Funzioni e combinatoria

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Maggio 2016.[1]

Indice

[1] Nome file: combinatoria_2015.tex

1 Combinatoria

L'obiettivo di questa sezione è quello di imparare a *contare insiemi i cui oggetti sono funzioni.*

Siano A e B due insiemi finiti, l'insieme A di cardinalità k, l'insieme B di cardinalità n ($|A| = k$, $|B| = n$ e $k, n \in \mathbb{N}$). Per indicare l'insieme di tutte le funzioni da A a B si utilizza la seguente notazione esponenziale

$$B^A = \{ \text{ tutte le funzioni } A \xrightarrow{f} B \}.$$

dove l'esponente A indica il dominio della funzione mentre la base B è il codominio.

1.1 Contare funzioni da un insieme ad un altro

Si consideri il seguente

Problema 1.1. *Siano A e B due insiemi con un numero finito di elementi. Escogitare un metodo per contare tutte le funzioni $A \xrightarrow{f} B$.*

Soluzione.

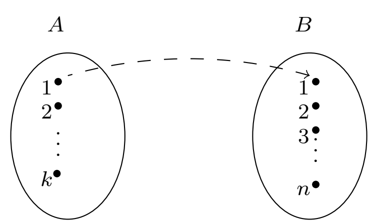

Figura 1: Ogni elemento di A si può associare a un elemento di B in n modi diversi.

Per costruire una funzione da A a B bisogna associare ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. L'elemento 1 di A puó essere associato ad un elemento di B in n modi diversi, così pure l'elemento 2 di A puó essere associato ad un elemento di B in n modi diversi; segue che gli elementi $1, 2$ di A si possono associare a elementi di B in $n \cdot n = n^2$ modi diversi. L'elemento 3 di A puó essere associato ad un elemento di B in n modi diversi e di conseguenza gli elementi $1, 2, 3$ di A si possono associare a elementi di B in $n^2 \cdot n = n^3$ modi diversi. Iterando questo modo di ragionare fino all'elemento k di A si ricava che ci sono n^k modi diversi di associare gli elementi $1, 2, 3, \ldots, k$ di A agli elementi di B. Quindi, per costruire una funzione $A \xrightarrow{f} B$, è necessario effettuare n^k scelte e n^k sono le funzioni da A a B. ∎

In conclusione

Proposizione 1.2.

Il numero di funzioni $[k] \longrightarrow [n]$ è n^k.

In altri termini: $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$. Si noti che che se $|A| = 0$ allora esiste esattamente una funzione $A \xrightarrow{f} B$ (quale?), mentre se $|B| = 0$ non esiste alcuna funzione $A \xrightarrow{f} B$ (perché?). Nella terminologia classica dell'analisi combimatoria, le funzioni da un insieme con k oggetti a un insieme con n oggetti sono chiamate *disposizioni con ripetizione di n oggetti presi k alla volta.* Le notazioni più comuni per questo numero sono $D^*_{n,k}$ e $D'_{n,k}$

Esempio. Contare tutte i possibili pronostici che si possono realizzare giocando al totocalcio.

Per giocare un pronostico al totocalcio bisogna esprimere una previsione sui risultati di 14 partite. Più precisamente, per ognuna delle quattordici partite che costituiscono la "schedina", si deve associare il simbolo "1" per indicare la vittoria della squadra che gioca in casa, il simbolo "X"per indicare il pareggio, il simbolo "2" per indicare la vittoria della squadra che gioca in trasferta.

Secondo il punto di vista presentato in questi appunti effettuare un pronostico al totocalcio significa *determinare una funzione avente per dominio l'insieme A delle quattordici partite e per codominio l'insieme B costituito dai simboli "$1, X, 2$".* Segue che tutti i possibili pronostici sono 3^{14}.

1.2 Contare funzioni iniettive

Come nel caso precedente, siano A e B due insiemi finiti rispettivamente di cardinalità k e n ($|A| = k$, $|B| = n$ e $k, n \in \mathbb{N}$).

Problema 1.3. *Siano A e B due insiemi con un numero finito di elementi. Escogitare un metodo per contare tutte le funzioni* iniettive *$A \xrightarrow{f} B$.*

Soluzione.

La prima parte di questa argomentazione è identica a quella del problema (1.3) e pertanto si fa riferimento alla stessa figura.

Per costruire una funzione iniettiva da A a B bisogna tener presente che a elementi distinti di A occorre associare elementi distinti di B. Dunque, l'elemento 1 di A puó essere associato ad un elemento di B in n modi diversi mentre per l'elemento 2 di A si hanno a disposizione $n-1$ scelte. Segue che gli elementi $1, 2$ di A si possono associare a elementi di B in $n \cdot (n-1)$ modi diversi. Iterando questo modo di ragionare fino all'elemento $k \in A$ si ottiene che gli elementi $1, 2, \ldots, k$ di A si possono associare a elementi di B in $n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$ modi diversi. Pertanto tutte le funzioni iniettive $A \longrightarrow B$ sono $n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$ ∎

Riassumendo

Proposizione 1.4.

$$\textit{Il numero di funzioni } \text{iniettive } [k] \xrightarrow{f} [n] \text{ è}$$

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$$

Il numero $n^{\underline{k}}$ si chiama *fattoriale decrescente di n con lunghezza k.* Nella terminologia classica dell'analisi combinatoria, le funzioni iniettive da un insieme con k oggetti a un insieme con n oggetti sono chiamate *disposizioni senza ripetizione di n oggetti presi k alla volta.* Le notazioni più comuni per questo numero sono $D_{n,k}$ oppure D_k^n.

1.3 Contare funzioni biettive

Il numero n!

Sia $A \longrightarrow B$ una funzione, $|A| = k$, $|B| = n$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Ovviamente se $k \neq n$ non esistono funzioni biettive (biunivoche) da A a B mentre se $k = n$, cioè se dominio e codominio sono finiti e hanno lo stesso numero di elementi, allora vale la seguente proprietà:

$$A \longrightarrow B \text{ è } \textit{iniettiva} \text{ se e solo se } A \xrightarrow{f} B \text{ è } \textit{suriettiva}$$

In altre parole, se $|A| = |B| = n$, *le funzioni iniettive coincidono esattamente con le funzioni biettive.* In questo caso contare le funzioni biettive da A a B equivale a contare le funzioni iniettive da A a B.

Proposizione 1.5. *Il numero di funzioni* biunivoche $[n] \longrightarrow [n]$ *è*

$$n^{\underline{n}} = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Il numero $n^{\underline{n}}$ (il fattoriale decrescente di n con lunghezza n) si indica di solito con il simbolo $n!$ (si legge: *fattoriale di n*, oppure *n fattoriale*). In queste note, d'ora in poi, si scriverà $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Nella terminologia dell'analisi combinatoria le funzioni biettive (biunivoche) da un insieme di n oggetti a un insieme di n oggetti si chiamano "permutazioni di n oggetti "e si denotano con il simbolo P_n.

Esempio. Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono fare con la parola "DOMENICA"?

Gli anagrammi della parola "DOMENICA"coincidono con le funzioni biettive $[8] \longrightarrow [8]$. Pertanto sono $8! = 40.320$.

1.4 Contare i sottoinsiemi di un insieme. Il coefficiente binomiale.

Definizione 1.6. *Siano n e k due interi $0 \leq k \leq n$. Chiamiamo* coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ *il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi. In altre parole:*

$$\binom{n}{k} = \#\{k\textit{-sottoinsiemi di un } n\textit{-insieme}\}.$$

Esempio. L'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ possiede $\binom{4}{1} = 4$ sottoinsiemi con esattamente un elemento e $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi con esattamente due elementi e così via.

Esempio. $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1.$

Infatti, nel primo caso, l'unico sottoinsieme di zero elementi è l'insieme vuoto, mentre, nel secondo caso, l'unico sottoinsieme di n elementi è l'insieme stesso.

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si noti che la formula dà il risultato corretto nei casi estremi $k = 0$ e $k = n$, tenuto conto del fatto che $0! = 1$.

Dimostrazione. Bisogna scegliere k elementi tra gli n che stanno in X. Ci sono n scelte possibili per il 'primo' elemento, $(n-1)$ scelte per il 'secondo', . . . , e $(n-k+1)$ per il 'k-esimo'; complessivamente, le scelte possibili sono $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Il motivo per cui si è scritto 'primo', 'secondo'ecc. tra virgolette consiste nel fatto che in un insieme non c'è un elemento privilegiato al primo posto, uno al secondo ecc. Detto altrimenti, se gli stessi elementi fossero scelti in ordine diverso, darebbero luogo allo stesso sottoinsieme. Si deve allora dividere il numero trovato per il numero di tutti i possibili ordini in cui i k elementi possono essere scelti; questi possibili ordini sono $k(k-1)\cdots 1(= k!)$, perché, ragionando esattamente come sopra, ci sono k possibilità per scegliere il primo elemento, $(k-1)$ per il secondo, e così via. ∎

1.5 Alcune identità riguardanti i coefficienti binomiali

Nota la formula per $\binom{n}{k}$, si possono dimostrare fatti o identità che riguardano i coefficienti binomiali in due modi: argomentando in modo combinatoriale, oppure facendo i conti. Ecco alcuni esempi.

Esercizio 1.7. *Dimostrare che*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Prima dimostrazione. C'è un' ovvia corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi con k elementi e sottoinsiemi con $n-k$ elementi: quella che a ogni sottoinsieme associa il complementare. ∎

Seconda dimostrazione. Il secondo membro dell'espressione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

non cambia valore scambiando k con $n-k$. ∎

Esercizio 1.8. *Dimostrare che*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Prima dimostrazione. Si consideri il seguente problema: da un gruppo di n giocatori si deve formare una squadra formata da k di loro, di cui uno deve essere designato capitano. In quanti modi diversi si può formare la squadra?

Un modo di procedere è questo: prima si scelgono i k giocatori (ci sono $\binom{n}{k}$ modi diversi di farlo) e poi, individuati i k giocatori, si sceglie il capitano (cosa che si può fare in k modi). Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$, che è il primo membro dell'identità.

Esiste un altro modo per formare la squadra: prima si sceglie il capitano (scelta che si può fare in n modi diversi), poi si sceglie il resto della squadra, vale a dire si selezionano gli altri $k-1$ giocatori tra gli $n-1$ rimasti a disposizione (questa seconda scelta si può fare in $\binom{n-1}{k-1}$). In questo caso si forma la squadra effettuando complessivamente $n\binom{n-1}{k-1}$, che è il secondo membro dell'identità. Dunque l'uguaglianza è provata, perché il primo e il secondo membro contano, con tecniche diverse, lo stesso insieme di scelte. ∎

Seconda dimostrazione. Fare i conti.

Esercizio 1.9. *Dimostrare che*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Prima dimostrazione. Si deve formare una squadra di k giocatori scegliendo tra $n+1$ a disposizione. Quanti sono i modi possibili di formare la squadra?

Ovviamente la squadra si può formare in $\binom{n+1}{k}$ modi diversi, tanti quanti sono i sottoisiemi di k elementi che si possono formare da un insieme $n+1$ elementi. Questo è il primo membro dell'identità.

Un altro modo per formare la squadra è questo: si fissi uno in particolare di questi $n+1$ atleti. Si può decidere di farlo giocare, oppure no. Se lo si fa giocare, si devono scegliere gli altri $k-1$ giocatori tra i restanti n; le scelte sono $\binom{n}{k-1}$. Se invece lo si esclude, bisogna scegliere tutti e k i giocatori tra gli n restanti; le scelte sono $\binom{n}{k}$. L'uguaglianza è provata. ■

Seconda dimostrazione. Fare i conti.

1.6 Il triangolo di Pascal

Si consideri il triangolo

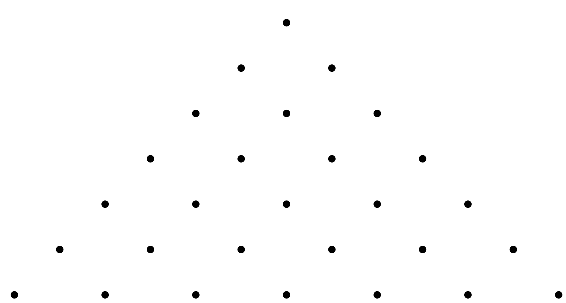

Figura 2

In primo luogo qui si vuole definire cosa si intende per *cammino a zigzag* dal vertice in alto a un punto qualsiasi del triangolo. Per esempio (si veda la figura 3), un *cammino a zigzag dal vertice in alto "$\circ$" al punto "$\diamond$"* è una successione di segmenti consecutivi con queste proprietà

– il primo e l'ultimo vertice della successione di segmenti devono essere rispettivamente "$\circ$" e "$\diamond$";

– ogni segmento deve collegare un punto del triangolo con uno a scelta dei due punti che si trovano immediatamente al di sotto di esso.

In figura sono rappresentati due dei possibili cammini a zigzag che collegano i punti prescelti.

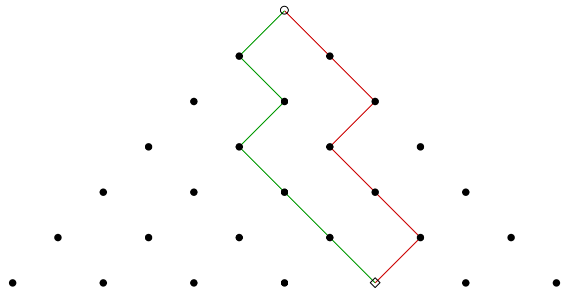

Figura 3: La spezzata rossa e quella verde sono due diversi "cammini a zigzag" che collegano il vertice in alto "$\circ$" con il punto del triangolo denotato con "$\diamond$".

Ora, sostituendo ogni punto del triangolo della figura 6 con il numero di cammini a zigzag che lo collegano al vertice in alto del triangolo, si ottiene il ben noto "triangolo di Pascal":

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Figura 4: Il "triangolo di Pascal" è più noto in Italia con il nome di "triangolo di Tartaglia". Niccolò Tartaglia è il matematico italiano che per primo lo studiò e ne favorì la diffusione nella nostra penisola.

Un fatto notevole è questo: *il triangolo di Pascal può essere riscritto servendosi dei coefficienti binomiali nel modo seguente:*

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \binom{n}{k} & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Figura 5

Questo fatto si può spiegare osservando che sia i numeri del triangolo di Pascal che i coefficienti binomiali sono riconducibili a un *problema di scelta*. Infatti, con riferimento alla figura 3, per andare da "$\circ$" a "$\diamond$" mediante un cammino a zigzag occorre fare necessariamente 6 passi, diciamo $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, di cui quattro verso destra. Occorre cioè *scegliere*, tra i 6 passi da effettuare, i 4 che bisogna fare verso destra. Pertanto tutti i cammini che collegano il vertice "$\circ$", con il punto "$\diamond$" sono $\binom{6}{4}$.

In generale, si dimostra (figura 5) che il numero di cammini a zigzag dal vertice più in alto $\binom{0}{0}$ a un qualunque altro vertice $\binom{n}{k}$ è esattamente $\binom{n}{k}$.

L'idea della dimostrazione è la stessa: per andare da $\binom{0}{0}$ a $\binom{n}{k}$ con un cammino a zigzag occorrono n passi, dei quali k in basso a destra e $n-k$ in basso a sinistra. In questo modo a ogni cammino si può associare, in modo biunivoco, un k-sottoinsieme di $\{1, ..., n\}$. L'interpretazione dei coefficienti binomiali in termini di cammini su reticoli è generalmente attribuita a G. Pólya.

1.7 Il binomio di Newton.

La formula della potenza del binomio venne dimostrata da Isaac Newton all'incirca nel 1666.

Teorema 1.10 (Potenza del binomio.)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione. Per ottenere lo sviluppo di

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\,(a+b)\cdots(a+b)}_{n\,volte}$$

si deve:

- scegliere in ciascuno dei fattori il termine a oppure il termine b, in tutti i modi possibili;
- moltiplicare i termini scelti;
- sommare tutti i risultati.

Se si sceglie k volte il termine b (e quindi $n-k$ volte il termine a) e moltiplichiamo i termini scelti, otteniamo $a^{n-k}b^k$. Una scelta di tale tipo si può effettuare in $\binom{n}{k}$ modi diversi. Quindi, nello sviluppo del binomio, il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è $\binom{n}{k}$. ∎

1.8 Contare gli oggetti dell'insieme delle parti

Definizione 1.11 (Insieme delle parti). *Dato un qualunque insieme X chiamiamo insieme delle parti di X (e lo denotiamo con il simbolo $\mathcal{P}(X)$) quel particolare insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di X.*

Esempio. Sia $X = \{1,2,3\}$ allora

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Si noti che $\mathcal{P}(X)$ include anche i sottoinsiemi impropri di X, cioè l'insieme vuoto e l'insieme X stesso.

Definizione 1.12 (**Funzione caratteristica di un insieme**). *Sia X un qualunque insieme finito e $A \subseteq X$. Chiamiamo* funzione caratteristica di A *(e la indicheremo con il simbolo φ_A) la funzione*

$$\varphi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

così definita

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \notin A \\ 1 & se \quad x \in A \end{cases}$$

Si consideri ora il seguente

Problema 1.13. *Dato un qualunque insieme finito X, quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(X)$?*

La risposta a questa domanda, pur non essendo immediata, è di fondamentale importanza sia per il risultato in sè, sia per le diverse argomentazioni che si possono esibire.

Soluzione.

Prima dimostrazione. Sia $\Omega = \{0,1\}$ l'insieme dei "valori di verità": 0 è da intendersi come "Falso"e 1 come "Vero". Si tratta di dimostrare che

$$\textit{i sottoinsiemi } A \subseteq X \textit{ sono tanti quante le funzioni } X \xrightarrow{\varphi} \Omega.$$

Al sottoinsieme $A \subseteq X$ si associ la *funzione caratteristica* $X \xrightarrow{\varphi_A} \Omega$ e, viceversa, alla funzione $X \xrightarrow{\varphi} \Omega$ si associ il sottoinsieme

$$A_\varphi = \varphi^{-1}(1) = \{x \in X \quad \varphi(x) = 1\}$$

In questo modo si viene a definire una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(X)$ e Ω^X, e quindi

$$|\mathcal{P}(X)| = |\Omega^X| = |\Omega|^{|X|} = 2^n.$$

∎

Seconda dimostrazione. Un altro modo di ottenere il numero F_n dei sottoinsiemi di un n-insieme si ottiene notando che possiamo trovare tutti i sottoinsiemi di $\{1, ..., n+1\}$ prendendo tutti i sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ ed estendendo ciascuno di essi nei due modi possibili: non aggiungere nulla, oppure aggiungere l'elemento $n+1$. Così

$$F_{n+1} = 2F_n \tag{1.1}$$

Questa è una *relazione ricorsiva* che, unita alla condizione iniziale $F_0 = 1$, permette di trovare F_n per ogni n. Per l'equazione 1.1 si trova subito la soluzione in forma chiusa:

$$F_n = 2^n F_0 = 2^n.$$

∎

Terza dimostrazione. Il numero di tutti i sottoinsiemi di un n-insieme si ottiene sommando il numeri dei sottoinsiemi con k elementi, per $k = 0, ..., n$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,$$

per la formula 1.10 del binomio di Newton. ∎

1.9 In quanti modi è possibile disporre k oggetti indistinguibili in n scatole?

Problema 1.14. *In quanti modi è possibile disporre k oggetti indistinguibili in n scatole?*

Soluzione. Si mettano in fila le n scatole, aggiungendo $n-1$ asterischi per indicare la separazione tra una scatola e la successiva:

$$[1^a \text{ scatola}] \ * [2^a \text{ scatola}] * \cdots * \ [n^{ma} \text{ scatola}]$$

Ora al posto di ogni scatola si mettano tanti pallini quanti sono gli oggetti che si vuole inserire in quella scatola. Ad esempio, il disegno

$$\bigcirc \bigcirc * * \bigcirc * \bigcirc\bigcirc$$

significa che ci sono 4 scatole e 5 oggetti, così disposti: 2 nella prima scatola, 0 nella seconda, 1 nella terza e 2 nella quarta. I modi di disporre i k oggetti nelle n scatole sono dunque tanti quanti i possibili modi di allineare $k+n-1$ oggetti, precisamente k palline e $n-1$ asterischi. Ciascuno di questi allineamenti si ottiene scegliendo la posizione dei k pallini (o, il che è lo stesso, degli $n-1$ asterischi). Pertanto il numero richiesto è

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Problema 1.15. *Trovare il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione*

$$x_1 + \cdots + x_n = k.$$

Soluzione. È esattamente l'ultimo problema risolto, formulato in modo diverso. Quindi la risposta è $\binom{n+k-1}{k}$.

2 Esercizi

Coefficienti binomiali e cammini su reticoli permettono di affrontare problemi di varia natura. Eccone alcuni a titolo di esempio.

Esercizio 2.1. *In un torneo a* 18 *squadre, ogni squadra deve giocare esattamente una volta con ogni altra. Quante sono le partite?*

Esercizio 2.2. *Quante sono le diagonali di un esagono? Quante quelle di un dodecagono? Più in generale, quante sono le diagonali di un poligono di n lati?*

Esercizio 2.3. *Un'urna contiene* 10 *palline numerate da* 1 *a* 10*. Calcolare il numero di cinquine possibili.*

Esercizio 2.4. *Tre treni arrivano contemporaneamente ad una stazione con* 5 *binari. In quanti modi diversi il capostazione può decidere di occupare tre binari su cinque?*

Esercizio 2.5 (Pólya)**.** *In quanti modi si può leggere $ABRACADABRA$ partendo dal vertice in alto e procedendo a zigzag fino al vertice in basso?*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & A & & & & & \\
 & & & & B & & B & & & & \\
 & & & R & & R & & R & & & \\
 & & A & & A & & A & & A & & \\
 & C & & C & & C & & C & & C & \\
A & & A & & A & & A & & A & & A \\
 & D & & D & & D & & D & & D & \\
 & & A & & A & & A & & A & & \\
 & & & B & & B & & B & & & \\
 & & & & R & & R & & & & \\
 & & & & & A & & & & &
\end{array}
$$

Esercizio 2.6. *Da ogni nodo del reticolo possiamo fare soltanto un passo verso est oppure un passo verso nord. Dire quanti sono i cammini dal punto* $(0,0)$ *al punto* $(5,3)$ *(la figura qui sotto ne riporta uno).*

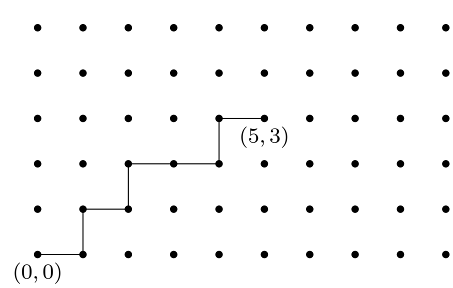

Figura 6

Esercizio 2.7. *Dire quante sono le soluzioni dell'equazione*

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$$

dove ogni α_i *può valere solo* 0 *oppure* 1*.*

2.1 Risposte

Esercizio 2.1 $\displaystyle\binom{18}{2}$.

Esercizio 2.2 9; 54; $\displaystyle\binom{n}{2} - n$.

Esercizio 2.3 $\displaystyle\binom{10}{5}$.

Esercizio 2.4 $5^{\underline{3}}$.

Esercizio 2.5 Esistono $\binom{10}{5} = 252$ modi diversi di leggere la parola “ABRACADABRA.

Esercizio 2.6 Se si ruota in modo opportuno il triangolo di Pascal si scopre che il numero di cammini di lunghezza minima da $(0,0)$ a $(5,3)$ sono $\binom{8}{3} = 56$.

Più in generale, *i cammini di lunghezza minima sul reticolo dei punti del piano a coordinate intere* ≥ 0 *dall'origine al punto di coordinate* (n,k) *sono in numero di* $\binom{n+k}{k}$.

Esercizio 2.7 $\binom{n}{k}$.

I testi utilizzati per scrivere queste note sono stati:

[1] F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, *Teoria delle categorie: un'introduzione alla matematica*, Franco Muzzio Editore, 1994.

[2] G. Prodi, *Matematica come scoperta*, G. D'Anna, 1987.