Note di Aritmetica

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Settembre 2011.[1]

Indice

1 Numeri naturali.

I numeri naturali sono $0, 1, 2, 3$, eccetera e si indicano con la lettera $\mathbb{N}$. Si scrive:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

In $\mathbb{N}$ sono definite due operazioni: la somma e il prodotto, non è invece possibile definire la differenza e la divisione perchè la differenza (il quoziente) di due numeri naturali non è sempre un numero naturale.

I numeri *pari* sono i numeri naturali multipli di due. Se x è un numero pari si scrive:

$$x = 2n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

I numeri *dispari* sono i numeri naturali che non sono multipli di due. Se x è un numero dispari si scrive:

[1] Nome File: aritmetica-2011.tex

$$x = 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 1.1. *Dimostrare le seguenti proprietà riguardanti i numeri pari e dispari*

1. *La somma di due numeri dispari è un numero pari.*
2. *La somma di un numero pari con un numero dispari è un numero dispari.*
3. *La somma di due numeri pari è un numero pari.*
4. *Il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari.*
5. *Il prodotto di due numeri di cui uno è pari, è pari.*

Dimostrazione dell'enunciato 2.
IPOTESI: x è un numero pari; y è un numero dispari
TESI: $x + y$ è un numero dispari

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi x è un numero pari e y è un numero dispari , quindi

$$x = 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$
$$y = 2m + 1, \text{ con } m \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha:

$$x + y = 2n + (2m + 1) = (2n + 2m) + 1 = 2(n + m) + 1$$

Ovvero

$$x + y = 2(n + m) + 1$$

$n + m \in \mathbb{N}$ perchè la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale ($\mathbb{N}$ è *chiuso* rispetto all'operazione 'somma'). Pertanto, dall'ultima uguaglianza, si deduce che $x + y$ è dispari. ∎

Esercizio 1.2. *Si consideri la differenza fra i quadrati di due numeri naturali consecutivi:*

$$\begin{array}{rcl} 1^2 - 0^2 & = & 1 \\ 2^2 - 1^2 & = & 3 \\ 3^2 - 2^2 & = & 5 \\ 4^2 - 3^2 & = & 7 \\ \ldots\ldots & = & \ldots \end{array}$$

In questo modo si ottiene la successione dei numeri dispari. Come si può fare per dimostrare questo fatto?

Esercizio 1.3. *Provare che la differenza fra i cubi di due numeri naturali consecutivi è un numero dispari.*

Esercizio 1.4 (**Gauss, $\sim$ 1787**). *Dimostrare che la somma dei primi n numeri interi positivi è data da:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 1.5. *Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.*

L'insieme dei numeri naturali è *infinito*, proprietà che nasconde qualche insidia. A titolo di esempio si veda il seguente

Problema. L'albergo più grande dell'universo [2]

Tra tutti gli alberghi, il più interessante dal punto di vista dei numeri è ... un albergo immaginario, un albergo che non esiste, ma che, se esistesse, sarebbe il più grande dell'universo! Il nostro albergo immaginario dispone di un numero infinito di stanze: ci sarebbe da meravigliarsi se un potenziale cliente venisse mandato via per mancanza di camere libere. Forse anche per questo il proprietario non registra molto accuratamente gli ospiti, e quindi non sa mai con precisione quali sono le stanze libere e quelle occupate. L'altro ieri, ad esempio, si è presentato un ospite inatteso; il proprietario, pur non conoscendo qual era in quel momento la situazione delle stanze, non si è perso d'animo: ha chiesto ad ogni cliente di traslocare nella stanza con il numero immediatamente maggiore (i clienti di un albergo infinito devono essere disposti ad una certa mobilità!), cosicchè la camera n. 1 fosse certamente libera. Ieri, si sono presentati all'improvviso 200 partecipanti a un convegno; di nuovo il proprietario ha fronteggiato egregiamente la situazione. Ha pregato, infatti, ogni cliente di traslocare; questa volta, per, ciascuno doveva spostarsi nella stanza il cui numero fosse il numero della camera precedente occupata maggiorato di 200. In questo modo il nostro proprietario è riuscito a liberare le prime 200 stanze per i nuovi ospiti. Ma oggi il proprietario si trova davvero in difficoltà: già l'albergo ospitava infiniti clienti, quand'ecco che si presenta una comitiva di infiniti turisti giapponesi ..... Come farà a cavarsela in questa occasione l'albergatore?

2 Numeri interi

I numeri interi sono $0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ e si indicano con la lettera $\mathbb{Z}$. Si scrive:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \dots\}$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ contiene l'insieme $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$) e, di conseguenza, anche $\mathbb{Z}$ è un insieme infinito.

2.1 L'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi sono definite due operazioni fondamentali: quella di somma e quella di prodotto. Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ la loro somma si denota '$a + b$' e il loro prodotto si denota '$a \cdot b$'.

Per l'operazione ' +' di somma valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa* Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$
$$a + b = b + a$$
2. *Proprietà associativa* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

[2] Questo problema è tratto da libro di Giuliano Spirito, "Grammatica dei numeri", Editori Riuniti.

3. *Esistenza dell'elemento neutro della somma.* Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ vale

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Il numero 0 si chiama 'elemento neutro' della somma.

4. *Esistenza dell'elemento opposto.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{Z}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{Z}$, detto *opposto* di a, per il quale si ha

$$a + b = b + a = 0$$

L'opposto di a è il numero $b = -a$.

Per l'operazione ' $\cdot$ ' di prodotto valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa* Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. *Proprietà associativa* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. *Esistenza dell'elemento neutro del prodotto.* Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ vale

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Il numero 1 si dice *elemento neutro del prodotto.*

Infine, valgono le leggi distributive: per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \text{e} \qquad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Riassumendo: in $\mathbb{Z}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto; per tali operazioni valgono le proprietà sopra enunciate. Tutto ciò si sintetizza dicendo che $\mathbb{Z}$ è un *anello commutativo.*

2.2 La divisione in $\mathbb{Z}$: quoziente e resto

Teorema 2.1. Algoritmo della divisione *Dati due interi a,b, con $b > 0$, esistono e sono unici due interi q,r per i quali:*

- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

Se a e b sono interi, diciamo che b *divide* a, e scriviamo $b \backslash a$, se esiste un intero h per il quale

$$a = hb.$$

Quindi, b *divide* a se il resto della divisione di a per b è zero. Diremo allora che b è un *divisore* di a e che a è un *multiplo* di b.

Esercizio 2.2. *Determinare quoziente e resto delle seguenti coppie di numeri:*

$a]$	$a = 28$	$b = 7;$	$e]$	$a = 15$	$b = 6;$	$i]$	$a = -15$	$b = 6;$
$b]$	$a = 31$	$b = 9;$	$f]$	$a = 23$	$b = 15;$	$l]$	$a = -20$	$b = 4;$
$c]$	$a = 75$	$b = 2;$	$g]$	$a = 88$	$b = 11;$	$m]$	$a = -9$	$b = 4;$
$d]$	$a = 30$	$b = 6;$	$h]$	$a = -27$	$b = 8;$	$n]$	$a = -23$	$b = 15;$

Esercizio 2.3. *Provare che il prodotto di due numeri pari consecutivi è divisibile per* 8.

3 Numeri primi. Teorema fondamentale dell'aritmetica

Abbiamo appena visto che se a e b sono due interi con $b > 0$ esistono sempre, e sono unici, il quoziente q e il resto r della divisione di a per b.

Se il resto di tale divisione è zero (cioè r=0) abbiamo ovviamente $a = bq$ e in questo caso diciamo che b è un divisore di a.

Per esempio, il numero 15 ammette esattamente 4 divisori (1,3,5,15), il numero 360 ammette esattamente 24 divisori. Naturalmente ogni numero intero ammette sempre due divisori positivi, 1 e il numero n stesso. I numeri interi che ammettono esattamente due divisori positivi rivestono un ruolo particolarmente importante in diversi ambiti della matematica.

Diamo allora la seguente importante

Definizione 3.1. *Un intero $p > 1$ si dice* primo *se i suoi unici divisori positivi sono 1 e p; diciamo che un intero $m > 1$ è* composto *se non è primo.*

Un primo fatto che evidenzia l'importanza dei numeri primi è questo: ogni intero $n > 1$ si può sempre esprimere come prodotto di numeri primi.

Per esempio, consideriamo il numero 2860. È facile convincersi che $2860 = 2 \cdot 5 \cdot 286 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 143$. I numeri 2 e 5 sono primi; se 143 fosse primo la scomposizione in fattori primi sarebbe ultimata, ma $143 = 11 \cdot 13$ e i numeri 11 e 13 sono primi. Allora abbiamo $2860 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.

In generale, ogni intero n maggiore di 1, o è primo, e in tal caso la sua fattorizzazione coincide con il numero stesso, oppure è composto, e allora ammette almeno un divisore d (diverso da 1 e n) per il quale $n = qd$. Ora, se q e d sono primi abbiamo trovato la fattorizzazione di n, altrimenti, applicando il ragionamento appena esposto ai numeri q e d, otteniamo la fattorizzazione cercata e cioè

$$n = p_1 \cdots p_h \tag{3.1}$$

dove gli interi p_i sono primi non necessariamente distinti.

Si potrebbe inoltre dimostrare (ma noi non lo facciamo) che $\forall n \in \mathbb{Z}$ con $n > 1$ la scrittura 3.1 è *unica* a meno dell'ordine dei fattori.

Questo significa che qualunque intero $n > 1$ è completamente caratterizzato dai numeri primi che lo compongono. Per esempio 2580 è caratterizzato da una propria sequenza di numeri primi che è diversa da quella di tutti gli altri, e precisamente $2580 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 43$.

Le considerazioni sopra esposte costituiscono il

Teorema 3.2. (Teorema fondamentale dell'aritmetica) *Ogni intero $n > 1$ può essere scritto come prodotto*

$$n = p_1 \cdots p_h$$

dove gli interi $p_1 \cdots p_h$ sono primi e $h \geq 1$. Questa espressione è unica, a meno dell'ordine dei fattori primi.

Esercizio 3.3. *Scrivere il più piccolo numero n che abbia come divisori distinti da 1 e da n stesso, i numeri 3, 5, 7.*

Esercizio 3.4. *Sia n un intero maggiore di uno e sia $n = p_1^{s1} \cdot p_2^{s2} \cdots p_h^{sh}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Stabilire quanti sono i divisori di n.*

3.1 Attività per il laboratorio di matematica

Esercizio 3.5. *Pensare un algoritmo che consenta di decidere se un numero n è primo o composto. Scrivere il diagramma di flusso e la relativa pseudocodifica.*

Per la risoluzione del precedente esercizio può essere utile il seguente risultato.

Proposizione 3.6. *Se $n \in \mathbb{N}$ è composto allora ammette almeno un divisore proprio minore o uguale di $\sqrt{n}$.*

Dimostrazione.

Per ipotesi n è composto, allora possiamo scrivere: $n = ab$ dove $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$.

I numeri a e b non possono essere entrambi maggiori o entrambi minori di $\sqrt{n}$, altrimenti il loro prodotto sarebbe maggiore oppure minore di n. Possiamo pertanto concludere che se n è composto deve avere un divisore proprio compreso tra 2 e $\sqrt{n}$

Esercizio 3.7. *Pensare un algoritmo che consenta di fattorizzare un numero intero $n > 0$. Scrivere diagramma di flusso relativa pseudocodifica.*

Osservazione importante

L'algoritmo trovato in laboratorio per la fattorizzazione di un intero positivo presenta alcuni limiti. Esso può servire per fattorizzare numeri di poche cifre ma diventa inutilizzabile per numeri grandi (ad esempio, per numeri con più di 100 cifre). La ragione di questo fatto non dipende dalla particolare soluzione trovata: ancora oggi *non si conoscono algoritmi efficienti per la fattorizzazione di numeri interi molto grandi.* Nella seguente tabella sono riportati i tempi di fattorizzazione di interi molto grandi avendo a disposizione le migliori tecnologie odierne.[3]

Numeri interi	*tempi per un test di primalità*	*tempi per la fattorizzazione*
interi di 20 *cifre*	10*sec.*	24 *minuti*
interi di 100 *cifre*	40 *sec.*	74 *anni*
interi di 200 *cifre*	10 *min.*	$3,8 \cdot 10^9$ *anni*
interi di 1000 *cifre*	1 *settimana*	$3,2 \cdot 10^{43}$ *anni*

3.2 Il massimo comun divisore

Dati due interi a e b, non entrambi nulli, il loro massimo comun divisore, che si denota con

$$MCD(a, b)$$

è *il maggiore tra i divisori comuni di a e b.*

[3] I dati riportati nella seguente tabella si riferiscono ad una stima di Knuth risalente ai primi anni '80. Si veda anche, a tale proposito, l'articolo "Frontiere dell'algebra: uso e limiti del computer" di Renato Betti (1997).

In altri termini diciamo che il $MCD(a,b)$ è un numero d caratterizzato dalle due seguenti proprietà:

- *d è un divisore di a e b.*
- *Se d' è un divisore comune di a e b allora $d' \leq d$.*

Ad esempio:

1) $MCD(12,8) = 4$;

2) $MCD(-12,8) = 4$;

3) $MCD(15,0) = 15$ e, in generale, $MCD(a,0) = |a|$, per ogni $a \neq 0$;

4) $MCD(8,9) = 1$. Due numeri, come 8 e 9, il cui massimo comun divisore è 1, si dicono *primi tra loro*.

Una proprietà molto importante del massimo comun divisore che utilizzeremo più avanti è la seguente:

> Il massimo comun divisore di due numeri a e b si può sempre scrivere come combinazione lineare, a coefficienti interi, di a e b e cioè :
>
> $$MCD(a,b) = ha + kb$$
>
> per opportuni interi h e k.

Per esempio il $MCD(12,8)$ si può scrivere nel seguente modo:

$$MCD(12,8) = +1 \cdot 12 - 1 \cdot 8.$$

In particolare, se a e b sono primi fra loro, allora esistono due interi h e k per i quali

$$ha + kb = 1. \tag{3.2}$$

3.3 L'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore di due numeri.

Conosciamo già un metodo per determinare il massimo comun divisore di due numeri. Per esempio, se si deve calcolare il $MCD(a,b)$ con $a = 24$ e $b = 80$ si deve prima *fattorizzare in numeri primi* il numero a e il numero b. Con facili conti, si ottiene $a = 2^3 \cdot 3$ e $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Il $MCD(a,b)$ si ottiene moltiplicando tra loro *i fattori primi comuni ad a e b presi una sola volta con il minimo esponente*. Nel nostro caso si ottiene: $MCD(a,b) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Il metodo qui ricordato è corretto e, naturalmente, si può utilizzare tutte le volte che si vuole!

Tuttavia, se si vuole determinare il $MCD(a,b)$ di due numeri molto grandi, per esempio se

$$a = 52384119910237 \text{ e } b = 1246789762374$$

è facile convincersi che la nostra tecnica non è poi così comoda. Essa, infatti prevede la scomposizione in numeri primi dei due numeri dati e, come sottolineato nel paragrafo precedente, questa operazione nasconde molte insidie.

Come fare, allora? È possibile determinare il massimo comun divisore di due numeri senza doverli preventivamente scomporre in fattori primi? La risposta è affermativa: Euclide, più di 2300 anni fa, scoprì un bellissimo algoritmo che inserì nel Libro 7 degli *Elementi* (circa 300 a.C.).

L'algoritmo di Euclide. Siano a e b due interi positivi di cui si vuole determinare il loro massimo comun divisore. Sappiamo allora che esistono e sono unici due numeri q e r per i quali si ha:

$$a = bq + r \qquad dove \qquad 0 \leq r < b$$

L'idea di Euclide si basa su questa semplice considerazione:

$$MCD(a, b) = MCD(b, r) \tag{3.3}$$

DIMOSTRAZIONE:

Se un intero d divide sia a che b, allora divide anche la differenza $a - qb = r$; quindi d è anche un divisore comune di b e r.

Viceversa, se d divide sia b che r, allora divide anche la somma $qb + r = a$; quindi d è anche un divisore comune di a e b.

Dunque i divisori comuni di a e b sono esattamente i divisori comuni di b e r, e pertanto $MCD(a, b) = MCD(b, r)$. □

Se si vuole determinare il $MCD(a, b)$ nel caso in cui $a = 2406$ e $b = 654$, mediante divisioni successive si costruisce la seguente tabella:

a	b	$a = bq + r$	q	r
2406	654	$2406 = 3 \times 654 + 444$	3	444
654	444	$654 = 1 \times 444 + 210$	1	210
444	210	$444 = 2 \times 210 + 24$	2	24
210	24	$210 = 8 \times 24 + 18$	8	18
24	18	$24 = 1 \times 18 + 6$	1	6
18	6	$18 = 3 \times 6 + 0$	3	0

Allora il $MCD(2406, 654) = 6$. Infatti, applicando ripetutamente l'uguaglianza 3.3, abbiamo:

$$\begin{aligned} MCD(2406, 654) &= MCD(654, 444) \\ MCD(444, 210) &= MCD(210, 24) \\ MCD(24, 18) &= MCD(18, 6) \\ MCD(6, 0) &= 6 \end{aligned}$$

Quanto all'ultima uguaglianza, si ricordi che per ogni intero positivo a,

$$MCD(a, 0) = a.$$

Quindi *l'ultimo resto non nullo è il massimo comun divisore* di a e b.

In termini generali, l'algoritmo di Euclide per la ricerca del massimo comun divisore di due interi a, b, consiste nell'effettuare le divisioni successive:

$$\begin{array}{rcll} a & = & q_1 b + r_1 & (0 \leq r_1 < b) \\ b & = & q_2 r_1 + r_2 & (0 \leq r_2 < r_1) \\ r_1 & = & q_3 r_2 + r_3 & (0 \leq r_3 < r_2) \\ .. & .. & .... & .... \\ r_{n-2} & = & q_n r_{n-1} + r_n & (0 \leq r_n < r_{n-1}) \\ r_{n-1} & = & q_{n+1} r_n + 0 & \end{array}$$

Si osservi che i successivi resti che si ottengono sono non negativi e decrescono strettamente:

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > r_{n-1} > \cdots$$

Quindi dopo un numero finito di passi si arriva a un resto nullo. Applicando ripetutamente l'uguaglianza 3.3, abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} MCD(a,b) & = & MCD(b,r_1) \\ MCD(b,r_1) & = & MCD(r_1,r_2) \\ MCD(r_1,r_2) & = & MCD(r_2,r_3) \\ \ldots & .. & \ldots \\ MCD(r_{n-2},r_{n-1}) & = & MCD(r_{n-1},r_n) \\ MCD(r_{n-1},r_n) & = & MCD(r_n,0) = r_n. \end{array}$$

Quindi *l'ultimo resto r_n non nullo è il massimo comun divisore* di a e b.

Esercizio 3.8. *Utilizzando l'algoritmo di Euclide calcolare il $MCD(a,b)$ nei seguenti casi:*

1] $a = 128$ $b = 72$*;* 2] $a = 84$ $b = 56$*;* 3] $a = 484$ $b = 30$*;*

4] $a = 402$ $b = 93$*;* 5] $a = 85$ $b = 20$*;* 6] $a = 60$ $b = 5$*;*

3.4 Attività per il laboratorio di matematica

Esercizio 3.9. *Realizzare un foglio elettronico per il calcolo del massimo comun divisore tra due numeri che utilizzi l'algoritmo di Euclide.*

È facile constatare, dopo aver eseguito qualche test, la straordinaria efficienza dell'algoritmo di Euclide. A titolo di curiosità si segnala il seguente importante risultato

Teorema 3.10. (Teorema di Lamé[4]) *Siano a e b due interi positivi con $a \geq b$. Allora il numero di divisioni eseguite dall'algoritmo di Euclide per trovare il $MCD(a,b)$ è minore o uguale a cinque volte il numero di cifre di b.*

Esercizio 3.11. *Siano a e b due interi. Dopo aver verificato che vale la seguente uguaglianza*

$$a \cdot b = MCD(a,b) \cdot mcm(a,b)$$

realizzare un foglio di calcolo che determini il minimo comune multiplo *di due numeri interi assegnati.*

Esercizio 3.12. *Con l'ausilio di un foglio elettronico determinare i numeri primi compresi tra* 1 *e* 100 *utilizzando il cosiddetto "crivello di Eratostene".*

[4]Gabriel Lamé (1795-1870) è considerato da Gauss il più importante matematico francese del suo tempo.

3.5 Il teorema di Euclide

Affrontiamo ora il seguente

Problema 3.13. *Quanti sono i numeri primi?*

Rispondere a questa domanda non è facile perché gli interi positivi sono infiniti. È possibile però calcolare quanti sono i numeri primi in alcuni intervalli prestabiliti di numeri interi. Si osservi la seguente tabella

Intervallo	*numeri primi compresi*	*densità*
$1 - 1000$	168	$16,8$
$1000 - 2000$	135	$13,5$
$2000 - 3000$	127	$12,7$
$3000 - 4000$	120	$12,0$
$4000 - 5000$	119	$11,9$
$29000 - 30000$	92	$9,2$
$999000 - 1000000$	65	$6,5$

È curioso osservare che la densità dei numeri primi va lentamente diminuendo! Questo significa che via via che ci si allontana dallo zero diventa sempre più difficile trovare un numero primo.

Si potrebbe addirittura pensare che che i numeri primi siano in numero finito ma non è così: Euclide (III sec. a.C.) ha infatti dimostrato[5] il seguente celebre teorema:

Teorema 3.14 (Euclide)**.** *L'insieme dei numeri primi è infinito.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che l'insieme dei numeri primi sia finito:

$$\{2, 3, 5, ..., p\},$$

dove p è il più grande di tutti i numeri primi. Moltiplichiamo tra loro tutti questi numeri e aggiungiamo 1 al risultato. Otteniamo così il numero

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p \ + \ 1.$$

Questo numero N non è divisibile per 2, perché la sua espressione ci dice che, dividendolo per 2, si ottiene il resto 1. Per lo stesso motivo, N non è divisibile per 3, né per 5, ...,né per p. Abbiamo così trovato un numero che non è divisibile per nessuno dei numeri primi $2, 3, 5, ..., p$.

Questo fatto può significare due cose:

1) N è primo, ma ciò è assurdo perché $N > p$;

2) N è costituito da numeri primi che non appartengono alla collezione $\{2, 3, 5, ..., p\}$, ma ciò è assurdo perché la collezione $\{2, 3, 5, ..., p\}$ doveva esaurire tutti i numeri primi.

Dunque, l'insieme dei numeri primi è infinito. □

Sottolineiamo che l'argomentazione del teorema di Euclide permette di concludere che la successione dei numeri primi è infinita ma *non fornisce una legge per determinare nuovi numeri primi.*

[5] Nel *libro IX, proposizione 20* degli *Elementi* Euclide afferma "I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi".

Consideriamo infatti i seguenti elenchi di numeri primi:

$$\{2\}, \quad \{2,3\} \quad \{2,3,5\} \quad \{2,3,5,7\} \quad \{2,3,5,7,11\} \quad \{2,3,5,7,11,13\}$$

Allora i numeri

$$\begin{aligned} &2+1\\ &2\cdot 3+1\\ &2\cdot 3\cdot 5+1\\ &2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1\\ &2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1 \end{aligned}$$

sono primi, mentre il numero

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1 = 30031 = 59\cdot 509$$

non è primo e i suoi fattori primi 59 e 509 non appartengono all'insieme

$$\{2,3,5,7,11,13\}.$$

3.6 Curiosità sui numeri primi

I numeri primi hanno da sempre affascinato i matematici e, fin dall'antichità, essi hanno cercato di indagarne tutti i segreti. Oggi sono molte le informazioni che possediamo a loro riguardo, ma questo non deve far credere che ogni domanda riguardante i numeri primi abbia trovato una risposta soddisfacente. Ad esempio i due problemi qui sotto riportati attendono ancora una risposta!

I numeri primi gemelli

La successione dei numeri primi mette in evidenza coppie di numeri primi che differiscono di 2. Per esempio, 5, 7; oppure 11, 13; 17, 19 e così via. Questi numeri si dicono *numeri primi gemelli*.

La domanda è questa: quante sono le coppie di numeri primi di questo tipo? In altre parole, quanti sono i numeri primi gemelli?

La congettura di Goldbach

Ogni numero pari, maggiore di due, si può scrivere come somma di due numeri primi. Per esempio, $8 = 5 + 3$; $12 = 7 + 5$; $16 = 13 + 3$ e così via.

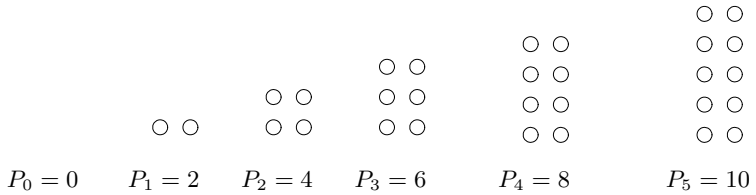
Fino ad oggi nessuno è riuscito a dimostrare che questa affermazione è vera, e nemmeno si è riusciti a mostrare, con un controesempio, che è falsa.

4 Numeri figurati

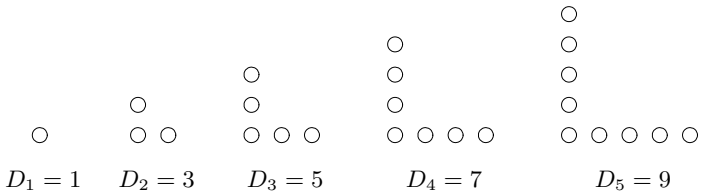
L'idea è quella di trovare forme geometriche che contraddistinguano particolari successioni numeriche in modo tale da dedurre le proprietà aritmetiche dei numeri da proprietà di carattere geometrico. Lo slogan di questa sezione è:

> *studiare l'aritmetica utilizzando la geometria.*

Iniziamo con il trovare una forma geometrica per rappresentare i numeri pari e i numeri dispari.

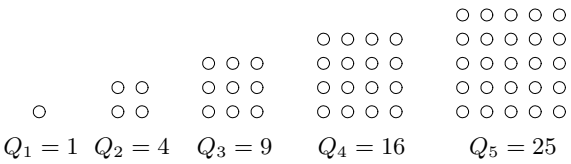


I numeri *pari* sono *rettangoli di base due*. Il primo numero pari, lo zero, si può pensare come un rettangolo di base due e altezza nulla.



I numeri *dispari* sono una *elle* formata da due segmenti della stessa lunghezza.

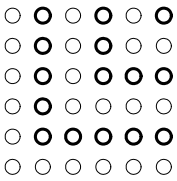
Ecco invece i numeri *quadrati*:



Problema 4.1. *Dimostrare che la somma dei primi numeri dispari è uguale all'ennesimo numero quadrato, cioè*

$$1 + 3 + 5 + \ldots \cdots + (2n - 1) = n^2$$

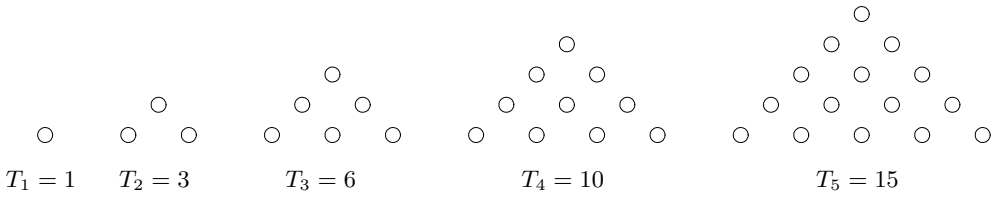
Soluzione. Basta osservare la seguente figura



I numeri dispari sono stati inscatolati uno dentro l'altro in modo da formare un quadrato.

4.1 Numeri triangolari

Consideriamo ora tutti quei numeri che si ottengono sommando i primi n numeri naturali. Per esempio, 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ eccetera. Sono i cosidetti numeri *triangolari*.



Esercizio 4.2. *Dimostrare che la somma di due numeri triangolari consecutivi è un numero quadrato. Dimostrare cioè che* $T_{n-1} + T_n = Q_n$.

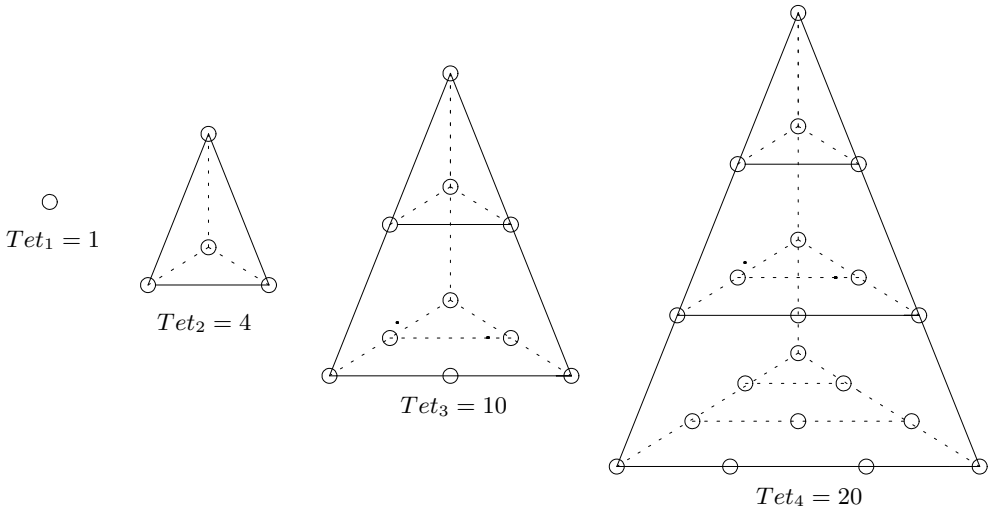
Esercizio 4.3. *Dimostrare che* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

5 Approfondimento: numeri tetraedrici e numeri piramidali quadratici

Questa sezione non tratta argomenti in programma e può essere tralasciata.

5.1 Numeri tetraedrici

I numeri tetraedrici si ottengono impilando numeri triangolari via via più grandi.



Se indichiamo con $T_1, T_2, T_3 \ldots$ i numeri triangolari e con $Tet_1, Tet_2, Tet_3 \ldots$ i numeri tetraedrici abbiamo:

$$Tet_1 = T_1 = 1$$
$$Tet_2 = T_1 + T_2 = 1 + (1 + 2) = 4$$
$$Tet_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) = 10$$
$$Tet_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) = 20$$

Per trovare il quinto numero tetraedrico, cioè Tet_5, bisogna sommare tutti i numeri del seguente triangolo

$$\begin{gathered} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \\ 1+2+3+4+5 \end{gathered}$$

Se sommiamo tra loro tutti gli uno poi tutti i due e così via otteniamo

$$Tet_5 = (1 \cdot 5) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 2) + (5 \cdot 1) = 35$$

Pertanto, l'ennesimo numero tetraedrico sarà

$$\begin{aligned} Tet_n &= T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots T_n \\ &= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= 1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \ldots \cdots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1 \end{aligned}$$

Esercizio 5.1. *Servendosi di un foglio elettronico scrivere i primi cento numeri tetraedrici.*

Problema 5.2. *Trovare una formula chiusa per rappresentare l'ennesimo numero tetraedrico.*

Soluzione.

Per iniziare scegliamo $n = 5$ e consideriamo le tre seguenti copie di Tet_5:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \\ 1+2+3+4+5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2+1 \\ 3+2+1 \\ 4+3+2+1 \\ 5+4+3+2+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ 4+4 \\ 3+3+3 \\ 2+2+2+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{array} .$$

Sommiamo ora tutti i termini che, nei tre triangoli, occupano la stessa posizione

$$\begin{array}{c} 7 \\ 7+7 \\ 7+7+7 \\ 7+7+7+7 \\ 7+7+7+7+7 \end{array} .$$

Pertanto tre copie di Tet_5 si possono ottenere così:

$$3 \cdot Tet_5 = (1+2+3+4+5) \cdot 7 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 7 \tag{5.1}$$

e infine $Tet_5 = 35$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per Tet_n, dalla 5.1, otteniamo

$$3 \cdot Tet_n = (1+2+3+4+5+\cdots+n) \cdot (n+2) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot (n+2) \tag{5.2}$$

Quindi

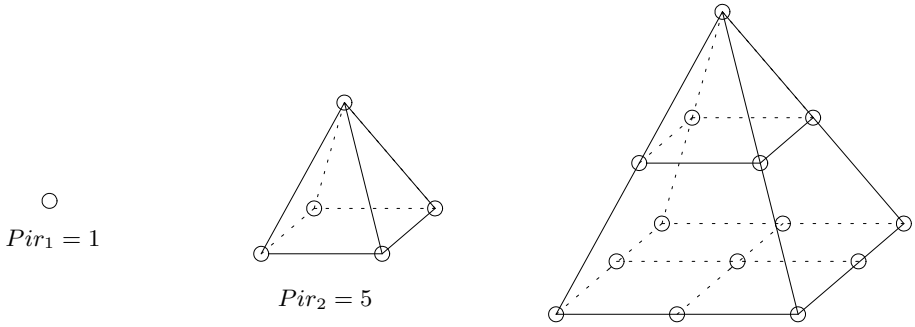
L'ennesimo numero tetraedrico si può esprimere mediante la seguente formula chiusa:

$$Tet_n = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(n+2).$$

Esercizio 5.3. *Dimostrare che la somma di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per* 6.

5.2 Numeri piramidali quadratici

Se impiliamo numeri quadrati otteniamo i cosiddetti *numeri piramidali a base quadrata*, che indichiamo con i simboli Pir_1, Pir_2, Pir_3 etc, etc. Più precisamente, il numero Pir_n è costituito da una piramide di vertice Q_1 e dagli "strati" $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, di cui l'ultimo costituisce la base della piramide.



Esercizio 5.4. *Servendosi di un foglio elettronico scrivere i primi cento numeri piramidali a base quadrata.*

Esercizio 5.5. *Dimostrare che ogni numero piramidale si può ottenere sommando due numeri tetraedrici consecutivi, cioè* $Pir_n = Tet_n + Tet_{n-1}$

Problema 5.6. *Trovare una formula chiusa per rappresentare l'ennesimo numero piramidale.*

Soluzione. Nell'esercizio 5.5 abbiamo mostrato che $Pir_n = Tet_n + Tet_{n-1}$. Dunque, abbiamo

$$Pir_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

In altre parole

La somma dei primi n numeri quadrati è data dalla seguente uguaglianza:

$$Pir_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1). \tag{5.3}$$

Esercizio 5.7. *Costruire, servendosi dei mattoncini per bambini,* 6 *copie del numero piramidale* Pir_n *e disponetele in modo da formare una scatola di dimensioni* $n(n+1)(2n+1)$*. In questo modo si dimostra, per altra via, l'uguaglianza 5.3.*