Numeri complessi

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Dicembre 2013.

Indice

1 Numeri complessi

Definizione 1.1. *Si chiama unità immaginaria il numero i per il quale risulta*

$$i^2 = -1$$

Potenze dell'unità immaginaria

Dalle uguaglianze $i^0 = 1$ e $i^2 = -1$ si ottengono tutte le altre potenze dell'unità immaginaria e cioè $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = 1$ $i^5 = i^4 i = i$ eccetera. In generale si ha

$$i^n = i^k \text{ dove } k = 0, 1, 2, 3.$$

Per esempio $i^{27} = i^{4 \cdot 6+3} = i^3 = -i$.

Oltre alla potenza n-esima dell'unità immaginaria si vuole poter sommare e moltiplicare il numero i con un qualunque numero reale. I numeri z che così si ottengono si possono rappresentare sempre nella forma $z = x + iy$ $x, y \in R$ (perché?) e sono chiamati *numeri complessi*. In sintesi, ogni numero complesso z si può scrivere nella forma

$$z = x + iy$$

[0]Nome file: 'complessi-2013.tex'

detta *forma algebrica* di un numero complesso. Il numero reale $x \in \mathbb{R}$ si dice *parte reale* e $y \in \mathbb{R}$ *parte immaginaria* di z. L'insieme di tutti i numeri complessi è denotato con la lettera $\mathbb{C}$.

1.1 Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

Addizione e moltiplicazione di numeri complessi

Siano $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$ due numeri complessi definiamo

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Rispetto all'addizione $\mathbb{C}$ è un *gruppo abeliano*, valgono cioè le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $z, z' \in \mathbb{C}, \quad z + z' = z' + z$.
2. *Proprietà associativa.* Per ogni $z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
3. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ il numero $0 = 0 + i0$ costituisce l'*elemento neutro* dell'addizione, cioè
$$z + 0 = 0 + z = z$$
4. Per ogni numero complesso $z = x + iy$ il numero $-z = -x - iy$ costituisce l'*opposto* di z e cioè
$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Rispetto alla moltiplicazione $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un *gruppo abeliano*, valgono cioè le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $z, z' \in \mathbb{C}, \quad z\, z' = z'\, z$.
2. *Proprietà associativa.* Per ogni $z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad (z\, z')\, z'' = z\, (z'\, z'')$.
3. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ il numero $1 = 1 + i0$ costituisce l'*elemento neutro* della moltiplicazione, cioè $z\,1 = 1\,z = z$
4. Per ogni numero complesso $z = x + iy \neq 0$ il numero
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$
costituisce l'*inverso* di z e cioè $z\, z^{-1} = z^{-1}\, z = 1$

Infine, vale la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma* che lega le due operazioni, cioè per ogni $z, z', z'' \in \mathbb{C}$

$$z\,(z' + z'') = z\,z' + z\,z'' \qquad \text{e} \qquad (z' + z'')\,z = z'\,z + z''\,z$$

$\mathbb{C}$, rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione definite sopra, è un *campo*. Si può considerare un ampliamento del campo dei numeri reali nel senso che, i numeri $z = x + iy$ con $y = 0$ si possono identificare con i numeri reali. Inoltre, il fatto che $\mathbb{C}$ possieda la stessa struttura algebrica di $\mathbb{R}$ permette di eseguire i calcoli usando la stessa algebra che si è abituati a usare con i numeri reali (bisogna però ricordare che $i^2 = -1$ e che $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato!).

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

L'interpretazione geometrica dei numeri complessi è attribuita a Wessel (1745-1818), Argand (1768-1822) e Gauss (1777-1855) che quasi contemporaneamente giunsero agli stessi risultati. Nel piano cartesiano, denominato in questo contesto *piano di Argand-Gauss*, il numero complesso $z = x+iy$ è rappresentato dal vettore spiccato dall'origine avente la punta della freccia nel punto (x, y) o, equivalentemente, dal punto di coordinate (x, y).

Se $z = x + iy$, i due numeri reali x, y si chiamano rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso z e si denotano

$$x = \mathrm{Re}(z), \qquad y = \mathrm{Im}(z), \tag{1.1}$$

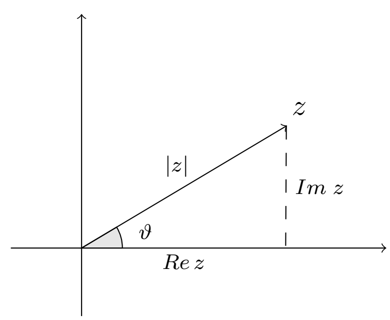


Figura 1: Rappresentazione del numero complesso $z = x+iy$ nel piano di Argand-Gauss. $x = Re\ z$ è la parte reale di z e $y = Im\ z$ la parte immaginaria. Modulo e l'argomento di z sono rispettivamente $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ e ϑ.

Il *modulo* di $z \in \mathbb{C}$ è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La somma dei due numeri complessi z e z' è visualizzabile, nel piano di Argand-Gauss, mediante 'regola del parallelogramma' applicata ai vettori z e z' mentre la disuguaglianza triangolare assume la seguente forma

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

L'operatore di coniugio

Definizione 1.2. *Sia $z = x + iy$ un qualsiasi numero complesso. Si chiama* coniugato di z *il numero*

$$\overline{z} = x - iy$$

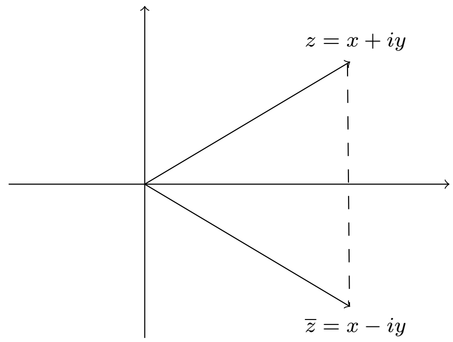


Figura 2: Il coniugato $\overline{z}$ di z.

Per l'operatore di coniugio valgono le seguenti proprietà (le dimostrazioni sono lasciate per esercizio)

Proposizione 1.3. *Per ogni $z, z' \in \mathbb{C}$ si ha*

1. *Il coniugato della somma è la somma dei coniugati, cioè $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$*
2. *Il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati, coè $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$*

Proposizione 1.4.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli, vale cioè il seguente fatto

Proposizione 1.5. *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$|zw| = |z||w| \tag{1.2}$$

Poiché la (1.2) è un'uguaglianza tra numeri non negativi, essa equivale all'uguaglianza

$$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$$

che si ottiene elevando a quadrato entrambi i membri.

Prima dimostrazione. La dimostrazione si può fare con un calcolo diretto: posto

$$z = x + iy, \qquad w = x' + iy'$$

si ha

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= |(xx' - yy', xy' + yx')| \\ &= (xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2 \\ &= x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \\ &= |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

■

Seconda dimostrazione. Si ricordi che il quadrato del modulo di z è il prodotto di z per il suo coniugato e che il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati.

Allora, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)\,\overline{(zw)} \\ &= (zw)\,(\overline{z}\,\overline{w}) \\ &= (z\overline{z})\,(w\overline{w}) \\ &= |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

■

1.2 Impossibilità di ordinare il campo $\mathbb{C}$

I numeri reali $\mathbb{R}$ costituiscono un campo *ordinato* (che inoltre è completo). Affermare che $\mathbb{R}$ è un campo *ordinato* significa che è definita in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine "$>$" che è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, nel senso che valgono le due condizioni seguenti:

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale una e una sola di queste relazioni: $x > 0$, $x = 0$ oppure $-x > 0$.
2. Se $x > 0$ e $y > 0$, allora $x + y > 0$ e $xy > 0$.

Al contrario, il campo $\mathbb{C}$ non può essere ordinato.

Teorema 1.6. *Non esiste alcun ordinamento del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.*

Questa affermazione significa che *non esiste alcun sottoinsieme P di $\mathbb{C}$ che soddisfi le due proprietà elencate sopra.*

Dimostrazione.

Si osservi anzitutto che, in un campo ordinato, *il quadrato di un qualunque elemento non nullo è sempre positivo.* Infatti: se $z > 0$, moltiplicando per z segue $z^2 > 0$. Se invece $z < 0$, si ha $-z > 0$; moltiplicando primo e secondo membro di quest'ultima disuguaglianza per $-z$, si ha ancora $z^2 = (-z)(-z) > 0$. Quindi, in ogni caso, $z^2 > 0$ (se $z \neq 0$).

Si supponga ora, per assurdo, che esista un ordinamento (compatibile con le operazioni di somma e prodotto) nel campo $\mathbb{C}$. Per ogni $z \neq 0$, si deve avere $z^2 > 0$. In particolare, si deve avere $1^2 > 0$ e $i^2 > 0$ e, di conseguenza, $1^2 + i^2 > 0$. Assurdo, perch $1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0$. ■

Dunque, le disuguaglianze "$z > w$" tra numeri complessi non hanno alcun senso.

1.3 Il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi unitari

Si consideri il sottoinsieme U dei numeri complessi unitari. Nell piano di Gauss questi numeri sono rappresentati dalla circonferenza di raggio uno e centro l'origine.

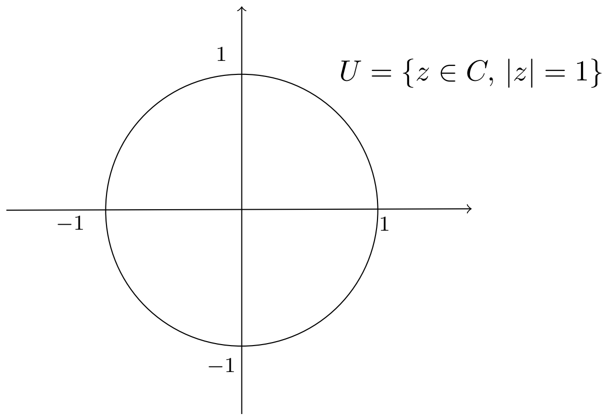


Figura 3: L'insieme U dei numeri complessi unitari.

Vale il seguente

Teorema 1.7. *L'insieme U dei numeri complessi unitari costituisce un gruppo moltiplicativo abeliano.*

Dimostrazione. Basta osservare quanto segue

1) il prodotto di due numeri complessi unitari è un numero complesso unitario, infatti se $u, v \in U$ si ha $|uv| = |u|\,|v| = 1$ e quindi $uv \in U$;

2) la moltiplicazione di numeri complessi unitari è associativa, cioè per ogni $u, v, w \in U$ si ha $(uv)w = u(vw)$;

3) la moltiplicazione di numeri complessi unitari è commutativa, cioè per ogni $u, v \in U$ si ha $uv = vu$.

4) il numero $1 = 1 + i0$ ricopre nell'insieme U il ruolo di 'elemento neutro' rispetto alla moltiplicazione, cioè per ogni $u \in U$ si ha $u1 = 1u = u$;

5) l'inverso di un numero complesso unitario è , a sua volta, un numero complesso unitario, infatti ogni $u \in U$ ha per inverso il numero $\overline{u}$ il cui modulo ha lunghezza uno. ∎

Si osservi che se α è l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con il numero $u \in U$ allora si ha
$$u = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
dove $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ rappresentano rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* di u.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso

Se $z = x+iy$ è un numero complesso diverso da zero allora anche il suo modulo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ è diverso da zero, di conseguenza si ha: $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$.

Il numero complesso $\dfrac{z}{|z|}$ è certamente unitario e quindi può essere scritto nella forma $\cos\alpha + i\sin\alpha$. Allora si ha

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

L'ultima uguaglianza costituisce la cosiddetta *forma trigonometrica* di un numero complesso. L'angolo α si chiama l'*argomento* di z. Modulo e argomento sono le coordinate polari di z, ovviamente esse permettono di rappresentare nel piano di Argand-Gauss qualsiasi numero complesso z.

1.5 Prodotto di numeri complessi. Formula di De Moivre (1730).

Teorema 1.8 (**Prodotto di numeri complessi**). *Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti, cioè se* $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *e* $z' = |z'|(\cos\beta + i\sin\beta)$ *si ha*

$$z\,z' = |z||z'|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big) \tag{1.3}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un calcolo che fa uso della formula di addizione di coseno e seno:

$$\begin{aligned} z\,z' &= [r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]\cdot[r'(\cos\beta + i\sin\beta)] \\ &= rr'[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)] \\ &= rr'[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] \end{aligned}$$

■

Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ è

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \tag{1.4}$$

Infatti si verifica subito, con la formula (1.16), che il prodotto

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]\cdot[\cdot r^{-1}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))]$$

vale 1. Dalle formule (1.16) e (1.4) segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.*

Un'immediata conseguenza della formula del prodotto di numeri complessi è la formula di De Moivre:

Teorema 1.9 (**Formula di De Moivre, 1730**). *Sia* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *un qualsiasi numero complesso. La potenza n-esima di z è data da*

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

1.6 Significato geometrico della moltiplicazione per un numero complesso

Il piano complesso è uno spazio metrico, comunque si scelgano due numeri complessi z, z' ha senso parlare di *distanza di z da z'*.

Definizione 1.10 (Distanza). *La* distanza $\mathrm{d}(z, z')$ *tra due punti z, z' in $\mathbb{C}$ è definita come il modulo della loro differenza:*

$$\mathrm{d}(z, z') = |z - z'| \tag{1.5}$$

Definizione 1.11 (Isometria). *Una* isometria *del piano complesso è una trasformazione (funzione biunivoca)*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C} \tag{1.6}$$

che preserva le distanze*:*

$$|F(z) - F(z')| = |z - z'| \tag{1.7}$$

per ogni z, z' in $\mathbb{C}$.

Ad esempio, fissato w in $\mathbb{C}$, le traslazioni $T_w(z) = z + w$ sono isometrie (senza punti fissi, se $w \neq 0$). Anche la coniugazione $z \longmapsto \overline{z}$ è una isometria di $\mathbb{C}$ (il cui insieme di punti fissi è l'asse reale $\mathbb{R}$).

Definizione 1.12 (Rotazione). *Una* rotazione *del piano è un'isometria del piano che ha un unico punto fisso (detto* centro di rotazione*), oppure è l'identità.*

Le rotazioni attorno all'origine si possono rappresentare in modo molto semplice utilizzando i numeri complessi unitari. Vale infatti il seguente

Teorema 1.13. *Se u è un numero complesso unitario, la funzione*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{C}, \quad R(z) = uz \tag{1.8}$$

è una rotazione attorno all'origine e viceversa ogni rotazione attorno all'origine può essere rappresentata nella forma (1.8).

Dimostrazione. Se $u = 1$, l'applicazione $z \longmapsto u \cdot z$ è l'identità (che è una rotazione). Si supponga dunque u unitario e $u \neq 1$. Si deve dimostrare che la moltiplicazione per u (cioè la trasformazione (1.8)) è una isometria con un unico punto fisso (l'origine).

1) Per ogni z in $\mathbb{C}$, ricordando che il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, si ha:

$$|uz - uz'| = |u(z - z')| = |u||z - z'| = 1 \cdot |z - z'| = |z - z'| \tag{1.9}$$

Dunque la trasformazione $z \longmapsto u\, z$ del piano complesso in sé è una isometria (vale a dire, preserva le distanze).

2) Ora si deve dimostrare che l'unico punto fisso è l'origine. Che l'origine sia un punto fisso, è ovvio:

$$u\, 0 = 0$$

Per dimostrare che è l'*unico* punto fisso si può ragionare così: se w è un punto fisso deve essere $u\,w = w$, cioè $(u-1)w = 0$. Dividendo per $u-1$, che per ipotesi è diverso da zero, si ottiene $w = 0$. Pertanto l'unico punto fisso è l'origine. Questo conclude la dimostrazione. ■

Ovviamente la moltiplicazione per un numero complesso di modulo arbitrario (non nullo)

$$w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

cioè la trasformazione che manda z in wz, si può interpretare come la composizione di due trasformazioni: la rotazione che manda z in $(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot z$, seguita dalla dilatazione per il fattore (reale positivo) r. Dunque vale il seguente teorema:

Teorema 1.14. *Se $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ è un qualunque numero complesso diverso da zero, la moltiplicazione per w*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{M_w} \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto w\cdot z = r\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot z \tag{1.10}$$

è una roto-omotetia. Precisamente, è la rotazione di angolo α, seguita dalla dilatazione del fattore (reale) positivo r.

■

Naturalmente, la "dilatazione" di un fattore r ingrandisce i moduli se $r > 1$, mentre li rimpicciolisce se $0 < r < 1$.

1.7 Radici n-esime

Sia n un intero positivo. La radice n-esima del numero complesso $z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è l'insieme di tutti i numeri numeri complessi $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ per i quali risulta

$$w^n = z$$

Dalla formula di De Moivre segue subito il seguente teorema.

Teorema 1.15 (Radici n-esime di un numero complesso)**.** *Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\big[\cos(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n})\big], \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{1.11}$$

Ciascuno di tali numeri $z_0, ..., z_{n-1}$ si chiama una *radice n-esima* di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime.

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1.12}$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{1.13}$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di* 2π:

$$|w|^n = r, \qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

□

Si noti che le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.8 Formula di Eulero (1740)

Un risultato molto sorprendente e forse tra i più belli di tutta la matematica è il seguente

Teorema 1.16 (Formula di Eulero, 1740). *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

Di seguito sono riportate due argomentazioni euristiche di questa uguaglianza.

Prima argomentazione. Si supponga che una particella si muova nel piano secondo la seguente legge oraria

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}, \quad f(t) = e^{it}$$

Qual è la traiettoria descritta dalla particella? Qual è la sua velocità all'istante t? Per capire di quale moto si tratta occorre osservare quanto segue

1. Il vettore che individua la posizione della particella all'istante t è fornito dal numero complesso $f(t) = e^{it}$ mentre la sua velocità è

$$v(t) = f'(t) = ie^{it}$$

In ogni istante t del moto il vettore posizione $f(t) = e^{it}$ è ortogonale al vettore velocità $v(t) = f'(t) = ie^{it}$ ($v(t)$ si ottiene moltiplicando $f(t)$ per l'unità immaginaria i, ciò significa che $v(t)$ si ottiene ruotando $f(t)$ attorno all'origine di un angolo di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario).

2. Al tempo $t = 0$ la particella si trova in $f(0) = 1$ con velocità $v(0) = f'(0) = i$, ciò significa che all'istante iniziale la particella si trova sull'asse x a distanza 1 dall'origine (cioè nel punto di coordinate $(1, 0)$) con velocità in modulo uguale a 1, direzione ortogonale all'asse x e verso rivolto verso l'alto.

3. La particella si muove lungo la circonferenza unitaria, cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$|f(t)| = |e^{it}| = 1 \tag{1.14}$$

Per dimostrare questo fatto basta verificare che $|e^{it}|^2$ si mantiene costante, cioè che la derivata prima di $|e^{it}|^2$ è nulla. Si ha

$$
\begin{aligned}
\left(|e^{it}|^2\right)' &= (e^{it} \cdot e^{it})' && \text{(il punto `$\cdot$' indica il prodotto scalare dei due vettori)} \\
&= (e^{it})' \cdot e^{it} + e^{it} \cdot (e^{it})' && \text{(qui si è applicata la regola di Leibniz ovvero la derivata del prodotto di due funzioni)} \\
&= 2ie^{it} \cdot e^{it} \\
&= 0 && \text{(i vettori $2ie^{it}$ e e^{it} sono ortogonali, pertanto il loro prodotto scalare è uguale a zero).}
\end{aligned}
$$

4. Il modulo $|v(t)|$ della velocità è uguale a 1, infatti $|v(t)| = |ie^{it}| = |i|\,|e^{it}| = 1$

Le osservazioni sopra riportate permettono di concludere che *la particella si muove di moto circolare uniforme*, pertanto si ha

$$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

∎

Seconda argomentazione. Questa argomentazione, pur non essendo esente da critiche, è la "dimostrazione" fornita dallo stesso Eulero attorno al 1740.

Dal teorema relativo al prodotto di due numeri complessi (teorema 1.8) si ricava

$$\cos t + i \sin t = (\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n})^n$$

Per $n \longrightarrow +\infty$ $\cos \frac{t}{n} \sim 1$ e $\sin \frac{t}{n} \sim \frac{t}{n}$, qundi

$$\cos t + i \sin t = (\cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n})^n \sim (1 + i\frac{t}{n})^n \sim e^{it}$$

∎

Per $t = \pi$ la formula di Eulero fornisce la famosa identità

$$e^{i\pi} = -1$$

Un'altra immediata conseguenza della formula di Eulero è che ogni numero complesso si scrive

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

detta *forma esponenziale* di un numero complesso.

La formula del prodotto

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = \cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta') \tag{1.15}$$

si scrive in forma esponenziale in modo elegante e pratico:

$$e^{i\vartheta}e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')} \tag{1.16}$$

La forma esponenziale si presta bene per scrivere le potenze dei numeri complessi, perchè si ha, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$(re^{i\vartheta})^k = r^k e^{ik\vartheta} \tag{1.17}$$

Ad esempio, l'inverso del numero $e^{i\vartheta}$ è dato da:

$$(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta} \tag{1.18}$$

La definizione di esponenziale complesso si estende poi al caso di un qualunque esponente complesso $w = x + iy$ nel modo seguente:

$$e^w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.19}$$

Si dimostra, con un semplice calcolo, che anche per gli esponenti complessi vale la proprietà fondamentale dell'esponenziale (vale a dire, trasformare somme in prodotti):

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{1.20}$$

1.9 Le radici n-esime dell'unità

Usando la formula generale 1.11, si vede subito che le radici n-esime del numero $z = 1$ (il cui modulo è 1 e il cui argomento è $\vartheta = 0$) sono, in forma esponenziale:

$$\epsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{1.21}$$

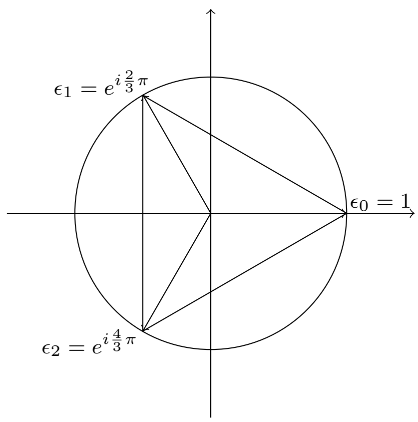
Le n radici n-esime dell'unità sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nelle circonferenza unitaria. Uno di tali vertici è sempre $\epsilon_0 = 1$. Ovviamente, la lunghezza dell'arco tra uno di tali punti e il successivo è $2\pi/n$.

Esempio. Ad esempio, le radici terze di 1 sono:

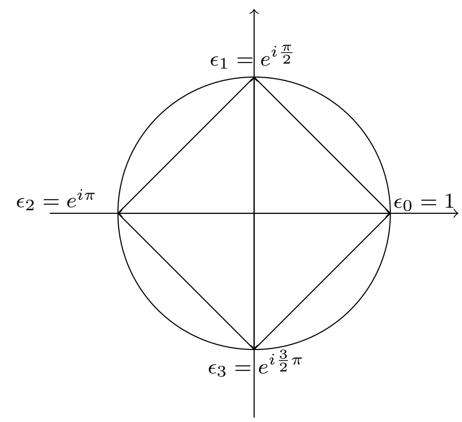
$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad \epsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \tag{1.22}$$

e le radici quarte di 1 sono:

$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad \epsilon_2 = e^{i\pi} = -1, \qquad \epsilon_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \tag{1.23}$$



(a)



(b)

Figura 4: Radici terze e radici quarte dell'unità .

Si noti anche che la radice $\epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ genera il gruppo delle radici n-esime dell'unità, nel senso che le sue successive potenze danno tutte le n- radici di 1. Infatti:

$$(\epsilon_1)^0 = \epsilon_0(= 1), \qquad (\epsilon_1)^1 = \epsilon_1, \qquad (\epsilon_1)^2 = \epsilon_2, \qquad .... \qquad (\epsilon_1)^{n-1} = \epsilon_{n-1} \tag{1.24}$$

Proposizione 1.17. *La somma delle n radici n-esime dell'unità è uguale a zero.*

Dimostrazione.
Se nell'identità

$$1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

si sostituisce al posto di z la radice n-esima dell'unità ϵ_1 $(= e^{i\frac{2\pi}{n}})$ si ottiene

$$1 - \epsilon_1^n = (1 - \epsilon_1)(1 + \epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_1^{n-1})$$

A primo membro si ottiene zero. A secondo membro, il fattore $(1 - \epsilon_1)$ è diverso da zero, mentre il fattore $(1 + \epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_1^{n-1})$ è la somma delle radici n-esime dell'unità . Ne segue che tale somma è zero.

Proposizione 1.18. *Sia $z = re^{i\vartheta}$ un qualunque numero complesso non nullo. Le n radici n-esime di z, sono date da:*

$$z_k = |r|^{1/n} e^{i\frac{\vartheta}{n}} (\epsilon_1)^k, \qquad k = 0, 1, ..., n - 1 \tag{1.25}$$

dove $\epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1.10 Rototraslazioni e simmetrie.

Proposizione 1.19. *Sia $u = e^{i\theta}$ e $v \in \mathbb{C}$. Allora la trasformazione del piano in sé*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}, \quad F(z) = e^{i\theta}z + v \tag{1.26}$$

rappresenta la rototraslazione $R_O^\theta \circ T_v$, dove R_O^θ è la rotazione attorno all'origine di angolo θ e T_v è la traslazione del vettore v. Viceversa, ogni rototraslazione (la cui rotazione ha centro in O) si può scrivere nella forma (1.26), per un'opportuna scelta di θ e v.

Proposizione 1.20. *La composizione di due rototraslazioni è una rototraslazione.*

Dimostrazione.

Se $F(z) = ze^{i\theta} + v$ e $G(z) = ze^{i\varphi} + w$ sono due rototraslazioni abbiamo

$$\big(G \circ F\big)(z) = (ze^{i\theta} + v)e^{i\varphi} + w = ze^{i(\theta+\varphi)} + (ve^{i\varphi} + w)$$

Pertanto $G \circ F$ è una rototraslazione costituita da una rotazione attorno all'origine di angolo $\theta + \varphi$ seguita da una traslazione del vettore $ve^{i\varphi} + w$. ∎

Vediamo ora una proprietà forse poco intuitiva delle rototraslazioni piane

Proposizione 1.21. *Nel piano, ogni rototraslazione $T_v \circ R_O^\theta$, con $\theta \neq 0$ ha esattamente un punto fisso.*

Dimostrazione.

Per trovare i punti fissi della rototraslazione $T_v \circ R_O^\theta(z) = ze^{i\theta} + v$ si deve risolvere l'equazione di primo grado in z

$$ze^{i\theta} + v = z$$

Essendo $\theta \neq 0$ segue $1 - e^{i\theta} \neq 0$. Quindi l'unico punto fisso della rototraslazione in esame è $z = \dfrac{v}{(1 - e^{i\theta})}$. ∎

Dalla proposizione (1.21) si deduce che ogni rototraslazione piana $T_v \circ R_O^\theta$ è una rotazione attorno al punto $\frac{v}{(1-e^{i\theta})}$. Qui di seguito si accenna alla costruzione geometrica che permette di trovare il centro di tale rotazione.

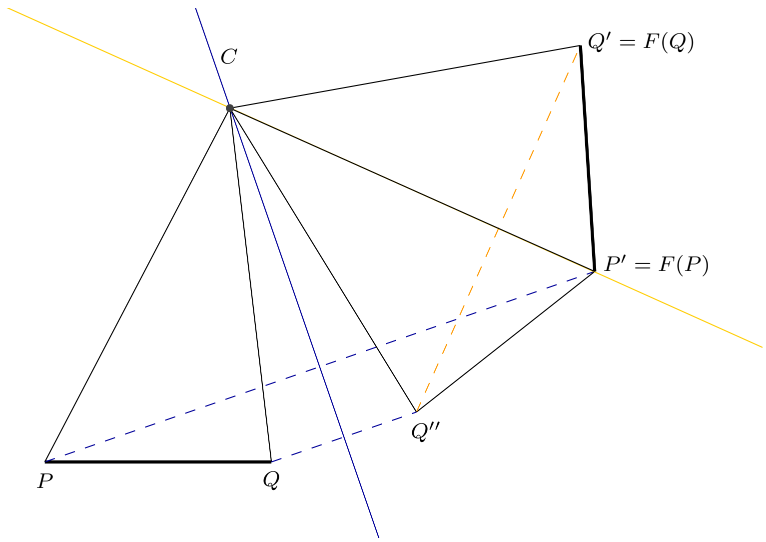


Figura 5:

Una rototraslazione F è completamente individuata da due coppie di punti corrispondenti. Si consideri allora la rototraslazione $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ che manda il segmento PQ nel segmento $P'Q'$, il punto P nel punto P' e Q in Q' (cioè $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$). Si esegua prima la simmetria rispetto all'asse del segmento PP' e si indichi con Q'' il trasformato di Q rispetto a tale simmetria; poi si esegua la simmetria rispetto all'asse del segmento $Q''Q'$. Indicato con C il punto di intersezione dei due assi (che sicuramente esiste se F non è una traslazione) si consideri la rotazione R_C di centro C che trasforma la retta CP nella retta CP': essa trasforma la retta CQ nella retta CQ' (convincersi di quest'ultimo fatto ragionando sulla figura).

Osservazione. Nello spazio la precedente proposizione è falsa. Trovare un esempio di rototraslazione nello spazio che non abbia punti fissi.

Proposizione 1.22. *Sia $u = e^{i\theta}$ è un numero complesso unitario. La funzione*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}, \quad S(z) = e^{i\theta}\,\overline{z} \tag{1.27}$$

è una simmetria assiale avente per asse una retta passante per l'origine.
Viceversa, ogni simmetria rispetto a una retta passante per l'origine può essere rappresentata nella forma (1.27).

Dimostrazione.

Si ricordi che una simmetria assiale $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è un'isometria che ha esattamente una retta di punti fissi. L'esercizio chiede di dimostrare l'equivalenza tra le due seguenti proposizioni:

i) $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è definita da $S(z) = u\overline{z}$, dove u è un numero complesso unitario.

ii) $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ è una simmetria rispetto a una retta s passante per l'origine.

i) $\Rightarrow$ *ii*) $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$, $S(z) = u\overline{z}$ è un'isometria (preserva le distanze) perchè è la composizione di una simmetria rispetto all'asse x seguita da una rotazione (moltiplicazione per un complesso unitario). Posto $u = e^{i\theta}$, i punti fissi di $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ sono i numeri complessi $z = re^{i\varphi}$ per i quali risulta

$$e^{i\theta}\, \overline{re^{i\varphi}} = re^{i\varphi} \tag{1.28}$$

Da (1.28) si ottiene $e^{i\vartheta}\, re^{-i\varphi} = re^{i\varphi}$; $e^{i(\vartheta-\varphi)} = e^{i\varphi}$. Di qui si ricava $\varphi = \frac{\vartheta}{2}$ oppure $\varphi = \frac{\vartheta}{2} + \pi$. Quindi i punti fissi di S sono tutti e soli i punti della retta s che passa per l'origine e per il punto $e^{i\frac{\vartheta}{2}}$. Si è così dimostrato che $\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}$, $S(z) = u\overline{z}$ è una simmetria rispetto alla retta s che forma con il semiasse positivo delle x un angolo pari $\frac{\vartheta}{2}$ (percorso in senso antiorario).

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{S_1} \mathbb{C}$ la simmetria rispetto alla retta s (contenente l'origine) che forma, con il semiasse positivo delle x, l'angolo α. Per quanto dimostrato sopra la funzione $\mathbb{C} \xrightarrow{S_2} \mathbb{C}$, $S_2(z) = e^{i2\alpha}\overline{z}$ è anch'essa una simmetria rispetto alla retta s. Segue che S_1 e S_2 coincidono perchè hanno la medesima retta di punti fissi[1]. ∎

1.11 Il teorema fondamentale dell'algebra (C.F. Gauss, 1799)

Il teorema fondamentale dell'algebra, del quale C.F. Gauss dette quattro diverse dimostrazioni tra il 1799 e il 1849, afferma che ogni equazione polinomiale a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.

Teorema 1.23 (Teorema fondamentale dell'algebra. C.F. Gauss, 1799.)**.** *Ogni polinomio complesso di grado maggiore o uguale a 1 ha almeno una radice nel campo* $\mathbb{C}$.

Se $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ è un polinomio a coefficienti complessi e c una sua radice complessa (che esiste sicuramente per il teorema fondamentale dell'algebra) si può dividere $f(z)$ per $(z - c)$ e scrivere

$$f(z) = (z - c)g(z)$$

Iterando il procedimento, si dimostra il seguente teorema.

Teorema 1.24 (Fattorizzazione di un polinomio complesso)**.** *Ogni polinomio complesso f di grado maggiore o uguale a 1 si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) come*

$$f(z) = a(z - c_1)(z - c_2) \cdot \cdots \cdot (z - c_n) \tag{1.29}$$

dove $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, e $c_1, ..., c_n$ sono le radici complesse (non necessariamente distinte) di f. Se una radice c_j è ripetuta k volte, diciamo che è una radice di molteplicità k.

Si può dunque enunciare quest'ultimo teorema nella forma:

Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici complesse, se ognuna delle radici contata con la sua molteplicità .

[1] Per convincersi che $S_1 = S_2$ basta osservare che, se $w \in \mathbb{C}$ è ortogonale alla retta s allora le due simmetrie in questione devono necessariamente trasformare w in $-w$ (le simmetrie conservano gli angoli)

Testi utilizzati per queste note

[1] G. Prodi, *Matematica come scoperta*, Ed. D'Anna, 1977.

[2] G. Prodi, *Istituzioni di matematica*, McGraw-Hill, 1994.