un'altra volta al quadrato e infine, eliminando la quantità $(x^2 + c^2 + y^2)^2$ che compare in entrambi i termini dell'uguaglianza si ricava

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2\, y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Posto infine $b^2 = c^2 - a^2$ l'equazione (riferita agli assi) che rappresenta l'iperbole assume la seguente forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.11}$$

6.1 Area dell'ellisse. (Archimede, *Sui Conoidi e gli Sferoidi*, Proposizione 4-5.)

Il trattato di Archimede (287 a.C. - 212 a.C.) dal titolo "Sui Conoidi e gli Sferoidi " [1] contiene la seguente proposizione

La superficie dell'ellisse è a quella del circolo circoscritto
nella proporzione del piccolo asse al grande asse.

Quella riportata qui sotto è la figura di Archimede. All'ellisse di semiasse maggiore a e semiasse minore b è stato circoscritto il cerchio di raggio a, la cui area è πa^2. La precedente proposizione afferma che

$$A(\mathcal{E}) : \pi a^2 = b : a \tag{6.12}$$

dove $A(\mathcal{E})$ indica l'area dell'ellisse. Da (6.12) segue immediatamente che $A(\mathcal{E}) = \pi ab$.

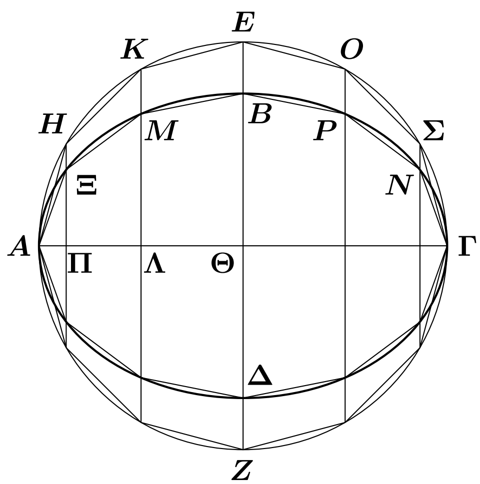

Figura 16: Figura di Archimede.

La dimostrazione di Archimede si basa sui seguenti due fatti, a lui ben noti.

Proposizione 6.1. *Le aree di due poligoni regolari simili stanno tra loro come i quadrati dei raggi dei cerchi ad essi circoscritti.*

In altre parole, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono due poligoni regolari simili allora

[1] Il trattato inizia con questa lettera:"Archimede a Dositeo, salute. Rimetto in questo libro, non solo le dimostrazioni dei rimanenti teoremi non compresi fra quelli che ti mandai, ma ben pure le dimostrazioni di altri teoremi che ho scoverto in seguito e che hanno tenuto incerta la mia mente; poiché, avendoli esaminati a più riprese, mi sembravano presentare molte difficoltà. Ecco perchè questi teoremi non furono compresi negli altri; ma avendoli esaminati nuovamente con maggiore attenzione, ho trovato i risultati che mi erano sfuggiti [...] ".

$$\frac{A(\mathcal{P})}{A(\mathcal{P}')} = \frac{r^2}{r'^2}$$

dove $A(\mathcal{P}, A(\mathcal{P}')$ sono le aree dei poligoni e r, r' i raggi dei cerchi $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ circoscritti ad essi.

Dimostrazione.

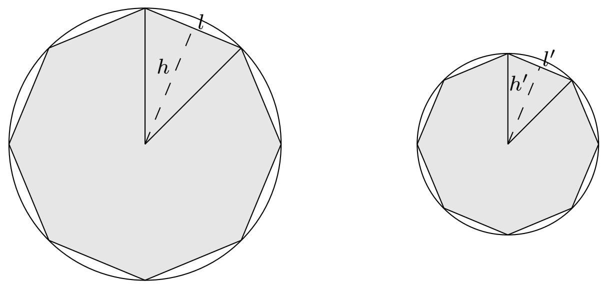

Figura 17: Il rapporto delle aree dei poligoni è uguale al rapporto dei quadrati dei raggi dei cerchi circoscritti.

Se i poligoni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ hanno n lati le loro aree sono n volte l'area del triangolo (isoscele) avente per lati il lato del poligono e due raggi. Quindi

$$A(\mathcal{P}) = \frac{n}{2}\, l\, h \qquad A(\mathcal{P}') = \frac{n}{2}\, l'\, h'$$

dove l, l' sono i lati dei poligoni e h, h' le apoteme. I due triangoli in questione sono simili

$$l : l' = h : h' = r : r'$$

Segue

$$\frac{A(\mathcal{P})}{A(\mathcal{P}')} = \frac{\frac{n}{2}\, l\, h}{\frac{n}{2}\, l'\, h'} = \frac{r^2}{r'^2}$$

∎

Proposizione 6.2. *Sia $\mathcal{E}$ l'ellisse di semiassi a, b $(a > b)$ e $\mathcal{C}$ la circonferenza ausiliaria avente centro nel centro dell'ellisse e raggio a. Allora*

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a}$$

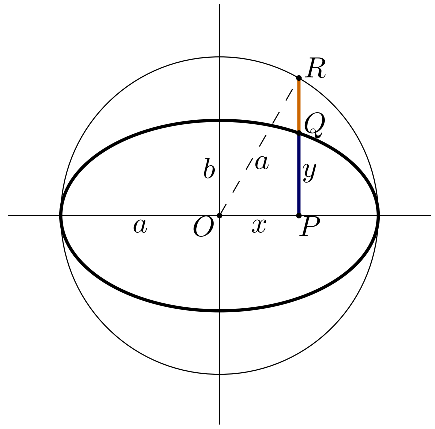

Figura 18:

La dimostrazione di questo fatto è immediata se si usano le coordinate. Infatti, dall'equazione dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ si ottiene

$$PQ = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{a}\,PR$$

$\blacksquare$

Ora si tratta di dimostrare il teorema seguente

Teorema 6.3. *L'area dell'ellisse $\mathcal{E}$ di semiassi a e b vale $\pi a\,b$.*

Quella proposta qui è una rilettura della dimostrazione di Archimede.

Passo n. 1. Costruzione della figura. Si tracci l'ellisse $\mathcal{E}$ di semiassi a, b $(a > b)$ e la circonferenza ausiliaria $\mathcal{C}_a$ avente il centro nel centro dell'ellisse e raggio a. Si inscriva nel cerchio ausiliario un poligono regolare $\mathcal{P}_a$ di $4n$ lati in modo tale che due suoi vertici coincidano con gli estremi A, A' del suo diametro orizzontale. Le perpendicolari al diametro AA' condotte per i vertici del poligono P_a intersecano l'ellisse nei punti $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \ldots$; congiungendo tali punti si ottiene il poligono $\mathcal{P}$ inscritto nell'ellisse.

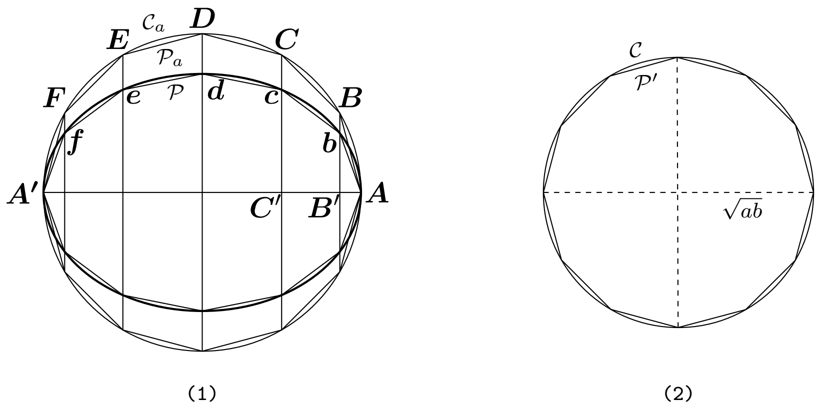

Figura 19: (1). $\mathcal{C}_a$ = cerchio ausiliario di raggio a, $\mathcal{P}_a$ = poligono inscritto nel cerchio ausiliario $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{P}$ = poligono inscritto nell'ellisse.
(2). $\mathcal{C}$ = cerchio di raggio $\sqrt{ab}$, $\mathcal{P}'$ = poligono inscritto nel cerchio ausiliario $\mathcal{C}$.

Passo n. 2. I poligoni $\mathcal{P}, \mathcal{P}_a$ sono unione di coppie di triangoli del tipo AbB' e ABB' e di coppie di trapezi del tipo $B'bcC'$ e $B'BCC'$. Per la Proposizione (6.2) si ha

$$\frac{\boldsymbol{C'c}}{\boldsymbol{C'C}} = \frac{\boldsymbol{B'b}}{\boldsymbol{B'B}} = \frac{b}{a}$$

Segue che il rapporto delle aree dei due poligoni vale $\dfrac{b}{a}$

$$A(\mathcal{P}) : A(\mathcal{P}_a) = b : a \tag{6.13}$$

Passo n. 3. Al crescere del numero di lati dei poligoni (in termini moderni, per $n \longrightarrow +\infty$) si ottiene

$$\begin{tikzcd}
A(\mathcal{P}) \arrow[d] & : & A(\mathcal{P}_a) \arrow[d] & = & b & : & a \\
A(\mathcal{E}) & : & A(\mathcal{C}_a) & = & b & : & a
\end{tikzcd}$$

Segue $A(\mathcal{E}) = \pi a^2 \, \frac{b}{a} = \pi ab$. Il punto critico della dimostrazione è ovviamente il passo 3. Per aggirare le difficoltà Archimede introduce un nuovo cerchio $\mathcal{C}$ di raggio $\sqrt{ab}$ (Figura 19, (2)) e con una doppia *reductio ad absurdum* dimostra che l'area dell'ellisse è uguale all'area di $\mathcal{C}$.

1) Si supponga, per assurdo, che l'area del cerchio $\mathcal{C}$ sia maggiore di quella dell'ellisse ($A(\mathcal{C}) > A(\mathcal{E})$). Si inscriva, nel cerchio $\mathcal{C}$ (Figura 19, (2)), un poligono equilatero P' di $4n$ lati in modo tale che la sua area sia maggiore di quella dell'ellisse ($A(\mathcal{P}') > A(\mathcal{E})$). Per la Proposizione (6.1) si ha

$$A(\mathcal{P}') : A(\mathcal{P}_a) = ab : a^2 = b : a \tag{6.14}$$

Vale inoltre la proporzione (6.13) ossia

$$A(\mathcal{P}) : A(\mathcal{P}_a) = b : a \tag{6.15}$$

Segue che $A(\mathcal{P}') = A(\mathcal{P})$. Ciò è assurdo perchè l'area di $\mathcal{P}'$ è strettamente maggiore dell'area dell'ellisse e, di conseguenza, è strettamente maggiore dell'area di $\mathcal{P}$, cioè $A(\mathcal{P}') > A(\mathcal{E}) > A(\mathcal{P})$. Quindi l'area del cerchio $\mathcal{C}$ non può essere maggiore di quella dell'ellisse.

2) Si supponga, per assurdo, che l'area del cerchio $\mathcal{C}$ sia minore di quella dell'ellisse ($A(\mathcal{C}) < A(\mathcal{E})$). Si inscriva nell'ellisse $\mathcal{E}$ (Figura 19, (1)) un poligono equilatero P di $4n$ lati in modo tale che la sua area sia maggiore di quella di $\mathcal{C}$ e ($A(\mathcal{P}) > A(\mathcal{C})$). Si ha, come nel caso precedente,

$$A(\mathcal{P}') : A(\mathcal{P}_a) = ab : a^2 = b : a \tag{6.16}$$

$$A(\mathcal{P}) : A(\mathcal{P}_a) = b : a \tag{6.17}$$

Segue che $A(\mathcal{P}') = A(\mathcal{P})$, ma ciò è assurdo perchè $A(\mathcal{P}) > A(\mathcal{C}) > A(\mathcal{P}')$. ∎

7 Esercizi

Esercizio 7.1 (Ellisse per punti). *Per disegnare per punti l'ellisse avente distanza focale* $AB = 10$ *e costante pari a* 12 *si procede nel seguente modo: si tracciano le circonferenze avente il centro nel fuoco* A *dell'ellisse e raggio* r *con* $1 \le r \le 11$*, e poi quelle avente il centro nel fuoco* B *e stesso raggio. I punti evidenziati in rosso appartengono all'ellisse cercata. Perchè? Spiegare.*

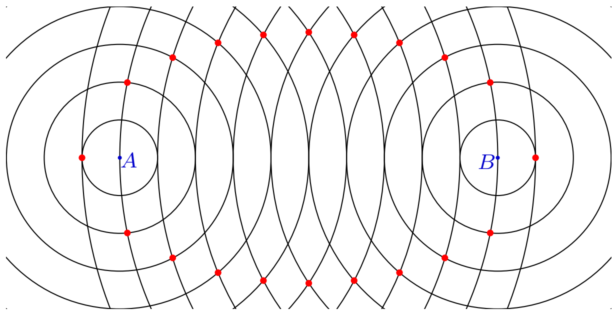

Figura 20: Costruzione dell'ellisse per punti.

Esercizio 7.2 (Iperbole per punti). *Per disegnare per punti l'iperbole avente distanza focale* $AB = 4$ *e costante pari a* 2 *si procede nel seguente modo: si tracciano le circonferenze avente il centro nel fuoco* A *dell'iperbole e raggio* r *con* $1 \le r \le 12$*, e poi quelle avente il centro nel fuoco* B *e stesso raggio. I punti evidenziati in rosso appartengono all'iperbole cercata. Perchè? Spiegare.*

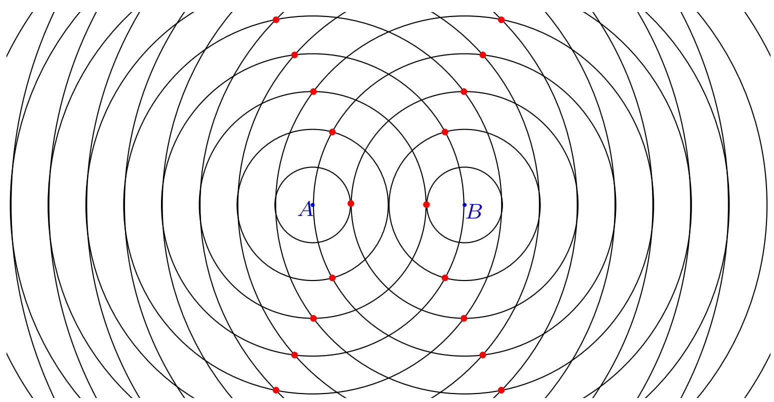

Figura 21: Costruzione dell'iperbole per punti.