Serie numeriche. Esercizi

Mauro Saita, aprile 2014.

Indice

[1]

1 Serie numeriche.

1.1 Serie a termini definitivamente positivi

Esercizio 1.1. *Usando la definizione di somma di una serie, stabilire se le seguenti serie numeriche convergono e, in caso affremativo, determinare la loro somma.*

$$a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

R

Esercizio 1.2. *Trovare la somma delle seguenti serie geometriche:*

$$a)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

R

Esercizio 1.3. *Stabilire se le serie seguenti convergono e, in caso affermativo, determinarne la somma.*

$$a)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n} \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{2^{3n}} \qquad\qquad c)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2}{5n^2+n+3}$$

$$d)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log n \qquad\qquad e)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+3^{n+1}}{5^n}$$

[1]Per segnalazioni di refusi o errori scrivete per favore a: maurosaita@tiscalinet.it Nome del file .tex: 'Esercizi-serie-numeriche-2014.tex'

$\boxed{R}$

Esercizio 1.4. *Usando opportune serie geometriche, scrivere sotto forma di frazione i seguenti numeri decimali periodici:*

$$a)\quad 0,2\overline{4} \qquad b)\quad 2,\overline{13} \qquad c)\quad 1,\overline{8} \qquad d)\quad 2,1\overline{4}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 1.5. *A cosa è uguale il numero* $0,99999....$ *(periodo 9)? Spiegare perché questo esempio mostra che è possibile (e opportuno) evitare il periodo 9.*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.6 (Criterio del confronto)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi, per le quali si ha* $a_n \leq b_n$*, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Dimostrare che:*

"se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge "

o, in modo equivalente

"se $\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge "

$\boxed{R}$

Esercizio 1.7 (Criterio del confronto asintotico.)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi. Dimostrare che:*

"se $a_n \sim b_n$ allora le due serie hanno lo stesso carattere."

Esercizio 1.8. *Dire se le seguenti serie numeriche convergono, divergono o sono irregolari*

$$a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} \qquad b)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} \qquad c)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$d)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n^4} \qquad e)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \qquad f)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 1.9 (Criterio del rapporto)**.** *Dimostrare la seguente proprietà .*

Se $\sum a_n$ *è una serie a termini positivi e* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \leq +\infty$ *allora si ha:*

- *se* $0 \leq L < 1$*, la serie* $\sum a_n$ *converge;*
- *se* $L > 1$*, la serie* $\sum a_n$ *diverge a* $+\infty$*.*

R

Esercizio 1.10. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *è convergente.*

R

Esercizio 1.11. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ *è convergente.*

R

Esercizio 1.12. *Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche*

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n\, 3^{-n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$$

R

Esercizio 1.13 (Criterio della radice.)**.** *Dimostrare la seguente proprietà .*
Se $\sum a_n$ *è una serie a termini positivi e* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \le +\infty$ *allora si ha:*

- *se* $0 \le L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *converge;*
- *se* $L > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *diverge a* $+\infty$.

Esercizio 1.14. *Utilizzando il criterio della radice stabilire il carattere della seguente serie*

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

R

Esercizio 1.15. *Dire se le seguenti serie sono convergenti, divergenti, indeterminate.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{3n^2+1}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{3}\left(e^{1/n} - 1\right)\right]^n$$

R

Esercizio 1.16. *Si determini, al variare di* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, *il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

R

1.2 Serie a termini di segno alterno

Si ricordi il seguente criterio (sufficiente) per la convergenza di serie a termini di segno alterno

Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{1}^{+\infty} (-)^n a_n\,, \quad (a_n > 0)$ una serie a termini di segno alterno. Se

(i) $a_{n+1} \leq a_n$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

allora $\sum_{1}^{+\infty} (-)^n a_n$ converge.

Esercizio 1.17. *Stabilire il carattere della seguenti serie a termini di segno alternato*

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n \frac{1}{n} \qquad b) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n} \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n \frac{1}{n^4}$$

R

Esercizio 1.18. *Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ si determini il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+3x)^n}{n}$$

R

1.3 Serie a termini di segno variabile

Si ricordi il seguente

Teorema 1.19. *Sia $\sum a_n$ una serie a termini di segno qualsiasi.*

$$\sum |a_n| \ \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \ \textit{converge}$$

cioè se una serie converge assolutamente allora converge semplicemente.

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ è convergente, infatti

$$|a_n| = \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Pertanto, per il criterio del confronto, la serie $\sum |a_n|$ dei valori assoluti è convergente. Per il teorema (1.19) segue che la serie $\sum a_n$ è convergente.

Esercizio 1.20. *Per quali valori del parametro* $x \in \mathbb{R}$ *la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n\,2^n}$$

converge assolutamente? Per quali $x \in \mathbb{R}$ *converge semplicemente? Per quali* $x \in \mathbb{R}$ *diverge?*

$\boxed{R}$

2 Soluzioni.

Esercizio 1.1 a) Suggerimento: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Esercizio 1.2 a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3.$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1/2.$

Esercizio 1.3 a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n} = \frac{35}{2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{2^{3n}} = \frac{1}{14}$, c) Suggerimento: se una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log n = +\infty$. e) Notare che $\frac{1+3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5^n} + 3(\frac{3}{5})^n$.

Esercizio 1.4 a) $\frac{11}{45}$. b) $\frac{211}{99}$. c) $\frac{17}{9}$. d) $\frac{193}{90}$.

Esercizio 1.5 $0,(9) = 0,999.. = 1$. Se si evita il periodo 9 c'e' corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e gli allineamenti decimali.

Esercizio 1.6 Siano $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ le successioni delle somme parziali rispettivamente delle serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$. Se si indica con S la somma di $\sum b_n$, da $s_n \le S_n$ si ricava $s_n \le S$. Quindi la successione delle somme parziali s_n è monotona crescente e superiormente limitata. Pertanto s_n (e $\sum a_n$) converge. ∎

Esercizio 1.8 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot 4^n}$ converge; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} = +\infty$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = +\infty$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n^4}$ converge; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} = +\infty$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ converge.

Esercizio 1.9 a) Si ha la seguente catena di disuguaglianze $a_n \le La_{n-1} \le L^2 a_{n-2} \le \cdots \le L^n a_0$. Poichè la serie $\sum L^n a_0$ converge, per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum a_n$. ∎

Esercizio 1.10 Usare il criterio del rapporto.

Esercizio 1.11 Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!} = \frac{n^n}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow e^{-1} < 1$$

La serie converge.

Esercizio 1.12

a) $a_n = \dfrac{\log n}{n^3} \le \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Quindi, per il criterio del confronto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Si ha: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{(n+1)}{3^{n+1}}\,\dfrac{3^n}{n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{n+1}{3n}=\dfrac{1}{3}$.

La serie converge per il criterio del rapporto.

c) Con il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{3^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{3^n\,n!}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\longrightarrow+\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=3e^{-1}$$

La serie diverge.

Esercizio 1.14

a) $\sqrt[n]{a_n}=\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n=\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{-n}=\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-n}\to\dfrac{1}{e}<1$. La serie converge per il criterio della radice.

b) Utilizzando il criterio della radice si ottiene: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\big(n^{\frac{1}{n}}-1\big)=0$

(infatti $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\log n}{n}}=1$). Quindi la serie converge.

Esercizio 1.15 1. Si noti che la serie è a termini positivi. Utilizzando il criterio asintotico si ha, per $n\to\infty$: $a_n\sim\frac{1}{3n^2+1}\sim\frac{1}{3n^2}$. Quindi la serie converge.

2. La serie è a termini positivi. Utilizzando il criterio della radice si ha:

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{n}{3}(e^{\frac{1}{n}}-1)\sim\frac{n}{3}(1+\frac{1}{n}-1)\longrightarrow\frac{1}{3}$$

per n tende a $+\infty$. Quindi la serie converge.

Esercizio 1.16 La serie è a termini positivi. Per ogni fissato $x>0$ e per $n\to+\infty$, si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{x}{2(x+1)}\right)\longrightarrow\left(\frac{x}{2(x+1)}\right)$$

Dall'ipotesi $x>0$ segue che il limite $\left(\frac{x}{2(x+1)}\right)$ minore di 1. Quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge.

Esercizio 1.17

Utilizzando il criterio di Leibniz è immediato verificare che tutte e tre le serie convergono. Per quanto riguarda la serie b) si osservi che $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\ln n}=\sum_{n=2}^{+\infty}(-)^n\frac{1}{\ln n}$.

Esercizio 1.18 Sia $\displaystyle\sum a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+3x)^n}{n}$

Se $x>0$ la serie è a termini positivi e il termine generale a_n diverge a $+\infty$. Quindi $\sum a_n=+\infty$;

se $x=0$ la serie data è la serie armonica $\Big(\sum a_n=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big)$. Quindi $\sum a_n=+\infty$;

se $-\frac{1}{3} < x < 0$, la serie è a termini positivi e $a_n < (1+3x)^n$, dove $0 < (1+3x) < 1$. Allora $\sum(1+3x)^n$ è una serie geometrica convergente; per il criterio del confronto anche la serie $\sum a_n$ converge;

se $x = -\frac{1}{3}$ i termini della serie sono tutti nulli, quindi $\sum a_n$ converge;

se $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3}$ la serie è a termini alternati. Utilizzando il criterio di Leibniz si verifica che $\sum a_n$ converge;

se $x < -\frac{2}{3}$ il termine generale a_n della serie non tende a zero e quindi $\sum a_n$ non converge.

Esercizio 1.20

La serie dei valori assoluti è $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x-5|}{2}\right)^n$. Utilizzando il criterio del rapporto (o equivalentemente quello della radice) si ricava:

se $3 < x < 7$ la serie $\sum |a_n|$ converge.

se $x < 3 \vee x > 7$ la serie $\sum |a_n|$ diverge.

se $x = 3 \vee x = 7$ $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$, la serie diverge.

Per quanto riguarda la serie $\sum a_n$ si ha:

se $3 < x < 7$ la serie $\sum a_n$ converge (perchè converge assolutamente).

se $x < 3 \vee x > 7$ il termine generale a_n della serie non tende a zero, quindi $\sum a_n$ non converge.

se $x = 3$ $\sum a_n = \sum (-)^n \frac{1}{n}$, la serie converge.

se $x = 7$ $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$, la serie diverge.