Integrali di un campo vettoriale lungo un cammino
Campi conservativi e forme esatte
Esercizi

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Giugno 2016.[1]

Indice

[1] Nome file: 'Es_campi_conservativi_forme_esatte_2016.tex'

1 Integrale di una 1-forma, o di un campo vettoriale, lungo un cammino

Esercizio 1.1. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2, -xy)$$

(x, y) *in* $\mathbb{R}^2$*, ovvero, in modo equivalente, la* 1*-forma*

$$\omega = x^2 dx - xy dy$$

Calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ *(o di* ω*) lungo:*

1) *la curva orientata* $\mathcal{C}_1$ *di equazioni parametriche* $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$

2) *la curva orientata* $\mathcal{C}_2$ *di equazioni parametriche* $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$

3) *la curva orientata* $\mathcal{C}_3$ *di equazioni parametriche* $x = \cos(\frac{\pi}{2} - t), \quad y = \sin(\frac{\pi}{2} - t),$ $0 \leq t \leq \pi/2.$

Esercizio 1.2. *Si consideri la* 1*-forma*

$$\omega = xy^2 dx - x^3 dy$$

Calcolare l'integrale di ω *lungo:*

1) *la curva orientata* $\mathcal{C}_1$ *di equazione* $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$

2) *la curva orientata* $\mathcal{C}_2$ *di equazione* $y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Esercizio 1.3. *Si consideri la* 1*-forma*

$$\omega = \cos x dx - y dy$$

Calcolare l'integrale di ω *lungo la curva orientata* $\mathcal{C}$ *di equazione* $y = \sin x, \ 0 \leq x \leq \pi.$

Esercizio 1.4. *Calcolare* $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *dove* $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ *e* $\mathcal{C}$ *è la curva di equazioni parametriche* $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3, \ 0 \leq t \leq 1.$

Esercizio 1.5. *Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze* $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y^3, x^3y^2)$ *lungo il segmento di retta da* $P = (0, 0)$ *a* $Q = (2, 1)$ *(orientato da* P *a* Q*).*

Esercizio 1.6. *Calcolare* $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *dove* $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x-1}, xy)$ *e* $\mathcal{C}$ *è data da* $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

Esercizio 1.7. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x - 2)$$

(x, y) *in* $\mathbb{R}^2$, *oppure, in modo equivalente, la* 1*-forma*

$$\omega = (x - y)\, dx + (x - 2)dy$$

Calcolare $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *(o* $\oint_{\mathcal{C}} \omega$*) dove* $\mathcal{C}$ *è :*

1) *l'ellisse di equazione* $4x^2 + y^2 = 4$ *orientata in senso antiorario.*

2) *la circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 = 4$ *orientata in senso antiorario.*

2 Campi conservativi. Forme esatte.

1. `Campi conservativi.` Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale su A. $\mathbf{F}$ si dice *conservativo* se esiste una funzione $A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ per la quale risulta

$$\nabla\varphi = \mathbf{F}$$

2. `Campi irrotazionali.` Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale su A. $\mathbf{F}$ si dice *irrotazionale* se

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z), \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z), \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)$$

3. `Rotore.` Il rotore di $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x,y,x) &= \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

4. `Forme esatte, forme chiuse.` Una 1-forma differenziale $\omega = \omega_1\,dx + \omega_2\,dy + \omega_3\,dz$ su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ si dice *esatta* se esiste una funzione $F \in C^1(A)$ per la quale

$$\omega = dF$$

ovvero $\omega_1 = F_x,\ \omega_2 = F_y, \omega_3 = F_z$

Una 1-forma differenziale $\omega = \omega_1\,dx + \omega_2\,dy + \omega_3\,dz$ su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ si dice *chiusa* se

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

5. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^3$, $A \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ su A.

Se $\mathbf{F}$ è conservativo allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

In dimensione due l'uguaglianza (2.1) assume la forma

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \tag{2.2}$$

6. `Conservativo implica irrotazionale.` Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ sull'aperto A. Se $\mathbf{F}$ è conservativo allora $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$, cioè

$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Longrightarrow \mathbf{F} \text{ irrotazionale}$$

7. `Esatta implica chiusa.` Il risultato precedente nel linguaggio delle forme diventa

   Sia $\omega = \omega_1\,dx + \omega_2\,dy + \omega_3\,dz$ una $1-$forma di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto di $\mathbb{R}^3$. Allora ogni $1-$forma esatta è una $1-$forma chiusa, cioè

$$\omega \text{ esatta} \Longrightarrow \omega \text{ chiusa}$$

8. `Indipendenza del cammino.` Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale definito su un aperto connesso A di $\mathbb{R}^3$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

   i) $\mathbf{F}$ è conservativo, cioè esiste una funzione $A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ il cui gradiente è $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi \tag{2.3}$$

   ii) L'integrale di $\mathbf{F}$ lungo ogni cammino chiuso γ contenuto in A è zero:

$$\oint_\gamma \mathbf{F} = 0 \tag{2.4}$$

   iii) Fissati due punti P, Q in A, il valore dell'integrale $\int_\gamma \mathbf{F}$ è sempre lo stesso per tutti i cammini orientati γ da P a Q. (In altri termini, l'integrale non dipende dalla scelta del cammino orientato da P a Q, ma dipende solo dalla coppia ordinata (P, Q)).

9. `Condizione sufficiente per la conservatività.` Sia A un aperto *semplicemente connesso* di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale su A. Se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è irrotazionale allora è conservativo.

   Quindi se A è un aperto semplicemente connesso si ha

$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Longleftrightarrow \mathbf{F} \text{ irrotazionale}$$

   Nel linguaggio delle forme:

   Sia $\omega = \omega_1\,dx + \omega_2\,dy + \omega_3\,dz$ una $1-$forma di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\omega \text{ esatta} \Longleftrightarrow \omega \text{ chiusa}$$

10. `Una costruzione della funzione potenziale`

Se $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale conservativo definito su una regione Ω di $\mathbb{R}^2$ allora un suo potenziale $\varphi(x, y)$ si trova in questo modo: si fissa a piacere un punto (x_0, y_0) e si pone

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove l'integrale è esteso a una qualunque curva che congiunge (x_0, y_0) a (x, y) (il risultato non dipende dalla scelta della curva). Quando la regione Ω lo consenta, si può scegliere come cammino da (x_0, y_0) a (x, y) una spezzata poligonale, costituita da due tratti paralleli agli assi coordinati. Più precisamente, supponendo $x_0 < x$, $y_0 < y$, si può andare prima da (x_0, y_0) a (x, y_0) lungo il cammino $x(t) = t$, $y(t) = y_0$, $x_0 \leq t \leq x$ e poi da (x, y_0) a (x, y) lungo il cammino $x(t) = x$, $y(t) = t$, $y_0 \leq t \leq y$. Se $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ risulta allora

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x, t)dt$$

In modo analogo, se $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ è un campo vettoriale definito su una regione Ω di $\mathbb{R}^3$, un potenziale $\varphi(x, y, z)$ di $\mathbf{F}$ si può talvolta trovare, per esempio, integrando su una spezzata, con i lati paralleli agli assi coordinati, che va da (x_0, y_0, z_0) a (x_0, y, z_0), poi da (x_0, y, z_0) a (x, y, z_0) e infine da (x, y, z_0) a (x, y, z). Si otterrà allora

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x, y, t)dt$$

Esercizio 2.1. *Stabilire se $\boldsymbol{F}$, definito su $\mathbb{R}^2$, è un campo vettoriale conservativo. In caso affermativo, trovarne un potenziale, cioè una funzione φ per la quale $\nabla\varphi = \boldsymbol{F}$.*

a) $\boldsymbol{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$

b) $\boldsymbol{F}(x, y) = (xe^y, ye^x)$

Esercizio 2.2. *Si consideri il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ definito su $\mathbb{R}^2$.*

a) *$\boldsymbol{F}$ è un campo vettoriale conservativo? In caso affermativo trovarne un potenziale.*

b) *Calcolare $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ dove $\mathcal{C}$ è la curva di equazioni $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$.*

Esercizio 2.3 (Forze centrali, inversamente proporzionali al quadrato della distanza)**.** *Si consideri il campo di forze, definito su $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -k \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right)$$

(k costante) ossia, con notazione vettoriale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k \, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

a) *Si verifichi che $\boldsymbol{F}$ è conservativo e se ne trovi un potenziale.*

b) *Si determini il lavoro fatto dal campo di forze $\mathbf{F}$ lungo un cammino orientato che connette il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.*

Esercizio 2.4. *Determinare il lavoro fatto dal campo di forze*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, x - z, z - y)$$

quando un corpo si muove dal punto $P = (1, 0, -1)$ al punto $Q = (0, -2, 3)$.

Esercizio 2.5. *Si consideri la 1-forma*

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$. *ω è chiusa? è esatta?*

Esercizio 2.6. *Verificare che il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x, y) = (xy, \frac{1}{2}x^2)$, definito su $\mathbb{R}^2$, è conservativo e calcolarne un potenziale.*

Esercizio 2.7. *Il campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(3x^2y, x^3, -\frac{1}{z}\right)$$

definito su $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ *è conservativo? In caso affermativo calcolarne un potenziale.*

Esercizio 2.8. *Si consideri la famiglia di campi vettoriali in* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{O}$

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x - \alpha y}{2x^2 + 2y^2}, \frac{\beta x + y}{2x^2 + 2y^2}\right)$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. *Per quali* α, β *il campo* $\mathbf{F}$ *è irrotazionale in* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{O}$*?*
2. *Per gli* α, β *trovati al punto precedente calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, *dove* γ *è la circonferenza di centro nell'origine, raggio uno, orientata positivamente.*
3. *Esistono valori di* α, β *per cui* $\mathbf{F}$ *può essere conservativo in* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{O}$*? Per questi valori determinare, se possibile, un potenziale di* $\mathbf{F}$. *Per questi valori* $\mathbf{F}$ *è conservativo in* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{O}$*?*
4. *Per quali* α, β *il campo* $\mathbf{F}$ *è conservativo in* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$*? Trovare un potenziale di* $\mathbf{F}$ *in* Ω.

Esercizio 2.9. *Si consideri il campo vettoriale* $\mathbf{F}$ *su* $\mathbb{R}^2$ *così definito*

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + \cos y, 2g(x) - x \sin y)$$

dove $g(x)$ *è una funzione definita e derivabile su tutto* $\mathbb{R}$ *tale che* $g(1) = 1$.

1. *Per quali funzioni* $g(x)$ *il campo* $\mathbf{F}$ *è conservativo su* $\mathbb{R}^2$ *?*
2. *Per tali funzioni si trovi un potenziale di* $\mathbf{F}$, *e si calcoli l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$

   dove γ *è l'arco della parabola* $y = x^2$ *compreso tra la retta* $x = 0$ *e la retta* $x = 2$ *, percorso dall'alto verso il basso.*

3 Soluzioni

Esercizio 1.1

1) Per calcolare l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} x^2 dx - xy dy$$

si deve sostituire: al posto di x, la funzione $x(t) = \cos t$; al posto di y, $y(t) = \sin t$; al posto di dx, $x'(t)dt = -\sin t dt$ e al posto di dy, $y'(t)dt = \cos t dt$. In questo modo si ottiene una funzione integranda della sola variabile t, e la si integra da 0 a $\pi/2$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} x^2 dx - xy dy &= \int_0^{\pi/2} [(\cos t)^2(-\sin t) - (\cos t)(\sin t) \cos t] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t) dt = 2\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

2) La curva orientata $\mathcal{C}_2$ si ottiene riparametrizzando la curva $\mathcal{C}_1$. Precisamente, $\mathcal{C}_2$ percorre la stessa traiettoria di $\mathcal{C}_1$, ma con velocità doppia. Poiché l'orientamento delle due curve è lo stesso, si ha

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{2}{3}$$

3) La curva orientata $\mathcal{C}_3$ riparametrizza la traiettoria di $\mathcal{C}_1$, ma con l'orientamento opposto. Quindi

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 1.2

1) Una parametrizzazione del segmento di parabola che congiunge il punto $P = (0, 0)$ a $Q = (1, 1)$ è $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ con $0 \le t \le 1$. Pertanto

$$\int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_0^1 t^5 - 2t^4 dt = \left[\frac{t^6}{6} - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = -\frac{7}{30}$$

2) Una parametrizzazione dell'arco di curva $\mathcal{C}_2$ che congiunge il punto $P = (0, 0)$ a $Q = (1, 1)$ è $x(t) = t$, $y(t) = t^3$ con $0 \le t \le 1$. Pertanto

$$\int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_0^1 t^7 - 3t^5 dt = \left[\frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{8}$$

Esercizio 1.3

Una parametrizzazione dell'arco di curva $\mathcal{C}$ che congiunge il punto $P = (0, 0)$ a $Q = (\pi, 0)$ è $x(t) = t$, $y(t) = \sin t$ con $0 \le t \le \pi$. Pertanto

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^{\pi} \cos t - (\sin t)(\cos t) dt = \left[\sin t + \frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

Esercizio 1.4

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} xydx + yzdy + zxdz \\ &= \int_0^1 (t^3+5t^6)dt = \left[\tfrac{t^4}{4}+\tfrac{5t^7}{7}\right]_0^1 = \tfrac{27}{28}\end{aligned}$$

Esercizio 1.5

In generale, se P e Q sono due punti di $\mathbf{R}^n$, una parametrizzazione del segmento di retta che congiunge P a Q è $X(t) = P + t(Q-P)$, $0 \le t \le 1$. Nel nostro caso, una parametrizzazione del segmento di retta da $P=(0,0)$ a $Q=(2,1)$ è

$$x(t) = 2t \qquad y(t) = t$$

Il lavoro è dato da

$$\int_0^1 ((2t)^2t^3 2 + (2t)^3t^2)\, dt = \int_0^1 16t^5 = \frac{8}{3}$$

Allo stesso risultato si arriva più rapidamente, notando che $\mathbf{F}$ è conservativo, con potenziale $\varphi(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3$. Il lavoro di $\mathbf{F}$ da $P=(0,0)$ a $Q=(2,1)$ è allora

$$\varphi(2,1) - \varphi(0,0) = \frac{8}{3}$$

Esercizio 1.6

Si può procedere formalmente in questo modo. Troviamo $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$. Allora $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'dt = (2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j})dt$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_{\mathcal{C}} (e^{t^2-1}\mathbf{i} + t^5\mathbf{j})\cdot(2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j})dt \\ &= \int_0^1 (e^{t^2-1}2t + 3t^7)dt = \frac{11}{8} - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Esercizio 1.7

1) Una parametrizzazione dell'ellisse di equazione $4x^2+y^2=4$ è :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

Quindi

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \Big((\cos t - 2\sin t)(-\sin t) + 2(\cos t - 2)\cos t\Big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\sin(2t) - 4\cos t + 2\, dt \\ &= \left[\tfrac{1}{4}\cos(2t) - 4\sin t + 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

2) Una parametrizzazione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ è :

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \Big(2(\cos t - \sin t)(-\sin t) + 2(2\cos t - 2)\cos t \Big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2\sin(2t) - 4\cos t + 4\, dt \\
&= \Big[\cos(2t) - 4\sin t + 4t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 2.1

a) La condizione necessaria affinchè il campo $\mathbf{F}$ sia conservativo è soddisfatta, infatti $\frac{\partial}{\partial y}(6x+5y) = 5$ e $\frac{\partial}{\partial x}(5x + 4y) = 5$. Poichè il campo vettoriale è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, la condizione è anche sufficiente. Pertanto $\mathbf{F}$ è conservativo. Detto φ un potenziale di $\mathbf{F}$ si deve avere

$$\varphi_x = 6x + 5y \qquad \varphi_y = 5x + 4y \tag{3.1}$$

Dalla prima equazione si ricava $\varphi = 3x^2 + 5xy + p(y)$, dove $p(y)$ è una funzione della sola variabile y. Allora

$$\varphi_y = 5x + p'(y)$$

Confrontando con la seconda delle equazioni (3.1) si ricava, ad esempio, $p(y) = 2y^2$ (o $p(y) = 2y^2 + c$). Quindi un potenziale è

$$\varphi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}(xe^y) = xe^y$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}(ye^x) = ye^x$. Le due derivate parziali sono diverse quindi $\mathbf{F}$ non è conservativo.

Esercizio 2.2

a) $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e $\frac{\partial}{\partial y}(3+2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3y^2) = 2x$. Quindi $\mathbf{F}$ è conservativo. Se φ è un potenziale di $\mathbf{F}$, si ha

$$\varphi_x = 3 + 2xy \qquad \varphi_y = x^2 - 3y^2 \tag{3.2}$$

Dalla prima delle due equazioni (3.2) si ricava $\varphi(x,y) = 3x + x^2y + p(y)$. Derivando rispetto a y, si ha $\varphi_y = x^2 + p'(y)$. Confrontando con la seconda delle (3.2), si ottiene $p(y) = -y^3 + c$. Pertanto

$$\varphi(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + c$$

b) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Per calcolare l'integrale richiesto occore conoscere solo il punto iniziale e il punto finale della curva $\mathcal{C}$, cioè $P = (0,1)$ e $Q = (0, -e^{\pi})$. Si ottiene:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad = \quad \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0, e^{-\pi}) - \varphi(0,1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Esercizio 2.3

Il campo di forze $\mathbf{F}$ è conservativo con potenziale $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pertanto il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo un qualunque cammino che congiunge il punto P_0 con il punto P_1 è

$$L(P_0, P_1) = \frac{1}{r(P_1)} - \frac{1}{r(P_0)}$$

dove $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Esercizio 2.4

Nel testo dell'esercizio non è indicato il cammino che collega il punto P con il punto Q. Ciò fa presumere che il campo di forze $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, x-z, z-y)$ sia conservativo. Per determinare la funzione potenziale $\varphi(x,y,z)$ si può procedere nel modo seguente:

Essendo $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = x + y$ si ha che $\varphi_(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xy + C(y,z)$ dove $C(y,z)$ dipende dalle sole variabili y e z.

Inoltre, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = x - z$ e, pertanto $\varphi_(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xy - yz + D(z)$ con $D(z)$ che dipende dalla sola variabile z. Infine, essendo $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = z - y$ si ha

$$\varphi_(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy - yz + \frac{z^2}{2}$$

Il lavoro di $\mathbf{F}$ quando il corpo si muove da $P = (1,0,-1)$ a $Q = (0,-2,3)$ è

$$\varphi(0,-2,3) - \varphi(1,0,-1) = \frac{19}{2}$$

Esercizio 2.6 $\mathbf{F}$ è conservativo, infatti $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = x$ per ogni (x,y) in $\mathbb{R}^2$. Un potenziale di $\mathbf{F}(x,y) = (xy, \frac{1}{2}x^2)$ è dato da

$$\varphi(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^x t \cdot 0\, dt + \int_0^y \frac{1}{2}x^2 dt = \int_0^y \frac{1}{2}x^2 dt = \frac{1}{2}x^2 y$$

Esercizio 2.7 Il dominio Ω è semplicemente connesso e si ha: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) = 0$ e $\dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = 0$, per ogni (x,y,z) in Ω. Quindi $\mathbf{F}$ è conservativo in Ω. Integrando su una opportuna spezzata, da $(0,0,1)$ a (x,y,z), si trova il potenziale

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,y,1)dt + \int_0^y F_2(0,t,1)dt + \int_1^z F_3(x,y,t)dt \\
&= \int_0^x 3t^2 y dt + 0 + \int_1^z \left(-\tfrac{1}{t}\right) dt \\
&= x^3 y - \ln z
\end{aligned}$$

Esercizio 2.8

1. $\mathbf{F}$ è irrotazionale se e solo se rot$\mathbf{F} = 0$, cioè $\mathbf{F}$ è irrotazionale se e solo se

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{3.3}$$

L'uguaglianza (3.3) è equivalente a

$$2\alpha(y^2 - x^2) = 2\beta(y^2 - x^2)$$

Quindi $\mathbf{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{O}$ se e solo se $\alpha = \beta$.

2. Per $\alpha = \beta$ il campo vettoriale è

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x - \alpha y}{2x^2 + 2y^2}, \frac{\alpha x + y}{2x^2 + 2y^2} \right)$$

Una parametrizzazione della circonferenza γ di centro l'origine, raggio uno, orientata positivamente è

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

dove $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos\theta - \alpha\sin\theta}{2}(-\sin\theta) + \frac{\alpha\cos\theta - \sin\theta}{2}(\cos\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \alpha \, d\theta \\
&= \alpha\pi
\end{aligned}$$

3. Per $\alpha \neq \beta$ **F** non è conservativo perchè **F** non è irrotazionale. Inoltre, affinchè **F** sia conservativo il lavoro lungo la circonferenza γ deve essere zero; **F** può essere conservativo solo per $\alpha = \beta = 0$. In questo caso ($\alpha = \beta = 0$) bisogna cercare un possibile potenziale di **F** utilizzando uno dei metodi esposti precedentemente. La funzione

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

è un potenziale di **F**.

4. Il campo vettoriale **F** è irrotazionale nel dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ se e solo se $\alpha = \beta$ (la verifica è la medesima del punto 1). Essendo Ω semplicemente connesso, **F** è conservativo. Un potenziale di **F** in Ω è

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \ln\left(x^2 + y^2\right) - \frac{\alpha}{2} \arctan\frac{x}{y}$$