

Elettromagnetismo.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, dicembre 2013.

Indice

1	Elettrostatica	3
1.1	Legge di Coulomb (1785).	3
1.2	Campo elettrico.	4
1.2.1	Campo elettrico generato da una carica puntiforme.	4
1.2.2	Linee di campo elettrico.	4
1.2.3	Campo elettrico generato da un dipolo.	5
1.3	Moto di cariche puntiformi in campi elettrici.	6
1.4	Conduttori ed isolanti.	9
1.4.1	Elettrizzazione statica di conduttori e isolanti.	9
1.5	Polarizzazione elettrica.	10
1.5.1	Polarizzazione per deformazione.	10
1.5.2	Polarizzazione per orientamento.	10
1.6	Conservazione della carica elettrica.	12
1.7	Quantizzazione della carica.	12
1.8	Flusso.	12
1.9	Teorema di Gauss. Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa.	14
1.9.1	Dimostrazione del teorema di Gauss.	14
1.9.2	Campo elettrico generato da un filo rettilineo infinito.	15
1.9.3	Campo elettrico generato da una distribuzione piana infinita di carica.	16
1.9.4	Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica.	17
1.9.5	Campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica	19
1.10	Differenza di potenziale elettrico. Potenziale elettrico.	19
1.10.1	Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme.	20
1.10.2	Potenziale elettrico generato da una superficie sferica carica.	20
1.10.3	Potenziale elettrico per distribuzioni continue di cariche elettriche. Casi importanti.	20
1.11	Capacità di un conduttore.	21
1.12	Condensatori.	21
2	Correnti.	24

2.1	Intensità di corrente.	24
2.1.1	Resistenza.	25
2.2	Legge di Ohm	25
2.2.1	Legge di Ohm generalizzata	26
2.3	Leggi di Kirchhoff.	27
2.4	Resistenze in serie.	28
2.5	Resistenze in parallelo.	29
2.6	Effetto Joule	30
2.7	Potenza elettrica.	30
2.8	Lavoro di estrazione di un elettrone da un metallo	31
2.9	Conduzione elettrica nei liquidi e nei gas	31
3	Magnetismo	33
3.1	Forza magnetica e vettore induzione magnetica.	34
3.2	Esperimento di Ørsted (1820)	35
3.3	Induzione magnetica generata da un filo rettilineo infinito. Legge di Biot-Savart.	36
3.4	Induzione magnetica generata da una spira	37
3.5	Induzione magnetica generata da un solenoide	38
3.6	Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su correnti elettriche	39
3.6.1	Forze agenti tra due fili rettilinei infiniti	40
3.7	Legge di Ampere (1826)	40
3.8	Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici stazionari.	43
4	Fenomeni elettromagnetici dipendenti dal tempo	44
4.1	Legge di Faraday-Neumann (1831)	44
4.2	Legge di Lenz	46
4.3	Autoinduzione	48
4.4	Motori elettrici	49
4.5	Produzione e trasporto di corrente alternata	50
4.6	Corrente di spostamento. Equazioni di Maxwell (1861).	52
5	Onde elettromagnetiche	55
6	Elenco delle attività di laboratorio	57

1 Elettrostatica

1.1 Legge di Coulomb (1785).

Due cariche q_1 , q_2 si attraggono con una forza \mathbf{F} , detta *forza elettrostatica* (freccie blu), diretta lungo la congiungente le due cariche. L'intensità di tale forza è direttamente proporzionale al prodotto dei valori assoluti delle due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

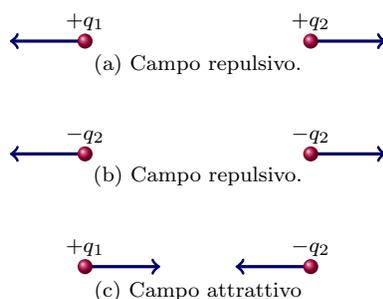


Figura 1: Le forze di Coulomb sono repulsive se le due cariche hanno lo stesso segno, attrattive se hanno segno opposto.

La costante elettrostatica k è di solito espressa nel seguente modo: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, dove ϵ_0 indica la *costante dielettrica del vuoto*². I valori di k e ϵ_0 sono:

$$k = 8.99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$$

La legge di Coulomb per cariche poste nel vuoto assume la forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

Analogie e differenze con la forza di gravitazione universale.

Analogie.

La forza gravitazionale e quella elettrostatica agiscono a distanza (non a contatto). Inoltre entrambe le leggi dipendono dall'inverso del quadrato della distanza ed entrambe coinvolgono una proprietà delle particelle: la massa in un caso, la carica elettrica nell'altro.

Differenze.

- La forza di gravitazione universale è sempre attrattiva, quella elettrostatica è repulsiva quando le cariche hanno lo stesso segno, attrattiva quando le cariche hanno segno opposto.

²Il valore della costante dielettrica nell'aria si discosta molto poco da questo valore.

- La costante che compare nella legge di Newton è una costante *universale* (non dipende dal mezzo in cui le due masse sono immerse), mentre la costante di Coulomb non lo è.

- Il valore della costante di Newton è un numero molto piccolo: $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, mentre la costante di Coulomb, è un numero molto grande: $8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Di conseguenza la forza gravitazionale diventa significativa quando almeno una delle due masse ha dimensioni rilevanti (come nel caso di grossi corpi celesti), mentre quella di Coulomb si manifesta anche tra cariche di piccola entità. Per esempio la forza coulombiana che agisce tra un protone e un elettrone è circa 10^{39} volte maggiore di quella gravitazionale. Per questo motivo la forza di gravità, da cui dipende la struttura dell'universo su vasta scala, non è rilevante nella determinazione della struttura microscopica della materia. Su scala atomica e molecolare, le forze che hanno un ruolo significativo sono quelle di natura elettrica. A esse infatti si possono ricondurre tutti i vari tipi di legame chimico (ionico, covalente, a idrogeno, metallico, ecc.).

Esempio. (Atomo di idrogeno) Nell'atomo di idrogeno la forza gravitazionale che si esercita tra protone ed elettrone vale (nel SI) $F_g \approx 3,6 \cdot 10^{-47}$ mentre la forza elettrostatica vale $F_e \approx 8,5 \cdot 10^{-8}$. Il rapporto tra le due forze è $\frac{F_e}{F_g} = 2,36 \cdot 10^{39}$.

1.2 Campo elettrico.

Se una carica di prova q_0 , posta in un punto P dello spazio, è sottoposta a una forza \mathbf{F} allora il campo elettrico \mathbf{E} nel punto P è

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1.3)$$

Il campo elettrico \mathbf{E} si misura nel SI si misura in Newton al coulomb $\left[\frac{N}{C}\right]$.

1.2.1 Campo elettrico generato da una carica puntiforme.

Si consideri una carica puntiforme q posta nell'origine O di \mathbb{R}^3 . In un punto dello spazio che si trova a distanza r da O il campo elettrico \mathbf{E} ha direzione radiale (quella del vettore $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$), verso 'uscente' se q è positiva, 'entrante' se q è negativa. L'intensità vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (1.4)$$

In forma vettoriale si ha

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.5)$$

1.2.2 Linee di campo elettrico.

Le regole per tracciare correttamente le linee del campo elettrico sono le seguenti

1. Le linee del campo si originano dalle cariche positive e terminano nelle cariche negative (o all'infinito).

2. Le linee del campo che escono o entrano in una carica sono tracciate in modo simmetrico rispetto alla carica stessa.
3. Il numero di linee di campo che escono o entrano in una carica è direttamente proporzionale alla carica.
4. La densità di linee di campo in un intorno di un punto P (= numero di linee di campo per unità di superficie) è direttamente proporzionale all'intensità del campo elettrico in quell'intorno.
5. A grande distanza (distanza 'infinita') di un sistema di cariche le linee di campo sono radiali ed equidistanziate, come se fossero generate da una singola carica puntiforme uguale alla carica totale del sistema.
6. Due linee di campo qualsiasi non possono mai intersecarsi.

1.2.3 Campo elettrico generato da un dipolo.

Un dipolo elettrico è una configurazione formata da due cariche elettriche di segno opposto, $+q$ e $-q$, poste a distanza $2d$ l'una dall'altra (si veda la figura 2). Il segmento che unisce le due cariche si chiama *asse del dipolo*, mentre il suo punto medio è il *centro del dipolo*.

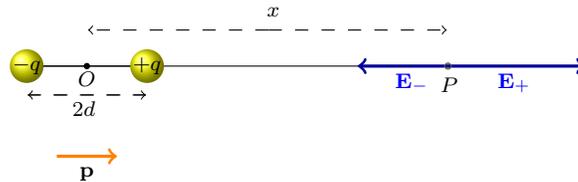


Figura 2: Campi elettrici \mathbf{E}_+ , \mathbf{E}_- nel punto P (allineato con l'asse del dipolo). Il momento \mathbf{p} del dipolo è diretto dalla carica negativa verso quella positiva.

Per determinare il campo elettrico \mathbf{E} nel punto P indicato in figura (2) bisogna calcolare i campi \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- prodotti dalle cariche separate e poi sommarli (principio di sovrapposizione delle cariche elettriche). Si trova

$$\begin{aligned}
 E &= E_+ + E_- \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x-d)^2} - \frac{q}{(x+d)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4dqx}{(x-d)^2(x+d)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Se d è "piccolo", cioè trascurando i termini d^n con $n \geq 2$, dall'ultima uguaglianza si ricava

$$\begin{aligned}
E &= E_+ + E_- \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4dqx}{x^4} \right] \\
&= \frac{dq}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^3} \right]
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Si dimostra (non qui) che in ogni punto P dello spazio il vettore \mathbf{E} è *inversamente proporzionale a r^3* , dove r è la distanza del punto in questione dal centro del dipolo.

Si chiama *momento di dipolo elettrico* il vettore

$$\mathbf{p} = 2q \mathbf{d}$$

dove $2\mathbf{d}$ è il vettore che va dalla carica $-q$ alla carica $+q$ del dipolo.

1.3 Moto di cariche puntiformi in campi elettrici.

Si ponga una carica q in un campo elettrico elettrico \mathbf{E} . Come si è già osservato la forza gravitazionale che agisce sulla carica elettrica è trascurabile rispetto alla forza elettrica $q\mathbf{E}$. Se non sono presenti altre forze la carica ha accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$$

dove m è la massa della carica in esame.

Se per via sperimentale si determina l'accelerazione della carica ed è noto il campo elettrico E , si può determinare il rapporto tra la carica e la massa della carica. J.J. Thomson (1897) studiò la deviazione degli elettroni in un campo elettrico uniforme per dimostrare l'esistenza degli elettroni e per misurare il loro rapporto $\frac{q}{m}$.

Osservazione. Quanto detto sopra è vero solo in parte! Molto spesso la velocità di un elettrone è prossima alla velocità della luce e in questi casi le leggi del moto di Newton devono essere modificate mediante la *teoria della relatività ristretta* di Einstein (1905).

Esempio. (Elettrone in un campo elettrico uniforme con velocità iniziale parallela e concorde con quella di \mathbf{E} .)

Un elettrone viene proiettato con velocità $v_0 = 2 \cdot 10^6$ m/s in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10^3$ N/C. Se \mathbf{E} e \mathbf{v}_0 hanno stessa direzione e verso opposto, quanto spazio percorre l'elettrone prima di fermarsi?

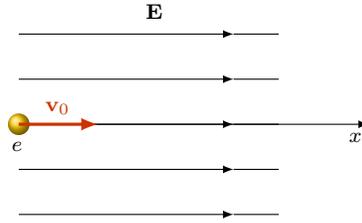


Figura 3: Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme. La velocità iniziale v_0 dell'elettrone ha stessa direzione e verso di \mathbf{E} .

Soluzione.

La forza elettrica che agisce sull'elettrone ha intensità $F = eE$, direzione quella di \mathbf{E} e verso opposto. L'elettrone si muove di moto rettilineo uniformemente decelerato (il verso della sua accelerazione è opposto rispetto a quello della sua velocità iniziale). Si scelga per sistema di riferimento l'asse x indicato in figura; all'istante $t_0 = 0$ l'elettrone si trova nell'origine di tale asse con velocità $v_0 = 2 \cdot 10^6$ m/s.

Per determinare lo spazio percorso dall'elettrone prima di fermarsi si utilizzi l'uguaglianza

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (1.8)$$

che esprime il legame tra velocità e spazio percorso in un moto uniformemente accelerato. Posto $v = 0$ si ottiene:

$$0 = (2 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 - 2 \frac{eE}{m}(x - 0) \quad (1.9)$$

La massa e la carica dell'elettrone sono, nell'ordine, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ Kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Sostituendo tali valori in (1.9) ed esplicitando rispetto a x si ha:

$$x = \frac{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg})(2 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(10^3 \text{ N/C})} = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (1.10)$$

Esempio. (Elettrone in un campo elettrico uniforme con velocità iniziale ortogonale a \mathbf{E} .)

Un elettrone viene proiettato con velocità $v_0 = 10^6$ m/s in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 2 \cdot 10^3$ N/C. Se \mathbf{E} e \mathbf{v}_0 sono perpendicolari, determinare la deviazione subita dall'elettrone dopo che ha percorso la distanza orizzontale di un centimetro.

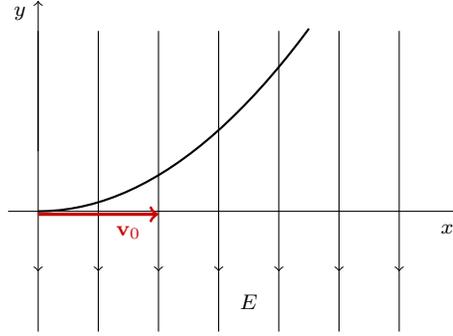


Figura 4: Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme. La velocità iniziale v_0 dell'elettrone è perpendicolare a \mathbf{E} .

Soluzione.

L'elettrone descrive in questo caso un moto piano. Si fissi il sistema di riferimento nel modo indicato in figura; all'istante $t_0 = 0$ l'elettrone si trova nell'origine degli assi con velocità $v_0 = 10^6$ m/s. Allora il tempo che esso impiega per percorrere un tratto di lunghezza 1 cm nella direzione dell'asse x è

$$t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{10^6 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s} \quad (1.11)$$

Durante questo intervallo di tempo l'elettrone viene deviato verso l'alto (direzione verticale) di un tratto

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \quad (1.12)$$

Sostituendo in (1.12) i valori noti di e , m , E , t si trova

$$y = 1,76 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,76 \text{ cm} \quad (1.13)$$

Nella descrizione del moto si è supposto che sull'elettrone agisse la sola forza elettrica \mathbf{F}_e e si è completamente ignorata la forza gravitazionale \mathbf{F}_g . La scelta è del tutto ragionevole in quanto il rapporto tra le due forze è

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg})(9,8 \text{ N/Kg})} = 3,6 \cdot 10^{13}$$

1.4 Conduttori ed isolanti.

Gli elementi della tavola periodica possono essere classificati, secondo la struttura elettronica a “livelli” dei loro atomi, in quattro categorie:

1. *Gas nobili* (*He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn*). Non manifestano alcuna tendenza al legame chimico in quanto hanno l’ultimo livello è caratterizzato da un ottetto completo.
2. *Metalli*. Sono i conduttori. Il loro numero atomico (= numero di elettroni) è tale che gli atomi presentano una notevole tendenza a cedere i pochi elettroni presenti nell’ultimo livello orbitale. Questi elettroni, detti *elettroni di conduzione*, risultano così poco legati ai rispettivi nuclei che la sola agitazione termica è sufficiente a svincolarli. Si devono considerare, a tutti gli effetti, come elettroni “liberi” nell’ambito del metallo, patrimonio comune di tutti gli atomi del conduttore. Essi non hanno sufficiente energia per uscire dal metallo, tuttavia in esso possono muoversi con grande facilità come una sorta di gas libero di muoversi sulla superficie del conduttore.

Queste sostanze sono conduttrici di elettricità.

3. *Non metalli*. Per essi vale il contrario di quanto appena detto; i loro atomi tendono a catturare elettroni, e quindi a ostacolare il libero movimento. Si tratta di sostanze *isolanti*.
4. *Elementi del IV gruppo della tavola periodica* (per esempio, i semiconduttori). Hanno un comportamento intermedio tra i conduttori e gli isolanti. Le particolari proprietà di queste sostanze (quali il silicio e il germanio) sono state di grandissima importanza nei recenti sviluppi dell’elettronica.

1.4.1 Elettrizzazione statica di conduttori e isolanti.

Elettrizzare un oggetto significa alterare la parità numerica delle cariche di ciascun segno presenti nell’oggetto o in una parte dell’oggetto. Un corpo risulta carico positivamente se è in difetto di elettroni mentre risulta carico negativamente se è in eccesso di elettroni (gli elettroni possono essere facilmente ceduti o acquistati mentre i protoni, situati nel nucleo atomico, non possono essere facilmente rimossi).

Elettrizzazione per contatto. Un conduttore metallico può facilmente essere elettrizzato per contatto con un corpo carico, per cui parte della carica del corpo (sia che si tratti di carenza o eccesso di elettroni) si andrà a distribuire su tutta la superficie libera del metallo.

Elettrizzazione per induzione elettrostatica. Se si avvicina un corpo carico a un metallo (senza che vi sia contatto) quest’ultimo si elettrizza. Gli elettroni di conduzione tendono ad concentrarsi *sulla* superficie del metallo dalla parte più vicina o più lontana al corpo carico (a seconda del segno della carica di questo), lasciando scoperte cariche nucleari positive dal lato opposto. Allontanando il corpo carico, in pochissimo tempo, si ristabilisce l’equilibrio elettrico in ogni parte del conduttore.

Elettrizzazione per strofinio.

Si ricordi che negli isolanti (i dielettrici), gli elettroni hanno scarsa capacità di movimento perchè sono fortemente legati ai propri nuclei. Solo mediante forze localizzate molto intense

(per strofinio o scariche elettriche) è possibile che alcuni elettroni vengano strappati dalla loro posizione. Elettrizzare un corpo isolante per strofinio comporta strappargli elettroni mediante, per esempio, lo sfregamento su un panno (in tal caso il corpo si elettrizza positivamente), o cedergli elettroni del panno (in questo caso il corpo si carica negativamente). In ogni caso gli elettroni mancanti (assimilabili a cariche positive) o in eccesso restano concentrati là dove è avvenuto lo sfregamento, cioè la carica elettrica che si viene a realizzare rimane localizzata nei punti dove viene artificialmente realizzata.

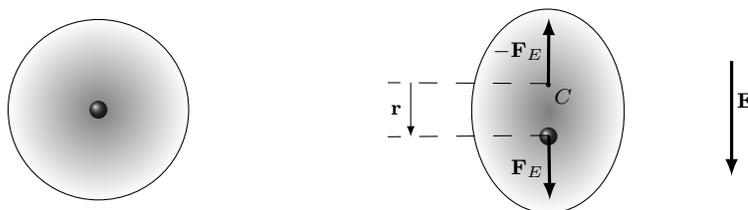
1.5 Polarizzazione elettrica.

1.5.1 Polarizzazione per deformazione.

Si pensi a un atomo (si veda la figura 5 (a)) come a un sistema elettricamente neutro costituito da un nucleo centrale molto piccolo dotato di carica positiva $+Ze$ ($Z =$ numero atomico) circondato da una nube elettronica, a simmetria sferica, avente carica elettrica negativa pari a $-Ze$. I baricentri di carica positiva e di carica negativa coincidono (il nucleo si può considerare puntiforme perchè il suo raggio ha ordine di grandezza di $10^{-5} - 10^{-4}$ rispetto al raggio atomico).

Se posto in un campo elettrico \mathbf{E} , un atomo di questo tipo (detto *non polare*) tende a “deformarsi” (si veda la figura 5, (b)). Nucleo e nuvola elettronica si allontanano sotto l’azione del campo elettrico poichè sul nucleo agisce la forza di intensità $\mathbf{F}_E = +Ze \mathbf{E}$ mentre sulla nuvola elettronica agisce una forza uguale e di segno opposto, $-\mathbf{F}_E = -Ze \mathbf{E}$.³

Una volta che i baricentri di carica si sono distanziati di un tratto \mathbf{r} , parallelo a \mathbf{E} , la carica positiva del nucleo e quella della nuvola cominciano ad attrarsi sotto l’azione della forza elettrostatica (di Coulomb) \mathbf{F} . Il “sistema atomo” raggiunge la situazione di equilibrio quando $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E$.



(a) Nuvola elettronica a simmetria sferica.

(b) Polarizzazione per deformazione.

Figura 5: Un atomo con i baricentri di carica che coincidono (non polare) si deforma sotto l’azione del campo elettrico.

1.5.2 Polarizzazione per orientamento.

Se l’atomo non è a simmetria sferica, esso è assimilabile a un dipolo, ovvero a un sistema costituito da due cariche uguali, di segno opposto, situate a piccola distanza l’una dall’altra. In questo caso l’atomo si dice *polare*. Un atomo di questo tipo, posto in un campo elettrico, tende a ruotare orientando l’asse del dipolo lungo la direzione d’azione della forza coulombiana. Sia nel caso di deformazione che in quello di orientamento, la disposizione molecolare

³Il punto di applicazione di quest’ultima forza è il baricentro di carica negativa C .

del dielettrico si presenta (qualitativamente) come in figura 6: i dipoli tendono a disporsi lungo la direzione della forza esercitata dal corpo inducente, volgendo verso di esso la carica di segno opposto. La superficie del dielettrico più vicina al corpo inducente ha complessivamente carica di segno contrario rispetto a quella del corpo inducente mentre ha carica dello stesso segno sulla sua superficie più lontana.

Ne segue che in un punto interno al dielettrico, una carica di prova q risente meno della forza esercitata dalla carica Q del corpo inducente, in quanto quest'ultima viene in parte neutralizzata dalle cariche di polarizzazione che il dielettrico le contrappone: se F_0 è la forza agente sulla carica di prova in assenza nel vuoto e F la forza agente in presenza del dielettrico, si ha

$$\frac{F_0}{F} = \epsilon_r > 1$$

Il numero ϵ_r si chiama *costante dielettrica relativa al vuoto* del dielettrico mentre il numero $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ si chiama *costante dielettrica assoluta*. La legge di Coulomb, in presenza di un dielettrico assume la seguente forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

L'ultima uguaglianza spiega in che senso la costante della legge di Coulomb dipende dal mezzo interposto.

Ovviamente la deformazione e l'orientamento molecolare sono in generale ostacolati dalle forze di aggregazione tra le molecole le quali, essendo diverse da un dielettrico all'altro, conferiscono ai vari dielettrici una diversa capacità di polarizzarsi. In generale i dielettrici polari hanno una superiore capacità di polarizzazione rispetto agli altri in quanto orientare una molecola è più facile che deformarne la struttura. Quindi i dielettrici polari hanno anche una superiore capacità di attenuare le forze coulombiane; per esempio, la costante dielettrica relativa dell'acqua vale $\epsilon_r \approx 80$ ed è una delle più elevate tra i diversi mezzi. La forza coulombiana tra due cariche poste in acqua è circa 80 volte inferiore a quella che si registrerebbe nel vuoto.

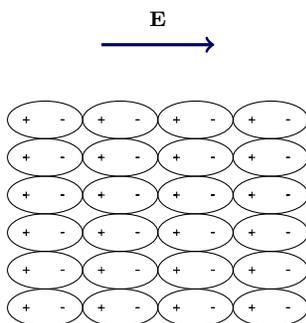


Figura 6: Polarizzazione per orientamento.

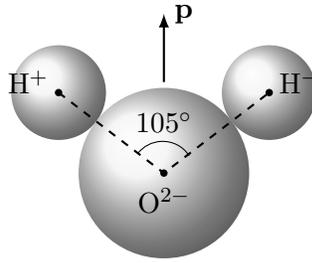


Figura 7: Momento di dipolo elettrico della molecola d'acqua.

1.6 Conservazione della carica elettrica.

Il principio di conservazione della carica elettrica è stato formulato per la prima volta da Benjamin Franklin (1706-1790) ed è valido sia su scala macroscopica che su scala atomica e nucleare. Quando si carica una bacchetta di vetro per strofinio su un panno di lana, si ha un flusso di elettroni dal vetro alla lana. La carica positiva che compare sul vetro è in modulo pari alla carica negativa che compare sulla lana. La conservazione della carica è rispettata anche nei processi nucleari, come i decadimenti radioattivi, e nei processi che coinvolgono le particelle elementari, come l'annichilazione e la produzione di coppie.

1.7 Quantizzazione della carica.

La carica elettrica non è un fluido continuo. Così come i fluidi, per esempio l'acqua, sono costituiti da atomi (e molecole) il "fluido elettrico" è costituito da multipli di una certa carica elementare. Una qualunque carica q si può sempre scrivere nel seguente modo

$$q = n e, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

dove e è detta *unità di carica elementare* e vale

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

Il protone ha carica $+e$, l'elettrone $-e$. Quando una grandezza fisica, come la carica elettrica, assume solo valori discreti si dice che la grandezza è *quantizzata*.

1.8 Flusso.

Esempio. Fluido con densità costante che scorre in una condotta con velocità \mathbf{v} costante.

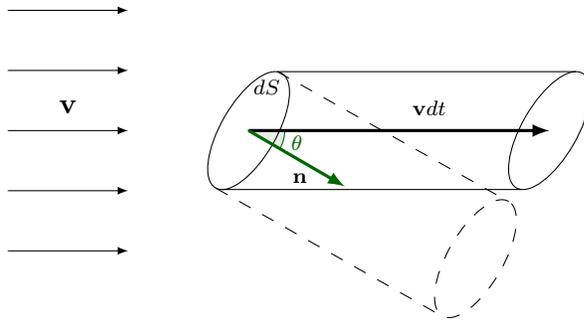


Figura 8: Flusso di un campo di velocità attraverso la superficie infinitesima dS .

Si vuole determinare il volume di fluido che attraversa la sezione dS (un cerchio di centro P e raggio ‘piccolo’) nell’unità di tempo. In un intervallino di tempo dt il fluido che attraversa dS occupa un cilindro avente area di base dS e altezza $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt$, dove \mathbf{n} è la normale unitaria a dS . Quindi, il volume del cilindro è $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt$. Si chiama *flusso di \mathbf{v} attraverso dS* (flusso volumetrico) il volume di fluido che attraversa dS nell’unità di tempo cioè

$$\text{Flusso di } \mathbf{v} \text{ attraverso } dS = d\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Per calcolare il flusso attraverso una superficie finita S bisogna sommare tutti i contributi elementari di flusso, cioè

$$\text{Flusso di } \mathbf{v} \text{ attraverso } S = \Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Definizione 1.1 (Flusso). *Sia \mathbf{F} è un campo vettoriale qualsiasi, si chiama flusso di \mathbf{F} attraverso una superficie (orientata) S (si scrive $\Phi_S(\mathbf{F})$) l’integrale*

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Esempio. (Flusso di un campo elettrico uniforme attraverso una superficie piana.)

Sia \mathbf{E} un campo elettrico costante in ogni punto dello spazio, S una superficie piana e P un punto di S . Indicato con \mathbf{n} il vettore unitario uscente da P e normale alla superficie, il *flusso di \mathbf{E} attraverso S* è la quantità scalare

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} S = E S \cos \vartheta \tag{1.14}$$

dove S è l’area della superficie piana e ϑ è l’angolo formato da \mathbf{n} e S^4 .

Casi particolari.

- S ortogonale a \mathbf{E} . In questo caso

⁴Si ricordi che \mathbf{E} è proporzionale alla “densità” di linee di forza e $S \cos \vartheta$ è la proiezione di S su un piano perpendicolare alla direzione di \mathbf{E} , la relazione precedente fornisce quantitativamente il numero di linee di forza che attraversano S , ovvero “quanto” campo elettrico viene intercettato dalla superficie S .

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = ES$$

- S parallela a \mathbf{E} . In questo caso $\vartheta = 90^\circ$ e quindi il flusso è nullo

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

1.9 Teorema di Gauss. Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa.

Teorema 1.2 (Teorema di Gauss.). *Il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso una qualsiasi superficie (orientata) chiusa S è*

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

dove Q_{int} è la carica complessiva racchiusa da S .

Il teorema di Gauss e la legge di Coulomb appaiono come due leggi indipendenti dell'elettrostatica. In realtà esse sono equivalenti: si tratta cioè della stessa legge formulata in due modi diversi.

1.9.1 Dimostrazione del teorema di Gauss.

Caso di un campo elettrico generato da una singola carica.

Sia q la carica positiva⁵ che genera il campo elettrico e S una superficie chiusa.

Primo caso. S racchiude la carica q .

Si scelga una sfera S_1 avente il centro nel punto in cui è posizionata la carica e tutta racchiusa in S . Si suddivida la sfera in tanti piccoli elementi infinitesimi di area dS ; ogni dS si può con buona approssimazione considerare una 'piccola' superficie piana.

Il campo elettrico in un punto P della sfera risulta perpendicolare all'elemento d'area dS che contiene il punto, pertanto il flusso di \mathbf{E} attraverso dS è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E dS \quad (1.16)$$

Ora, per calcolare il flusso totale attraverso la sfera bisogna sommare tra loro tutti i flussi elementari

$$\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \int E dS \quad (1.17)$$

Nella somma (integrale) di (1.17) l'intensità di E è costante perchè tutti i punti sulla superficie della sfera hanno la medesima distanza dalla carica. Quindi

⁵Nel caso la carica fosse negativa la dimostrazione è analoga e lasciata per esercizio.

$$\begin{aligned}
\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) &= E \int_{S_1} dS \\
&= E 4\pi r^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Infine, essendo S_1 tutta contenuta in S , il flusso di \mathbf{E} attraverso la superficie S è uguale al flusso di \mathbf{E} attraverso S_1

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Secondo caso. S non racchiude la carica q .

Il flusso “entrante” in S è esattamente uguale al flusso “uscente” da S . Quindi

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 0$$

1.9.2 Campo elettrico generato da un filo rettilineo infinito.

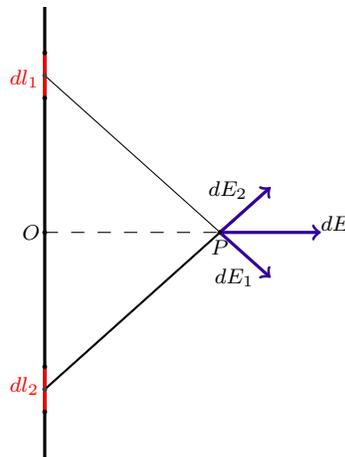


Figura 9: Il campo elettrico generato da un filo infinito è in ogni punto ortogonale al filo.

Si osservi la figura 9. Convien pensare al campo elettrico nel punto P come alla somma di infiniti campi elettrici elementari $d\mathbf{E}$ generati da tratti infinitesimi dl di filo. Ogni campo elementare $d\mathbf{E}$ giace nel piano individuato dal filo e dal punto P , pertanto anche il campo elettrico $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$ in P giace in tale piano.

Inoltre la direzione di \mathbf{E} è perpendicolare al filo. Sia dl_2 l’elemento infinitesimo di filo, simmetrico di dl_1 rispetto ad O . Questi due elementi generano due contributi del campo elettrico, $d\mathbf{E}_2$ e $d\mathbf{E}_1$, le cui componenti parallele al filo sono uguali e opposte. Pertanto $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$ risulta perpendicolare al filo carico.

L'intensità del campo elettrico si può determinare mediante un calcolo diretto dalla definizione di campo, oppure utilizzando il teorema di Gauss. Si ottiene

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

dove λ indica la densità lineare di carica elettrica.

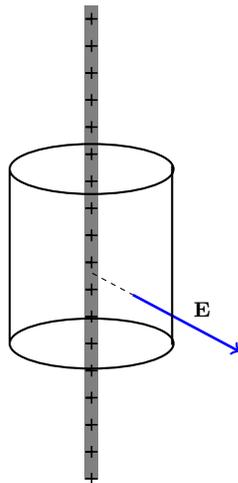


Figura 10: Campo elettrico generato da un filo infinito uniformemente carico.

1.9.3 Campo elettrico generato da una distribuzione piana infinita di carica.

Si vuole determinare il campo elettrico generato da un piano con densità di carica superficiale costante pari a σ . Con riferimento alla figura (11) si consideri un cilindro S avente le generatrici perpendicolari al piano e sezione normale A . Per ragioni di simmetria il campo elettrico \mathbf{E} è ortogonale al piano e pertanto il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo. Il flusso di \mathbf{E} è solo quello attraverso le due basi; si ha

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2 A E$$

Inoltre la carica contenuta in S è σA . Allora, per il teorema di Gauss si ha

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2 A E = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

L'intensità del campo elettrico è dunque

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{1.18}$$

Il campo elettrico \mathbf{E} risulta quindi uniforme, in entrambe le regioni di spazio suddivise dal piano contenente le cariche. Si noti che l'intensità di \mathbf{E} in un punto qualsiasi dello spazio non dipende dalla sua distanza dal piano.

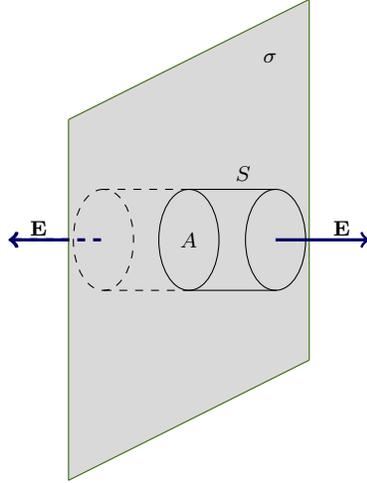


Figura 11: Campo elettrico generato da un piano infinito.

1.9.4 Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica.

Si vuole determinare il campo elettrico all'interno e all'esterno di un guscio sferico di raggio R e carica totale Q .

Primo caso. Sia P un punto esterno alla sfera.

La posizione di P è individuata dal vettore posizione $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ($r > R$) dove O è il centro della sfera. Per questioni di simmetria il campo elettrico deve avere direzione radiale (la direzione di \mathbf{E} è quella del vettore posizione \mathbf{r}) e modulo che dipende solo da r . Inoltre, il verso è 'uscente' se la carica distribuita sulla superficie sferica è positiva, 'entrante' se negativa.

Per determinare l'intensità del campo si consideri la sfera S di centro O e raggio r e si suddivida la sfera in tanti piccoli elementi di area dS . Il flusso elementare uscente da ogni dS è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E dS$$

Sommando tutti i flussi elementari si ottiene il flusso totale attraverso la sfera S

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E 4\pi r^2$$

Essendo Q la carica totale racchiusa all'interno di S , dal teorema di Gauss si ottiene

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Quindi

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Secondo caso. Sia P un punto interno alla sfera.

Sia $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ il vettore posizione di P e S una sfera di centro O e raggio r , con $r < R$. Il flusso totale uscente da S è, anche in questo caso,

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E 4\pi r^2$$

Dal teorema di Gauss si ricava

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

perchè la carica totale racchiusa all'interno di S è nulla. Pertanto

$$E = 0$$

Riassumendo, il campo elettrico \mathbf{E} generato da una quantità di carica Q (positiva) uniformemente distribuita sul guscio sferico di centro O e raggio R ha in ogni punto P esterno alla sfera

1. direzione quella di $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$;
2. verso uscente se la carica distribuita uniformemente sulla superficie sferica è positiva, entrante se negativa.
3. intensità pari a

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{1.19}$$

All'interno della sfera il campo elettrico è nullo, $\mathbf{E} = 0$.

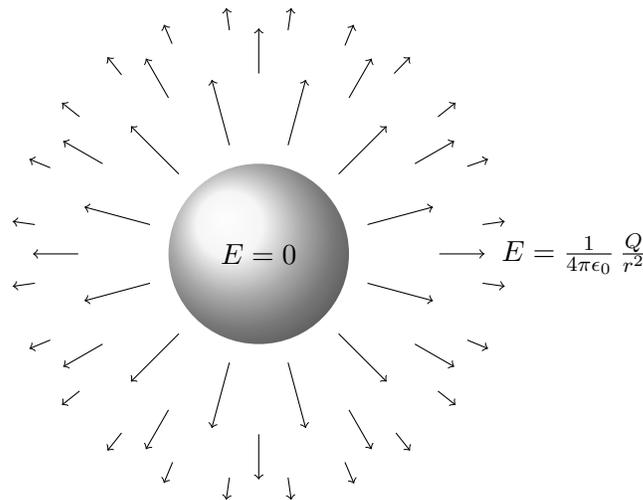


Figura 12: Campo elettrico generato da una carica totale Q (positiva) uniformemente distribuita su un guscio sferico. Il campo elettrico è repulsivo. Nei punti interni alla sfera \mathbf{E} è nullo.

1.9.5 Campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica

Sia Q è la carica totale uniformemente distribuita in tutto il volume della sfera di raggio R . Il vettore posizione di un punto P esterno alla sfera è $\mathbf{r} = \overline{OP}$, con $r > R$. In questo caso l'intensità del campo elettrico è

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.20)$$

Si può pensare l'intera carica concentrata nel centro O della sfera, infatti nei punti esterni alla sfera il campo \mathbf{E} coincide con quello generato da una carica puntiforme Q posta in O .

Se invece si trova a distanza r dal centro della sfera, con $r < R$ l'intensità del campo elettrico vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \quad (1.21)$$

1.10 Differenza di potenziale elettrico. Potenziale elettrico.

Una carica di prova q_0 soggetta all'azione del campo di forze

$$\mathbf{F}_{el} = q_0 \mathbf{E}$$

viene spostata dal punto iniziale O al punto finale P lungo un certo cammino orientato γ . Il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F}_{el} dipende esclusivamente dal punto iniziale O e dal punto finale P (non dipende da γ) perchè la forza elettrostatica è conservativa.

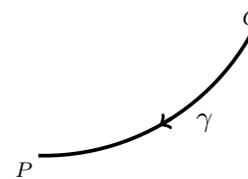


Figura 13

A essa è pertanto associata un'energia potenziale.

Definizione 1.3 (Variazione di energia potenziale elettrostatica). *Si chiama variazione di energia potenziale elettrostatica ΔU l'opposto del lavoro compiuto da $\mathbf{F}_{el} = q_0 \mathbf{E}$ per spostare la carica q_0 da O a P lungo un qualsiasi cammino orientato che connette i due punti, cioè*

$$\Delta U = U_P - U_O = -L_\gamma(\mathbf{F}_{el}) = - \int_O^P q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.22)$$

La variazione di energia elettrostatica è direttamente proporzionale alla carica di prova q_0 .

Definizione 1.4 (Differenza di potenziale elettrico). *La differenza di potenziale elettrico $\Delta V = V_P - V_O$ è l'opposto del lavoro riferito all'unità di carica compiuto dal campo elettrostatico \mathbf{F}_{el} su una carica di prova q_0 (positiva) per spostarla dal punto O al punto P , cioè*

$$\Delta V = V_P - V_O = \frac{-L_\gamma(\mathbf{F}_{el})}{q_0} = - \int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.23)$$

Se il punto O è un punto di riferimento preventivamente fissato ed è noto il valore V_O la funzione

$$V_P = \frac{-L_\gamma(\mathbf{F}_{el})}{q_0} + V_O = - \int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + V_O \quad (1.24)$$

si chiama *potenziale elettrico*. Di solito si assume il punto O all'infinito e $V_O = 0$. Con questa convenzione il potenziale elettrico in P è

$$V = - \int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.25)$$

Quindi *il potenziale elettrico V nel punto P è l'opposto del lavoro riferito all'unità di carica compiuto dal campo elettrostatico \mathbf{F}_{el} su una carica di prova q_0 (positiva) per spostarla dall'infinito al punto P .*

L'energia potenziale elettrostatica è un lavoro e pertanto si misura in Joule, mentre il potenziale elettrico si misura in Volt (simbolo V):

$$1\text{V} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}}$$

1.10.1 Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme.

Sia E il campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme q posta nell'origine di \mathbb{R}^3 . Allora il potenziale elettrico in P è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

dove r è la distanza di P dall'origine (e $V_0 = 0$ in $r = \infty$).

1.10.2 Potenziale elettrico generato da una superficie sferica carica.

Sia Q la quantità di carica uniformemente distribuita su una superficie sferica di raggio R . Il potenziale elettrico nel punto P che si trova a distanza r dal centro della sfera è

$$V = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

Si noti che all'interno della superficie sferica il potenziale è costante e vale $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ (non è zero sebbene il campo elettrico lo sia).

1.10.3 Potenziale elettrico per distribuzioni continue di cariche elettriche. Casi importanti.

1. Potenziale elettrico sull'asse di un anello carico.
2. Potenziale elettrico sull'asse di un disco uniformemente carico.

3. Potenziale elettrico in prossimità di una distribuzione lineare definita di carica.
4. Potenziale elettrico in prossimità di una distribuzione piana indefinita di carica.

[Da scrivere.]

1.11 Capacità di un conduttore.

La capacità elettrica di un conduttore misura la “capacità” del conduttore di accumulare carica elettrica per una data differenza di potenziale.

Se si carica un conduttore isolato e lontano da altri conduttori, si verifica sperimentalmente che il potenziale che esso assume è direttamente proporzionale alla carica conferitagli. Quindi il rapporto tra carica Q e potenziale V si mantiene costante e pertanto rappresenta una caratteristica intrinseca del conduttore (dipende solo dalla sua geometria e dimensione). Il rapporto

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1.26)$$

si chiama *capacità del conduttore*.

Nel S.I. la capacità si misura in **farad** (simbolo F), dal nome del fisico sperimentale Michael Faraday.

$$1\text{F} = \frac{1\text{Coulomb}}{1\text{Volt}} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

Un Farad è un’unità enorme (un conduttore sferico, per avere la capacità di 1F dovrebbe avere un raggio pari a circa 1500 raggi terrestri!). Per tale motivo è frequente utilizzare alcuni suoi sottomultipli, il nanofarad, $1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$ e il picofarad $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$

Conoscere la capacità di un conduttore significa sapere quanta carica è accumulabile su di esso senza dover utilizzare un potenziale troppo elevato (cosa che comporta molti problemi pratici di isolamento). Per ottenere una capacità maggiore di quella di un conduttore, che generalmente è molto piccola, si utilizzano i *condensatori*.

1.12 Condensatori.

Un *condensatore* è un dispositivo utile per accumulare o immagazzinare carica elettrica ed energia elettrostatica. Un *condensatore piano* è formato da due armature metalliche piane e parallele, le armature sono supposte molto grandi in modo da poter trascurare gli “effetti di bordo” mentre la distanza tra le armature è molto piccola. Quando il condensatore viene *caricato*, per esempio collegando le due armature con i poli di una batteria, si ha un trasferimento di carica elettrica da un conduttore piano all’altro finché la loro differenza di potenziale non eguaglia quella tra i poli della batteria. Una volta raggiunta questo stato la carica complessiva su un’armatura è uguale e opposta a quella distribuita sull’altra.

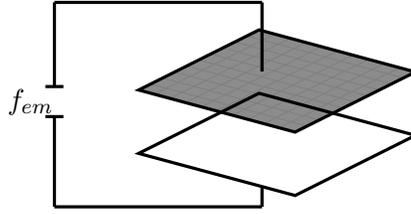


Figura 14: Condensatore.

Campo elettrico in un condensatore piano.

Sia A l'area di ciascuna delle due armature, d la distanza che le separa e ΔV la loro differenza di potenziale. Se inoltre $+Q$ e $-Q$ sono le cariche complessive uniformemente distribuite sulle due armature, la densità superficiale di carica su entrambe le armature è $\sigma = \frac{Q}{A}$.

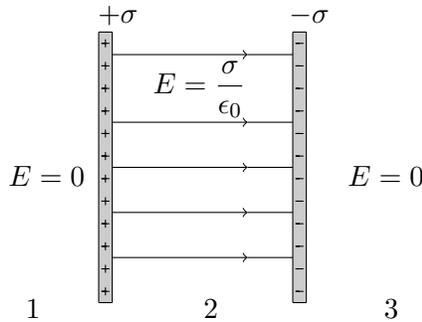


Figura 15: Campo elettrico in un condensatore piano.

Per determinare il campo elettrico del condensatore conviene considerare separatamente i valori dei campi elettrici generati dai due conduttori. Con riferimento alla figura (15) nelle regioni 1 e 3 il campo elettrico totale è nullo. Infatti le due armature danno luogo a campi elettrici aventi direzioni perpendicolari alle armature stesse ma verso opposto. Invece nella regione 2, si indichi con E_+ il campo generato dalla distribuzione $+\sigma$ e con E_- quello dovuto alla distribuzione $-\sigma$ si ha:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Capacità di un condensatore.

Sperimentalmente si verifica che il rapporto tra Q e la differenza di potenziale ΔV non dipende da A né da d né da ΔV , cioè il rapporto

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

è costante e definisce la *capacità del condensatore*.

Infine, indicata con $\sigma = \frac{Q}{A}$ la densità superficiale di carica sulle armature si ottiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}d}$$

cioè

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

La capacità C è dunque una caratteristica intrinseca del condensatore che dipende solo dalla sua geometria.

2 Correnti.

In elettrostatica si considerano soltanto cariche a riposo mentre in questa sezione si vuole affrontare lo studio di correnti elettriche, cioè di cariche in movimento. Per esempio, in un filo di rame *isolato* gli elettroni liberi, cioè gli *elettroni di conduzione*, si muovono in modo casuale con velocità di 10^6 m/s; in un secondo una qualsiasi sezione del filo viene attraversata da molti miliardi di elettroni di conduzione, essi però si muovono in entrambi i versi di percorrenza del filo in modo tale che il trasporto netto di carica risulta nullo; in questa situazione non c'è corrente.

Un *generatore* di corrente (per esempio una pila o una batteria) è un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale ΔV costante per un intervallo di tempo apprezzabile. Si chiama *forza elettromotrice* f_{em} la differenza di potenziale elettrico tra i suoi poli

$$f_{em} = \Delta V$$

Ora, se gli estremi del filo di rame vengono collegati ai due poli di un generatore, nel filo si ha passaggio di *corrente*. In altri termini la batteria influenza il flusso di elettroni nel filo in modo tale che il trasporto netto di carica attraverso una sua qualsiasi sezione risulta diverso da zero.

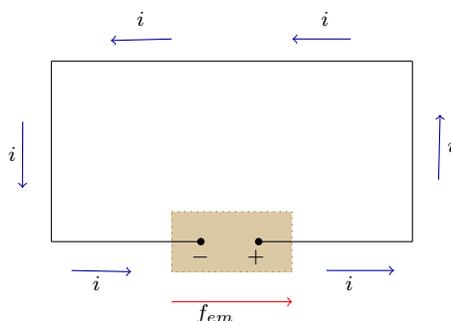


Figura 16: Verso della corrente lungo il circuito (filo di rame) e all'interno della batteria.

Ovviamente un generatore, per mantenere una differenza di potenziale costante ai suoi due poli deve compiere lavoro. Il lavoro compiuto da una batteria di forza elettromotrice f_{em} per trasferire una carica ΔQ da uno dei suoi poli all'altro è

$$W = \Delta Q f_{em} \tag{2.1}$$

2.1 Intensità di corrente.

La grandezza fisica che caratterizza meglio la corrente è l'*intensità di corrente*

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{2.2}$$

Nel SI l'intensità di corrente si misura in *Ampere* (simbolo A), un ampere è un Coulomb al secondo

$$1 A = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ secondo}} = \frac{1 C}{1 s}$$

Quando in un circuito l'intensità di corrente risulta costante si parla di *correnti continue*.

Verso della corrente.

Si pensi ancora a un circuito formato da una batteria e da un filo di rame (si veda la figura 16).

Il verso della corrente nel circuito (filo) è, per convenzione, quello che va dal polo positivo (a potenziale maggiore) a quello negativo (a potenziale minore). In altre parole il verso della corrente coincide con il verso in cui si muoverebbe una carica di prova positiva posta nel filo.

All'interno del generatore la situazione è diversa: a circuito chiuso le reazioni chimiche che avvengono al suo interno provocano un flusso netto di portatori di carica positivi dal polo negativo al polo positivo.

2.1.1 Resistenza.

Applicando la stessa differenza di potenziale alle estremità di un bacchetta di ferro e a una di legno si generano correnti molto diverse. Ciò è dovuto a una caratteristica del conduttore detta *resistenza*. Per determinare la resistenza R tra due punti di un conduttore si stabilisce una determinata differenza di potenziale tra i due punti e poi si misura la corrente i che si genera

$$R = \frac{V}{i}$$

Nel SI la resistenza si misura in *ohm* (simbolo Ω)

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampere}} = \frac{1V}{1A}$$

Essendo $i = \frac{V}{R}$ più è grande la resistenza, più è piccola la corrente.

2.2 Legge di Ohm

Prima legge di Ohm. In molti conduttori, (ma non in tutti) la resistenza, a una ben determinata temperatura, è indipendente dal valore e dalla polarità della differenza di potenziale applicata.

Più precisamente, in conduttori di questo tipo risulta costante il rapporto tra la differenza di potenziale applicata a due diverse sezioni del conduttore e la corrente i che scorre tra di esse; quindi

$$R = \frac{\Delta V}{i} = \text{costante} \quad (2.3)$$

qualunque sia la differenza di potenziale ΔV applicata alle due sezioni del conduttore.

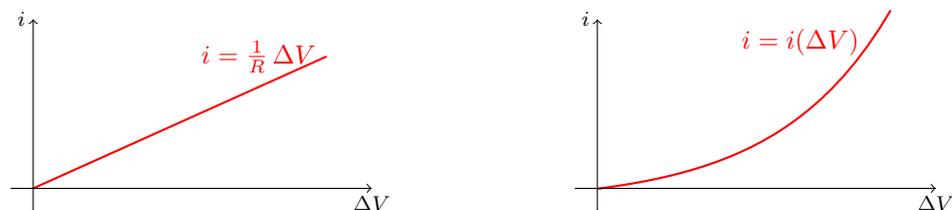


Figura 17: In un conduttore ohmico tra i e ΔV esiste una proporzionalità diretta (a), mentre in un conduttore non ohmico le due grandezze variano in modo non lineare (b).

L'uguaglianza

$$\Delta V = R i \quad (2.4)$$

valida per ogni ΔV , si chiama *prima legge di Ohm*. Un conduttore per cui vale (2.4), qualunque sia ΔV , si dice *conduttore ohmico*.

2.2.1 Legge di Ohm generalizzata

Si consideri un circuito come quello rappresentato in figura (il filo del circuito è un conduttore ohmico, per esempio un filo di rame)

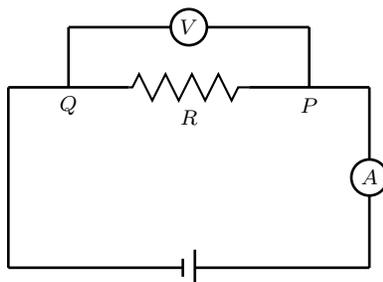


Figura 18: L'amperometro A (misuratore di intensità di corrente) è collegato in serie, mentre il voltmetro (misuratore di differenza di potenziale) in parallelo.

La differenza di potenziale ΔV tra i punti P e Q del circuito è uguale al prodotto della resistenza R per la corrente che lo attraversa $\Delta V = R i$ (legge di Ohm). A circuito chiuso, se si vuole determinare la differenza di potenziale ΔV tra i punti P e Q bisogna tener conto della “caduta di potenziale” dovuta al passaggio della corrente all'interno del generatore, cioè

$$\Delta V = f_{em} - r i \quad (2.5)$$

dove r è la resistenza interna del generatore. Si ricava:

$$f_{em} = (R + r) i \quad (2.6)$$

detta *legge di Ohm generalizzata*.

Si osservi che a circuito chiuso la forza elettromotrice è maggiore della differenza di potenziale misurata tra i punti P e Q del circuito ($f_{em} > \Delta V$).

Seconda legge di Ohm. La seconda legge di Ohm chiarisce in quale modo la resistenza dipende dalle caratteristiche del conduttore. Se esso è supposto cilindrico, di sezione S e lunghezza L , si ha

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (2.7)$$

dove ρ dipende dal materiale di cui è fatto il conduttore e dalla sua temperatura.

2.3 Leggi di Kirchhoff.

Definizione 2.1 (Nodo di un circuito.). *Si chiama nodo di un circuito il punto in cui confluiscono più conduttori.*

Definizione 2.2 (Maglia di un circuito.). *Si chiama maglia di un circuito un qualsiasi "percorso chiuso" individuabile nel circuito.*

Prima legge di Kirchhoff (legge dei nodi). Sia P un nodo di un circuito. Se si attribuisce un verso alle correnti che confluiscono in P , per esempio, segno $+$ alle correnti uscenti e segno $-$ a quelle entranti, allora la somma algebrica di tutte le correnti che confluiscono nel nodo P è nulla.

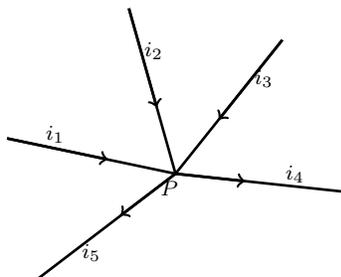


Figura 19: Nel nodo P confluiscono sei correnti: la somma delle correnti entranti $i_1 + i_2 + i_3$ uguaglia la somma di quelle uscenti i_4, i_5 .

Dette i_1, i_2, \dots, i_n tutte le correnti che confluiscono in un nodo qualsiasi di un circuito

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0 \quad (2.8)$$

Seconda legge di Kirchhoff (legge delle maglie). In ogni maglia, indipendentemente dal verso di percorrenza della corrente, la somma algebrica delle forze elettromotrici è uguale alla somma delle cadute di potenziale $R_j i_j$

$$\sum_j f_j = \sum_j R_j i_j \quad (2.9)$$

[Scrivere meglio]

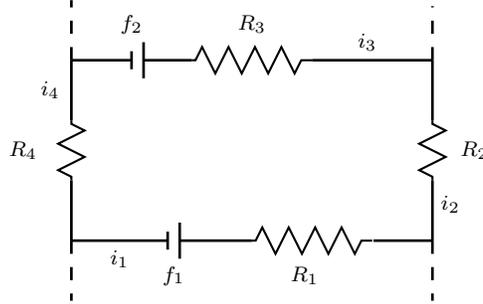


Figura 20: Ogni ramo della maglia possiede una sua resistenza ed è percorso da correnti diverse.

Per esempio in una maglia come quella rappresentata in figura la somma delle forze elettromotrici $f_1 + f_2$ è uguale alla somma delle cadute di potenziale dovute alla presenza delle quattro resistenze

$$f_1 + f_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \quad (2.10)$$

2.4 Resistenze in serie.

Se conduttori diversi sono connessi tra loro secondo lo schema rappresentato in figura si dice che sono collegati in *in serie*.

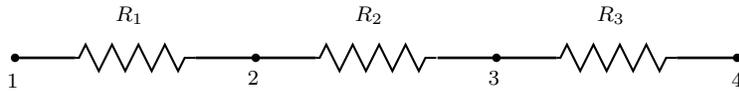


Figura 21: Resistenze in serie.

Per determinare la resistenza totale del sistema di conduttori, si procede nel seguente modo: prima si applica la legge di Ohm a ciascuna resistenza

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= R_1 i \\ V_2 - V_3 &= R_2 i \\ V_3 - V_4 &= R_3 i \end{aligned} \quad (2.11)$$

e poi si sommano termine a termine le uguaglianze (2.11). Si ottiene così la differenza di potenziale agli estremi 1 e 4 del sistema di conduttori

$$V_1 - V_4 = (R_1 + R_2 + R_3) i$$

Più in generale, la differenza di potenziale ΔV alle estremità di n conduttori collegati in serie, rispettivamente di resistenze R_1, R_2, \dots, R_n è

$$\Delta V = V_1 - V_{n+1} = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i$$

La resistenza totale R del sistema di conduttori

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.12)$$

si chiama *resistenza equivalente*.

2.5 Resistenze in parallelo.

Se conduttori diversi sono collegati tra loro secondo lo schema rappresentato in figura si dice che sono collegati in *in parallelo*.

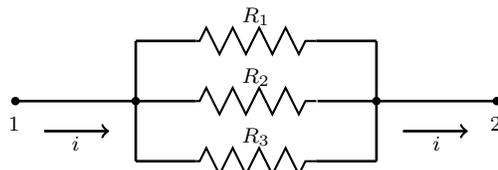


Figura 22: Resistenze in parallelo.

In questo caso, alle estremità 1 e 2 di ogni conduttore la differenza di potenziale è la stessa; pertanto, per ogni conduttore si ha

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_2}{R_1} &= i_1 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_2} &= i_2 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_3} &= i_3 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Infine, sommando termine a termine si ottiene

$$(V_1 - V_2) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = i_1 + i_2 + i_3 = i \tag{2.14}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} i \tag{2.15}$$

Quindi l'inverso della resistenza equivalente del sistema è

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \tag{2.16}$$

Osservazione. Collegando in serie un numero sempre maggiore di conduttori la resistenza equivalente aumenta, mentre collegandoli in parallelo diminuisce. Questo fatto si può giustificare in modo euristico utilizzando l'uguaglianza $R = \rho \frac{L}{S}$ introdotta precedentemente. Mettere in serie più resistenze equivale ad aumentare la lunghezza del conduttore e quindi aumenta la resistenza complessiva, mentre metterle in parallelo equivale ad aumentare la sezione del conduttore e pertanto la resistenza equivalente diminuisce.

2.6 Effetto Joule

In un conduttore metallico (per esempio un filo di un circuito) quando una carica dQ passa da un punto a potenziale più alto V_1 ad uno a potenziale più basso V_2 il campo elettrostatico compie un lavoro pari a

$$dL = dQ(V_1 - V_2) \quad (2.17)$$

Se il trasporto di carica dQ avviene nell'intervallo di tempo dt , si ha $dQ = i dt$ e l'uguaglianza (2.17) assume la forma

$$dL = i(V_1 - V_2) dt \quad (2.18)$$

Se infine il conduttore è ohmico (come in questo caso) vale la legge di Ohm ($\Delta V = Ri$) e il lavoro compiuto dal campo elettrico si può esprimere così

$$dL = i^2 R dt \quad (2.19)$$

L'energia spesa dal campo elettrico per spostare la carica dQ si trasforma tutta in calore (non può trasformarsi in energia cinetica o potenziale perchè il moto della carica è stazionario). Questo fenomeno si chiama *effetto Joule*. In termini microscopici l'effetto Joule si può qualitativamente giustificare così: al passaggio di corrente nel conduttore i continui urti degli elettroni di conduzione con gli atomi del reticolo cristallino fanno aumentare il loro moto di agitazione disordinato. Ciò provoca un aumento dell'energia termica del conduttore che si riscalda.

2.7 Potenza elettrica.

La potenza elettrica P è il lavoro compiuto dal campo elettrico nell'unità di tempo

$$P = \frac{dL}{dt} \quad (2.20)$$

Dalle uguaglianze (2.18) e (2.19) si ricava la potenza sviluppata dal campo elettrico nelle forme seguenti

$$\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} \\ &= i(V_1 - V_2) \\ &= i^2 R \end{aligned} \quad (2.21)$$

La potenza elettrica si misura in **Watt** (simbolo W)

$$1 W = 1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ Volt} = 1 A \cdot 1 V$$

2.8 Lavoro di estrazione di un elettrone da un metallo

Come si è più volte detto nei paragrafi precedenti gli elettroni di conduzione in un conduttore metallico sono assimilabili a un gas che non può lasciare il metallo: le forze coulombiane esercitate dagli atomi vicini gli impediscono di allontanarsi dalla superficie del metallo. Se \mathcal{E}_e è l'energia posseduta dall'elettrone e \mathcal{E}_∞ l'energia che possiederebbe a distanza infinita dalla superficie del conduttore, deve necessariamente essere $\mathcal{E}_e < \mathcal{E}_\infty$.

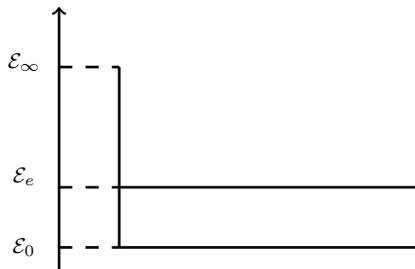


Figura 23: L'elettrone si trova in una buca di potenziale. Per estrarlo dal metallo occorre fornirgli energia.

Quindi per “strappare” un elettrone al metallo occorre fornirgli energia pari a:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_e$$

2.9 Conduzione elettrica nei liquidi e nei gas

La conducibilità elettrica di liquidi e gas varia a seconda della quantità di ioni presenti al loro interno.

Conducibilità nei liquidi.

Oli e paraffina sono ottimi isolanti perchè non presentano alcuna dissociazione ionica; anche l'acqua distillata è un buon isolante, perchè sono poche le molecole al suo interno che si dissociano in ioni H^+ e OH^- . Tuttavia se in acqua si discioglie un acido, una base o un sale (sostanze dette *elettroliti*) la sua conducibilità cambia notevolmente. Infatti la molecola di soluto, sciogliendosi, assorbe calore; i legami (di tipo coulombiano) che tengono uniti gli ioni si indeboliscono a tal punto che gli urti dovuti alla sola agitazione termica sono sufficienti a scindere la molecola in ioni. Il numero di “portatori di carica” presenti nella soluzione aumenta notevolmente.

Se in questa situazione si introducono all'interno della soluzione due *elettrodi* collegati ai poli di un generatore si verifica una migrazione degli ioni verso gli elettrodi di segno opposto.

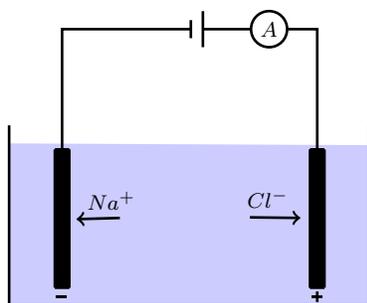


Figura 24: Il cloruro di sodio disciolto in acqua si scinde in ioni Na^+ che si dirigono verso il catodo e in ioni Cl^- che si dirigono verso l'anodo.

Gli ioni positivi si dirigono verso il catodo (polo negativo) e gli ioni negativi verso l'anodo (polo positivo). Una volta raggiunti i poli gli ioni acquistano o perdono gli elettroni necessari per neutralizzarsi e poi abbandonano la soluzione (si depositano sugli elettrodi o si liberano sotto forma di gas). Il prelievo e la cessione di elettroni agli elettrodi determina il passaggio di corrente nel circuito esterno alla soluzione (cosa che può essere verificata mediante l'amperometro inserito nel circuito).

Il fenomeno della conduzione elettrica in soluzioni elettrolitiche si chiama *elettrolisi* e la cella in cui si realizza l'elettrolisi è detta *voltmetro* (da non confondere con il voltmetro che misura differenze di potenziale).

Osservazioni.

1. Nei metalli il passaggio di corrente è dovuto al moto ordinato di elettroni di conduzione che posseggono masse talmente piccole da poter sostanzialmente affermare che il trasporto di carica avviene senza trasporto di materia. Negli elettroliti invece la corrente è dovuta al movimento di molecole o atomi ionizzati che hanno masse alcune migliaia di volte più grandi rispetto a quelli degli elettroni.
2. La velocità di deriva degli ioni è molto minore di quella degli elettroni di conduzione. Per esempio, a parità di campo elettrico la velocità di deriva degli elettroni liberi in un filo di rame è più di mille volte maggiore rispetto a quella degli ioni H^+ in acqua.
3. Si può verificare sperimentalmente che in una soluzione elettrolitica vale la legge di Ohm.

Conducibilità nei gas.

In linea di principio le molecole dei gas sono elettricamente neutre e di conseguenza i gas risultano essere ottimi isolanti. Tuttavia accade spesso che un gas sia parzialmente ionizzato dall'azione di agenti esterni che, colpendo le sue molecole, riescono a "strappargli" un elettrone. Si produce così uno ione positivo e un elettrone: l'elettrone a sua volta può muoversi liberamente nel gas o venir catturato da un'altra molecola che si trasforma così in ione negativo. Comunque avvenga il processo di ionizzazione, esso genera una coppia di portatori di carica di segno opposto che causa il passaggio di corrente nel gas.

Si tenga presente che in un gas, come in ogni altro mezzo, la conducibilità elettrica dipende dal numero di portatori di carica presenti e dalla loro mobilità; i fenomeni che dipendono dalla conducibilità elettrica di un gas sono molti, e di natura complessa.

3 Magnetismo

Alcuni minerali come ad esempio la magnetite (Fe_3O_4) sono capaci di attrarre piccoli oggetti di ferro. Le calamite di uso più comune sono fatte di questi materiali e le forze che esercitano su sostanze ferrose si chiamano *forze elettromagnetiche*. Le sorgenti di tali forze sono localizzate nelle estremità della calamita, i *poli magnetici*, a loro volta distinti in *polo sud* e *polo nord*. Il motivo di questa denominazione sta nel fatto che la Terra si comporta come una grande calamita i cui poli coincidono sostanzialmente con i poli geografici.

In un ago magnetico si chiama polo nord quello che si orienta in direzione del polo nord terrestre e polo sud quello che si orienta in direzione del polo sud terrestre. Con questa convenzione al polo nord geografico della terra è associato un polo sud magnetico e viceversa.

Le calamite, oltre alla proprietà di attrarre alcune sostanze, esercitano l'una sull'altra forze attrattive o repulsive a seconda della disposizione dei loro poli.

L'esistenza di forze magnetiche giustifica l'introduzione di un nuovo campo vettoriale: il campo magnetico, di solito indicato con \mathbf{B} . Campo elettrostatico e campo magnetico si comportano in modo diverso e ciò è dovuto principalmente al fatto che mentre in un campo elettrico è possibile considerare cariche elettriche positive separate da quelle negative, in un campo magnetico non è possibile isolare un singolo polo. Se ad esempio si spezza una barretta magnetica si ottengono due barrette più piccole ciascuna delle quali possiede un polo nord e un polo sud magnetico. Il campo generato da una calamita è simile a quello generato da un dipolo elettrico: le sue linee di forza sono linee chiuse e pertanto il flusso uscente da una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo.

L'esistenza di un campo magnetico in un determinato punto dello spazio può essere verificata in modo semplice utilizzando una bussola: se nelle vicinanze di quel punto non vi sono magneti o correnti l'ago si posiziona lungo la direzione indicante il polo nord terrestre (polo sud magnetico), altrimenti l'ago ruota fino a orientarsi secondo la risultante del campo magnetico terrestre e dei campi magnetici generati da altri magneti e correnti. In ogni caso l'ago magnetico della bussola si dispone sempre lungo la tangente alla linea di forza del campo magnetico che passa per quel punto.

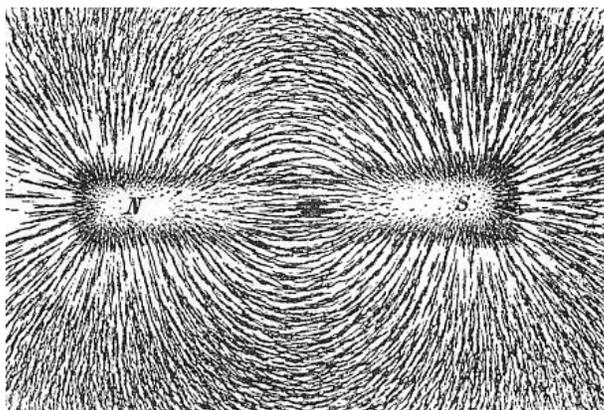


Figura 25: Linee di campo magnetico generate da un magnete.

3.1 Forza magnetica e vettore induzione magnetica.

La legge di Coulomb è la legge fondamentale dell'elettrostatica. Due cariche ferme q_1 e q_2 sono soggette all'azione di forze dovute al fatto che ognuna delle due cariche è immersa nel campo magnetico generato dall'altra. Su ognuna delle due cariche agisce una forza elettrostatica F_e direttamente proporzionale al prodotto di q_1 per q_2 e inversamente proporzionale al quadrato r^2 della loro distanza

$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

La direzione di \mathbf{F}_e è quella della retta congiungente q_1 e q_2 mentre il verso dipende dal segno delle due cariche. La legge di Coulomb è valida quando le cariche sono *ferme*.

Che cosa succede se le cariche si muovono? Per quanto possa sembrare sorprendente, compare una nuova forza. Si consideri ad esempio il caso di una carica (positiva) q che si muove con velocità \mathbf{v} nelle vicinanze di un filo di rame percorso da corrente (figura 26).

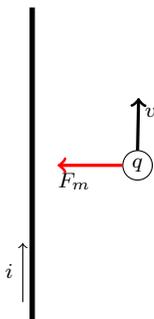


Figura 26: Un filo di rame percorso da corrente genera un campo magnetico. La carica q (positiva), posta vicino al filo, possiede velocità \mathbf{v} .

Se la carica totale sul filo è nulla allora è nullo anche il campo elettrico agente su q e di conseguenza, secondo la legge di Coulomb, sulla carica q non dovrebbe agire alcuna forza. Questa previsione è smantata da semplici osservazioni sperimentali. La carica q risente infatti di una nuova forza F_m detta *forza magnetica* che è direttamente proporzionale alla corrente i che scorre nel filo e alla velocità della carica stessa. Più precisamente si ha

$$F_m \propto \frac{q v i}{r}$$

dove r è la distanza della carica dal filo.

In generale la forza \mathbf{F} agente su una carica q è la risultante di due forze

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

dove \mathbf{F}_e è la forza coulombiana dipendente dalla posizione in cui si trova la carica e dalla presenza in quel punto di un eventuale campo elettrico mentre \mathbf{F}_m è la forza magnetica dipendente dalla velocità della carica e dalla presenza in quel punto di un eventuale campo magnetico.

Più in generale, per quanto riguarda la forza magnetica, si osserva sperimentalmente quanto segue

se q è una carica elettrica che si muove in un campo magnetico con velocità \mathbf{v} e se tale carica non è influenzata da altri campi vettoriali (per esempio di natura elettrica o meccanica) allora su di essa agisce una forza \mathbf{F}_m con le seguenti proprietà

1. la componente di \mathbf{F}_m nella direzione di \mathbf{v} è sempre nulla;
2. la componente di \mathbf{F}_m risulta massima lungo una ben determinata direzione perpendicolare a \mathbf{v} ;
3. l'intensità di \mathbf{F}_m è proporzionale alla carica q e al modulo della velocità \mathbf{v} .

Queste osservazioni sperimentali giustificano la seguente definizione

Definizione 3.1. *Se q è una carica in moto con velocità \mathbf{v} si chiama vettore induzione magnetica \mathbf{B} il vettore per il quale risulta*

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.1)$$

L'unità di misura nel S.I. del vettore induzione magnetica è il tesla (simbolo T)

$$1 \text{ T} = \frac{1 \cdot \text{Newton}}{1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ metro}} = \frac{1 \cdot \text{N}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}}$$

Se nella regione di spazio in cui si trova la carica q esiste, oltre al campo magnetico, anche un campo elettrico (dovuto per esempio alla presenza di altre cariche statiche) allora la forza \mathbf{F} agente sulla carica è data dalla somma vettoriale della *forza elettrica* $q\mathbf{E}$ e della *forza magnetica* $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

La forza elettromagnetica \mathbf{F} è detta *forza di Lorentz*. Pertanto, in presenza di campo elettrico e magnetico, la forza agente su una carica dipende dalla sua posizione e dalla velocità con cui si sta muovendo.

Nei paragrafi successivi si analizzano due diverse categorie di fenomeni legati all'esistenza del solo campo magnetico ($\mathbf{E} = 0$): la prima ha lo scopo di descrivere i campi magnetici generati da correnti elettriche mentre la seconda è finalizzata allo studio delle forze meccaniche che un campo magnetico esercita su cariche in movimento.

3.2 Esperimento di Ørsted (1820)

Il fisico danese Hans Christian Ørsted, in un celebre esperimento che segnò l'inizio della teoria moderna del magnetismo, scoprì che una corrente elettrica fa deviare un ago magnetico posto nelle sue vicinanze. Questo semplice fatto sperimentale fu il primo di una lunga serie di scoperte che permisero di dimostrare che *un campo magnetico è sempre determinato da cariche elettriche in movimento*⁶.

⁶Il campo magnetico terrestre, quello che orienta la bussola, è dovuto ai movimenti di masse magmatiche che risultano elettricamente cariche per le elevatissime pressioni e temperature presenti nel nucleo della Terra.

3.3 Induzione magnetica generata da un filo rettilineo infinito. Legge di Biot-Savart.

I fisici francesi Jean-Baptiste Biot e Félix Savart negli anni (1820-1824) determinarono sperimentalmente il campo \mathbf{B} generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente stazionaria⁷. Essi misurarono le deviazioni subite da un ago magnetico posto nelle vicinanze del filo. Se P è un punto che si trova a distanza r dal filo in cui fluisce una corrente stazionaria pari a i allora il vettore induzione magnetica \mathbf{B} è così definito:

- \mathbf{B} appartiene al piano π passante per P e ortogonale al filo; la sua direzione è quella della retta tangente alla circonferenza di centro O e raggio r .

- Il verso di \mathbf{B} si determina usando la “regola della mano destra” nel seguente modo: posizionando il pollice secondo la direzione e il verso della corrente i , il verso di \mathbf{B} è concorde con il senso di avvolgimento delle altre quattro dita della mano.

- L'intensità di \mathbf{B} è

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (3.3)$$

Il vettore induzione magnetica è completamente definito dalla seguente uguaglianza vettoriale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (3.4)$$

dove \mathbf{s} è il versore applicato in O con direzione e verso coincidenti con quelli della corrente e $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$.

La costante μ_0 si chiama *permeabilità magnetica del vuoto*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \frac{\text{m}}{\text{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Anche il campo magnetico di un magnete naturale o artificiale è riconducibile ai moti ordinati degli elettroni atomici di particolari sostanze.

⁷Ogni circuito elettrico percorso da corrente stazionaria deve necessariamente essere chiuso. Si schematizzi il filo conduttore con un rettangolo e ci si ponga a distanza r da uno dei suoi lati; se tale distanza è molto minore rispetto alla lunghezza del lato, si può considerare con buona approssimazione il conduttore percorso da corrente come un filo rettilineo infinito.

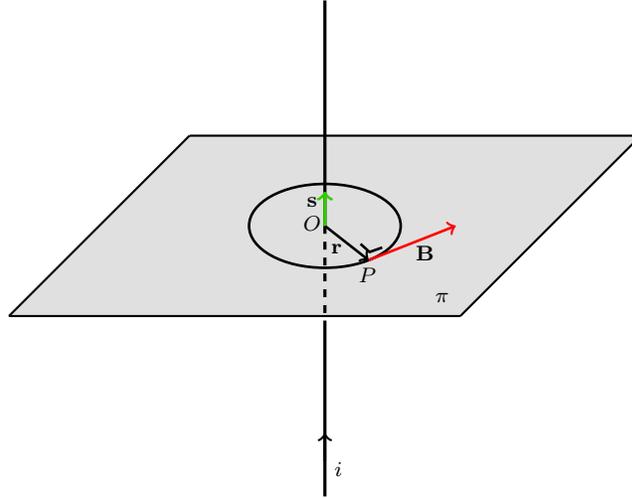


Figura 27: Campo magnetico generato da un filo percorso da corrente stazionaria. Le linee di forza per P del campo magnetico è la circonferenza che giace nel piano perpendicolare al filo e avente centro su di esso.

3.4 Induzione magnetica generata da una spira

In una spira circolare di raggio R percorsa da corrente stazionaria i le linee di forza del campo magnetico \mathbf{B} sono linee di campo chiuse, concatenate con la spira e appartenenti a piani ortogonali rispetto a quello della spira.

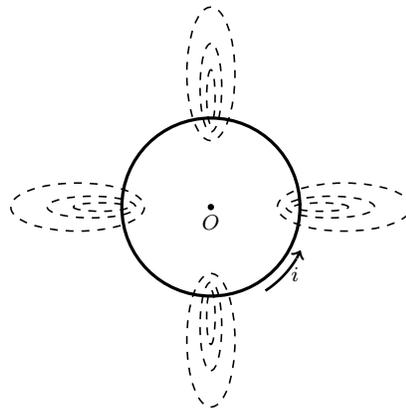


Figura 28: Le linee di forza del campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente sono linee chiuse (quelle tratteggiate), perpendicolari al piano che contiene la spira stessa.

Nel centro O l'intensità del campo magnetico vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (3.5)$$

la direzione è ortogonale al piano contenente la spira e il verso coincidente con quello di un osservatore che vede ruotare la corrente in senso antiorario.

In un punto dell'asse della spira che si trova a distanza r dal centro O l'intensità del campo magnetico è

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

A grandi distanze dalla spira, cioè per $r \gg R$ nel termine $(r^2 + R^2)^{3/2}$ si può, con buona approssimazione, trascurare il termine R^2 . Allora da (3.6), si ottiene l'intensità del campo elettrico in un punto dell'asse della spira a grande distanza dal suo centro

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 i}{r^3} \quad (3.7)$$

Osservazione. Il campo generato da una piccola spira è molto simile a quello generato da un ago magnetico a essa perpendicolare e che rivolga il nord verso l'osservatore che vede la corrente circolare in senso antiorario.

3.5 Induzione magnetica generata da un solenoide

Un solenoide rettilineo (o bobina) è costituito da un'elica cilindrica di filo conduttore come mostrato in figura.

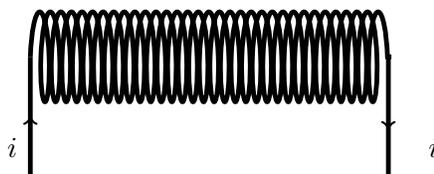


Figura 29: Solenoide.

Si suppone che la lunghezza del solenoide sia molto maggiore del raggio delle spire (solenoido infinito), che sia costante il numero n di spire per unità di lunghezza (avvolgimento uniforme) e infine che le spire siano così ravvicinate da costituire una successione compatta. In queste ipotesi il solenoide si comporta come se fosse formato da tante spire piane tra loro parallele e tutte percorse dalla stessa corrente. Sull'asse del solenoide il vettore induzione magnetica è diretto come l'asse stesso, ha verso concorde con quello della corrente e intensità

$$B = n\mu_0 l i \quad (3.8)$$

Quindi il campo \mathbf{B} non dipende dal raggio delle spire.

Negli altri punti interni al solenoide (lontani dalle sue estremità) il campo magnetico è praticamente uniforme con linee di campo rettilinee e parallele all'asse del solenoide. Nei punti esterni \mathbf{B} è molto piccolo rispetto a quello nei punti interni ed è quindi trascurabile.

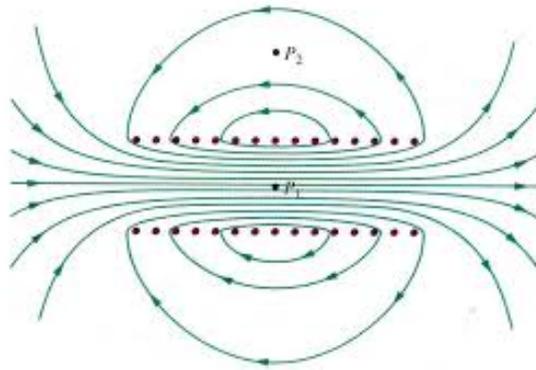


Figura 30: Linee di campo di un solenoide.

3.6 Azioni meccaniche esercitate da un campo magnetico su correnti elettriche

Si consideri un filo metallico rettilineo di lunghezza l percorso da una corrente stazionaria i posto in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme.

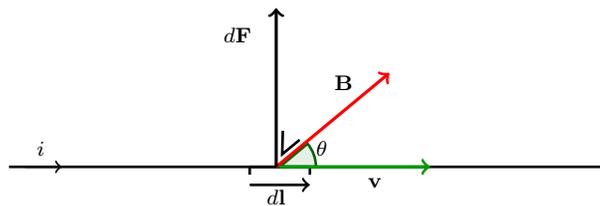


Figura 31: Forza esercitata dal campo magnetico \mathbf{B} sul filo percorso da corrente stazionaria.

In un intervallino di tempo dt la carica $dq = i dt$ attraversa un elemento $d\mathbf{l}$ di filo la cui lunghezza è $dl = v dt$. La forza di Lorentz esercitata dal campo magnetico \mathbf{B} sul tratto di filo $d\mathbf{l}$ è

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{F} &= dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\
 &= i dt \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} \\
 &= i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

L'uguaglianza $d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ si chiama *seconda legge di Laplace*.

Per calcolare la forza complessiva che il campo magnetico esercita sul filo di lunghezza l bisogna sommare tutte le forze agenti su ogni tratto di filo $d\mathbf{l}$. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int_l d\mathbf{F} \\
&= \int_l i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\
&= i \mathbf{l} \times \mathbf{B}
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

L'uguaglianza $\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$ dice tra l'altro che la forza esercitata sul filo è dovuta alla presenza del campo magnetico non dipende dalla quantità di carica trasportata da ogni singola particella, nè dal suo segno.

3.6.1 Forze agenti tra due fili rettilinei infiniti

Siano a e b due fili rettilinei paralleli posti a distanza d l'uno dall'altro. Il filo a è percorso dalla corrente i_a , il filo b dalla corrente i_b . L'intensità del campo magnetico generato dalla corrente i_a nei punti lungo il filo b si trova utilizzando la legge di Biot-Savart (la direzione e il verso sono indicati in figura)

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} \tag{3.11}$$

Ora, la forza esercitata dal campo \mathbf{B}_a sul tratto di filo b di lunghezza l è (si veda l'uguaglianza 3.10)

$$F = i_b l B_a \tag{3.12}$$

Infine, sostituendo l'uguaglianza 3.11 in 3.12 si ottiene

$$F = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} l \tag{3.13}$$

3.7 Legge di Ampere (1826)

Si consideri un filo percorso da corrente stazionaria i e una curva chiusa orientata γ . Con il termine *circuitazione di \mathbf{B} lungo γ* si intende il “lavoro” compiuto da \mathbf{B} lungo la curva orientata γ ⁸.

Per calcolare la circuitazione di \mathbf{B} lungo γ bisogna prima calcolare il “lavoro” elementare $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ compiuto dal campo magnetico lungo un tratto infinitesimo di curva $d\mathbf{l}$ e poi fare la somma dei lavori elementari relativi a tutti i trattini $d\mathbf{l}$ che costituiscono la curva. Si ottiene

$$\text{Circuitazione di } \mathbf{B} \text{ lungo } \gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Per indicare la somma di tutti i lavori elementari si usa il simbolo (integrale) “ \oint ”, il cerchio sulla S stilizzata di somma sta a indicare che la somma è estesa a una curva chiusa.

Se il filo percorso da corrente stazionaria i è rettilineo e infinito il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} è relativamente semplice. Si distinguono due casi

⁸Il termine lavoro è improprio perchè \mathbf{B} non è una forza.

Primo caso. Sia γ una curva orientata concatenata con il filo.

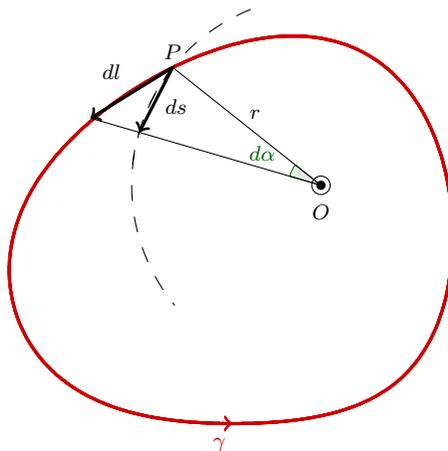


Figura 32: Circuitazione di \mathbf{B} lungo una linea chiusa concatenata con un filo rettilineo perpendicolare al foglio. La corrente è uscente dal foglio.

Si ha

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.14)$$

dove \mathbf{t} rappresenta il versore della tangente in P alla circonferenza di raggio r , orientato secondo il verso concorde con quello della corrente. La quantità $\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}$ rappresenta la lunghezza del tratto elementare di circonferenza ds (si veda la figura sopra) e quindi $d\alpha = \frac{\mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}}{r} = \frac{ds}{r}$ è l'angolo al centro sotteso dall'elemento $d\mathbf{l}$ di filo. L'uguaglianza (3.14) diventa

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \quad (3.15)$$

Quindi la circuitazione di \mathbf{B} lungo γ è pari a

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} i \oint d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} i 2\pi \\ &= \mu_0 i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Secondo caso. Sia γ una curva orientata *non* concatenata con il filo.

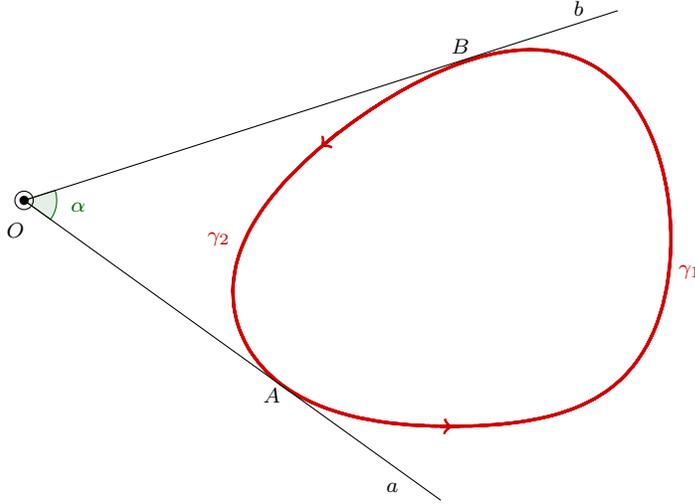


Figura 33: Circuitazione di \mathbf{B} lungo una linea chiusa *non* concatenata con il filo.

Siano A B i punti di contatto delle tangenti a e b a γ passanti per O . La curva orientata risulta formata dalla curva γ_1 che va da A a B e dalla curva γ_2 che va da B a A : $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (si veda la figura). Allora la circuitazione di \mathbf{B} lungo γ vale

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{2\pi} i \int d\alpha + \oint_{\gamma_2} \frac{\mu_0}{2\pi} i d\alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i \left[\int_{\gamma_1} d\alpha + \int_{\gamma_2} d\alpha \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{2\pi} i [\alpha - \alpha] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Si dimostra (non qui) che il risultato trovato vale qualunque sia la forma del filo percorso da corrente. Vale cioè il seguente teorema

Teorema 3.2 (Legge di Ampere.). *In un campo magnetico generato da un filo di forma qualsiasi percorso da corrente stazionaria i la circuitazione di \mathbf{B} lungo una qualunque linea chiusa orientata γ , concatenata n volte con il filo, vale $n \mu_0 i$*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i \tag{3.18}$$

Se la curva non è concatenata con la corrente n è uguale a zero e la circuitazione di \mathbf{B} è nulla, altrimenti vale $n\mu_0 i$. In ogni caso essa non dipende dalla forma della curva γ ma solo da quante volte la curva “gira” attorno al filo e dalla corrente concatenata. Il ruolo che il teorema di Ampere assume nel magnetismo è analogo a quello assunto dal teorema di Gauss in elettrostatica. In molti casi infatti si utilizza la legge di Ampere per calcolare l’intensità del

campo magnetico. Per esempio, per determinare l'intensità del campo magnetico nei punti interni di un solenoide infinito conviene scegliere come curva γ il rettangolo orientato della figura, nel quale i lati γ_1, γ_3 sono paralleli all'asse del solenoide e misurano L , mentre γ_2, γ_4 sono gli altri due lati verticali.

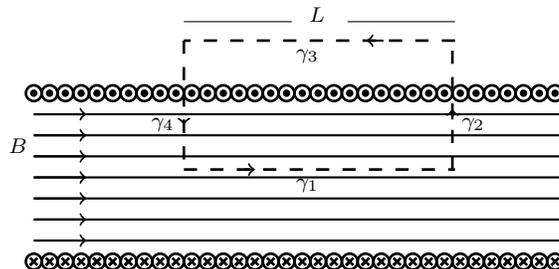


Figura 34: Il campo magnetico all'interno del solenoide è uniforme e ha direzione parallela a quella del suo asse, mentre nei punti esterni è praticamente nullo.

Se il rettangolo è concatenato *una volta* con il solenoide e i è la corrente che attraversa ogni spira, la legge di Ampere assume la forma

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N i \quad (3.19)$$

dove N è il numero di spire del solenoide racchiuse dal rettangolo γ

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= B L \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pertanto

$$\mathbf{B} = \frac{N}{L} \mu_0 i \quad (3.21)$$

dove $\frac{N}{L}$ è il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide.

3.8 Equazioni di Maxwell per campi elettrici e magnetici stazionari.

Le equazioni di Maxwell⁹ per campi elettrici e magnetici che *non variano nel tempo* sono

1. Teorema di Gauss per il campo elettrico

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

dove S è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

⁹James Clerk Maxwell (Edimburgo, Scozia 1831 - Cambridge, Inghilterra 1879).

2. Conservatività del campo elettrico

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

3. Teorema di Gauss per il campo magnetico

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove S è una qualsiasi superficie chiusa orientata.

4. Teorema di Ampere.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i_c$$

4 Fenomeni elettromagnetici dipendenti dal tempo

4.1 Legge di Faraday-Neumann (1831)

Ørsted aveva mostrato che un filo percorso da corrente genera un campo magnetico, in altre parole egli aveva dimostrato che un campo elettrico genera sempre un campo magnetico

Elettricità \Rightarrow Magnetismo

Il fisico britannico Michael Faraday (1791-1867) si chiese se, e in quali condizioni, un campo magnetico possa generare un campo elettrico, si domandò cioè, se fosse vera l'implicazione

Magnetismo \Rightarrow Elettricità

Faraday scoprì che un campo magnetico *variabile nel tempo* produce, in un circuito posto nelle vicinanze, una corrente, detta *corrente indotta*. In altri termini, egli dimostrò che un campo magnetico variabile induce nel circuito un campo elettrico in grado di condizionare il moto dei suoi elettroni di conduzione.

Per capire meglio la scoperta di Faraday si consideri la seguente situazione: si ponga nelle vicinanze di un magnete un circuito elettrico, per esempio una spira priva di generatore e si inserisca nel circuito un amperometro collegato in serie. Se il magnete e il circuito sono fermi l'uno rispetto all'altro, l'amperometro non registra alcun passaggio di corrente. In questa situazione il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ del campo magnetico (generato dal magnete) attraverso una qualsiasi superficie orientata (non necessariamente chiusa) è costante nel tempo. Ma, *che cosa succede se il flusso varia nel tempo?*

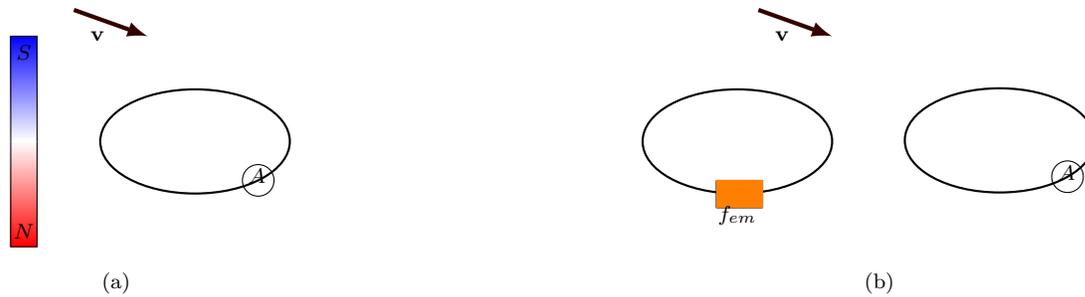


Figura 35: Alla spira con amperometro viene avvicinato un magnete (figura (a)) oppure un'altra spira collegata a un generatore (figura (b)). In entrambi i casi l'amperometro segnala passaggio di corrente.

Si supponga che, durante l'intervallo di tempo dt , tra il magnete e la spira vi sia movimento reciproco (figura 35 (a)). In questo caso l'amperometro registra passaggio di corrente per tutta la durata dell'intervallo di tempo dt . Succede che il flusso magnetico concatenato con la spira varia nel tempo ($\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \neq 0$) ed esso produce nella spira un campo elettrico indotto

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

in grado di mettere in movimento i portatori di carica nel circuito.

Il lavoro compiuto dal campo elettrico indotto per far compiere all'unità di carica un giro completo nel circuito si chiama *forza elettromotrice indotta* e si denota con f_i

$$f_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.1)$$

La **legge di Faraday-Neumann** afferma quanto segue:

se il flusso del vettore induzione magnetica \mathbf{B} , concatenato con un circuito, varia nel tempo allora nel circuito si induce una forza elettromotrice indotta f_i che eguaglia la variazione di flusso

$$f_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (4.2)$$

Pertanto la tensione indotta risulta uguale alla velocità di variazione del flusso magnetico che attraversa la spira. Poiché il campo magnetico generato da un magnete è dovuto alle sue correnti interne si ottiene lo stesso effetto sostituendo il magnete con una seconda spira percorsa da corrente (figura 35 (b)): se vi è movimento reciproco tra i due circuiti si osserva passaggio di corrente nella spira priva di generatore. Esiste infine un terzo modo di generare una forza elettromotrice indotta senza muovere nulla: basta modificare il campo magnetico generato dalla spira dotata di generatore variando semplicemente la corrente che fluisce in esso. Per esempio, si può facilmente verificare che all'apertura e alla chiusura del circuito l'amperometro segnala passaggio di corrente nella spira priva di generatore.

Per determinare infine il valore dell'intensità media della corrente indotta basta ricordare la prima legge di Ohm: detta R la resistenza ohmica della spira, si ha

$$i_{mi} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (4.3)$$

cioè l'intensità (media) della corrente risulta direttamente proporzionale alla variazione di flusso e inversamente proporzionale alla durata della variazione.

Osservazioni.

1. Il fenomeno descritto sopra si verifica durante l'intervallo di tempo in cui si ha una variazione di flusso; non appena il flusso si stabilizza su un nuovo valore il fenomeno cessa.
2. Il fenomeno si verifica in qualunque modo si realizzi la variazione di flusso magnetico che attraversa la spira priva di generatore; ciò si può ottenere muovendo il magnete (o il circuito dotato di generatore), muovendo la spira, oppure entrambi. Se si sostituisce il magnete con una elettrocalamita si ottiene lo stesso risultato senza muovere nulla: variando la corrente in una delle due spire si genera corrente nell'altra.
3. Il campo elettrico indotto nella spira presenta una caratteristica che lo differenzia notevolmente dal campo elettrostatico; il solo fatto che esso sia in grado di far muovere delle cariche elettriche su un percorso chiuso significa che esso compie, su una traiettoria chiusa, un lavoro diverso da zero. Quindi, al contrario del campo elettrostatico, esso non è conservativo.
4. La legge di Faraday-Neumann è una *legge fondamentale della natura* (come la legge di Coulomb o quella di gravitazione di Newton).

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del flusso magnetico è il weber (simbolo Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tesla} \cdot 1 \text{ metro}^2 = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2$$

4.2 Legge di Lenz

Il verso secondo cui la corrente indotta fluisce nel circuito si determina mediante la

Legge di Lenz. *La corrente indotta genera essa stessa un campo magnetico¹⁰ che tende ad opporsi alla variazione di flusso che l'ha generato.*

¹⁰Si ricordi che una spira percorsa da corrente è equivalente a un magnete perpendicolare alla spira stessa avente il nord N diretto come l'osservatore che vede circolare la corrente in senso antiorario.



Figura 36: Una barretta magnetica viene avvicinata a una spira muovendola lungo l'asse della spira stessa. In figura (a) il magnete è orientato in modo tale che il polo più vicino alla spira sia il polo nord, in figura (b) il polo più vicino alla spira è il polo sud.

Per capire come utilizzare la legge di Lenz si consideri il caso di una spira di area S immersa in un campo magnetico \mathbf{B} e poi si proceda come segue

1. Si fissi un vettore \mathbf{n} perpendicolare alla spira in modo da orientare l'area S .
2. Si stabilisca il segno del flusso $\Phi(\mathbf{B})$ (se la spira è sufficientemente piccola rispetto al magnete si può considerare costante il campo magnetico in ogni punto di S).
3. Si determini la velocità di variazione del flusso rispetto al tempo, cioè si calcoli $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$.
Si possono presentare tre casi:

$$\text{Se } \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ la forza elettromotrice indotta è negativa, } f_i < 0 \\ < 0 & \Rightarrow \text{ la forza elettromotrice indotta è positiva, } f_i > 0 \\ = 0 & \Rightarrow \text{ non vi è forza elettromotrice indotta, } f_i = 0. \end{cases}$$

4. Per determinare il verso della corrente si utilizzi la regola della mano destra nel seguente modo: si posizioni il pollice lungo la direzione e il verso di \mathbf{n} e poi si chiudano le altre quattro dita della mano. Se $f_i > 0$ la corrente indotta circola nella spira secondo il verso stabilito dalle quattro dita, se invece $f_i < 0$ la corrente circola in verso opposto.

Per esempio, si supponga di avvicinare il polo nord di una barretta magnetica a una piccola spira di area S nel modo indicato in figura 4.4 (a).

Si fissi il vettore \mathbf{n} nel modo indicato nella figura. Se la spira è sufficientemente piccola si può con buona approssimazione considerare costante il campo magnetico in ogni punto di S . \mathbf{B} ha direzione verticale, punta verso il basso e il suo flusso concatenato con la spira è

$$\Phi(\mathbf{B}) = -BS < 0$$

Poichè il magnete si sta avvicinando alla spira l'intensità del campo magnetico sta aumentando, cioè $\frac{dB}{dt} > 0$ mentre la velocità di variazione del flusso magnetico attraverso la spira è negativo, infatti

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{d(-BS)}{dt} = -S \frac{dB}{dt} < 0$$

Ora, la legge di Lenz afferma che la corrente circolante nella spira genera un campo magnetico indotto (diverso da \mathbf{B}) che si oppone alla variazione di flusso che l'ha generato. Allora la forza elettromotrice indotta deve essere positiva $f_i > 0$ e di conseguenza il verso della corrente è quello antiorario.

Nel caso si avvicini alla spira il polo sud della barretta magnetica (figura 36 (b)) si procede in modo analogo. Si fissa il versore \mathbf{n} (per esempio nel modo indicato in figura) e si determina il segno del flusso

$$\Phi(\mathbf{B}) = BS > 0$$

Anche in questo caso il magnete si sta avvicinando alla spira e pertanto l'intensità del campo magnetico sta aumentando: $\frac{dB}{dt} > 0$. La velocità di variazione del flusso magnetico attraverso la spira è positivo, infatti

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt} > 0$$

Questa volta la forza elettromotrice indotta è negativa e la corrente circola nella spira in senso orario.

Per tener conto delle considerazioni appena fatte è sufficiente introdurre nella legge di Faraday - Neumann un segno “-” che, di fatto, racchiude in sé la legge di Lenz. In questo modo la legge di induzione magnetica assume la forma

$$f_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (4.4)$$

L'uguaglianza (4.4) si chiama *legge di Faraday-Neumann-Lenz*.

4.3 Autoinduzione

Se in una spira si fa circolare corrente elettrica *variabile nel tempo* essa genera un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo. Il flusso magnetico autoconcatenato risulta essere direttamente proporzionale alla corrente che lo genera; più precisamente il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ risulta proporzionale all'intensità B che a sua volta è proporzionale all'intensità di corrente; quindi

$$\Phi(\mathbf{B}) = L i$$

La costante $L = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{i}$ dipende dalla geometria del circuito e si chiama *coefficiente di autoinduzione* o *induttanza*.

Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz si ottiene

$$\begin{aligned}
f_i &= - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \\
&= - \frac{d(Li)}{dt} \\
&= -L \frac{di}{dt}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Questo significa che la variazione di flusso induce nel circuito una *corrente autoindotta* che si oppone alla corrente principale; se la corrente principale aumenta ($\frac{di}{dt} > 0$) allora la corrente autoindotta circola nel circuito in senso contrario, mentre se la corrente principale diminuisce ($\frac{di}{dt} < 0$) essa circola nello stesso senso.

Esempio. Si consideri un solenoide di lunghezza L formato da n spire per unità di lunghezza, ciascuna delle quali ha area S . Se il solenoide è percorso da una corrente i ed è sufficientemente lungo da poterlo considerare infinito allora l'intensità del vettore induzione magnetica è $B = \mu_0 n i$. Il flusso concatenato con ciascuna spira vale

$$\Phi(\mathbf{B}) = \mu_0 n i S$$

mentre il flusso totale concatenato con tutte le nL spire del solenoide è

$$\Phi(\mathbf{B}) = \mu_0 n^2 i L S$$

Pertanto l'autoinduttanza di un solenoide è

$$L = \mu_0 n^2 L S$$

Nel S.I. l'unità di misura dell'induttanza L si chiama **henry** (simbolo H)

$$1 H = \frac{1 W}{1 A} = \frac{1 V \cdot 1 s}{1 A} = 1 \Omega \cdot s$$

Il fenomeno dell'autoinduzione si verifica anche nei circuiti alimentati da una tensione continua, negli istanti in cui si verifica una brusca variazione di corrente, cioè alla chiusura o all'apertura del circuito.

4.4 Motori elettrici

Il principio di funzionamento di un motore elettrico è schematizzato in figura: tra le estremità di un magnete permanente si pone un pezzo di ferro in modo da creare due diversi intercapedini ognuna dotata di un polo sud e di un polo nord magnetico; una spira di forma rettangolare è situata con un lato in ciascuna intercapedine. Quando nella spira si fa passare corrente, essa fluisce attraverso le due intercapedini con versi opposti e ciò determina una coppia di forze che tende a far ruotare la spira attorno al proprio asse. Collegando la spira a una puleggia si produce lavoro.

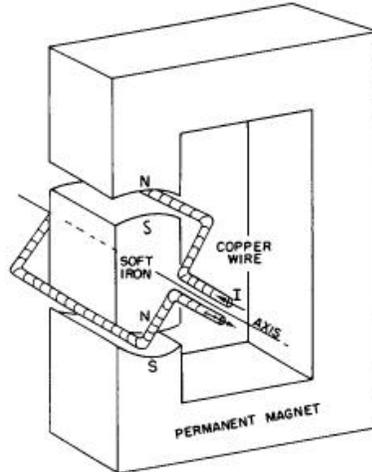


Figura 37: Schema di un motore elettrico.

4.5 Produzione e trasporto di corrente alternata

Un alternatore è un dispositivo in grado di produrre corrente alternata. Funziona così: una spira di area S viene immersa in un campo magnetico uniforme ed è libera di ruotare attorno a un suo diametro perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

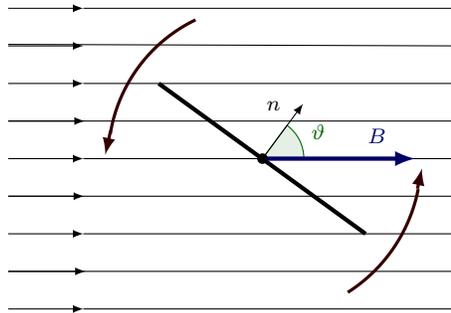


Figura 38: Spira libera di ruotare in un campo magnetico uniforme.

Poichè la spira ruota di moto circolare uniforme, il flusso del campo magnetico concatenato con essa varia nel tempo in modo periodico. Detto ϑ l'angolo formato da \mathbf{B} con la normale \mathbf{n} alla superficie della spira si ha $\Phi(\mathbf{B}) = B S \cos \vartheta$. Posto $\vartheta = \omega t$, dove ω è la velocità angolare della spira, il flusso $\Phi(\mathbf{B})$ assume la forma seguente

$$\Phi(\mathbf{B}) = B S \cos \omega t \quad (4.6)$$

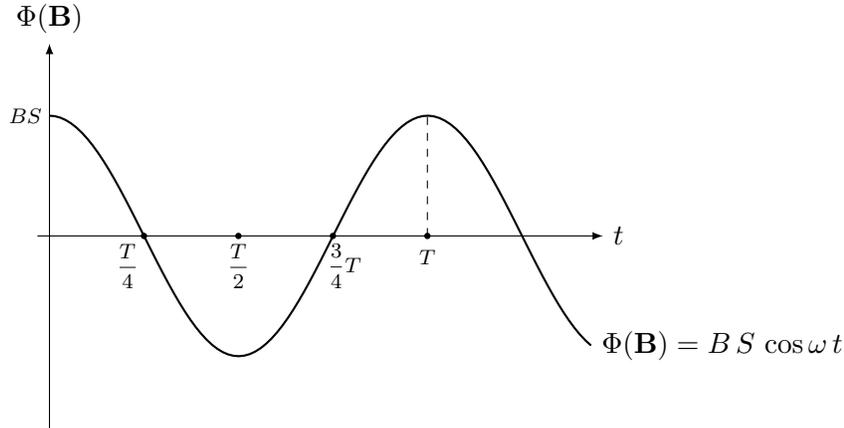


Figura 39: Il grafico del flusso $\Phi(\mathbf{B})$ rispetto al tempo. La variazione è di tipo sinusoidale.

Si ricordi ora la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$f_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (4.7)$$

la quale afferma che la forza elettromotrice indotta è uguale all'opposto della velocità di variazione del flusso di \mathbf{B} rispetto al tempo. La quantità $\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$ può essere dedotta in modo qualitativo dal grafico di figura 39; infatti in ogni istante di tempo t tale quantità coincide con il *coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $\Phi(\mathbf{B})$* . Per esempio in $t = 0, \frac{T}{2}, T$ le tangenti al grafico di Φ sono orizzontali e pertanto i coefficienti angolari delle tre rette tangenti sono nulli, allora in tutti e tre gli istanti di tempo $f_i = 0$; in $t = \frac{T}{4}$ la pendenza della retta tangente è negativa (forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse delle t) e assume valore minimo, quindi in $t = \frac{T}{4}$ la forza elettromotrice indotta è positiva e massima. In $t = \frac{3}{4}T$ la pendenza della tangente è positiva (forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse delle t) e assume valore massimo e quindi in tale istante di tempo f_i è negativa e minima. In termini precisi, il grafico della forza elettromotrice indotta rispetto al tempo è il seguente

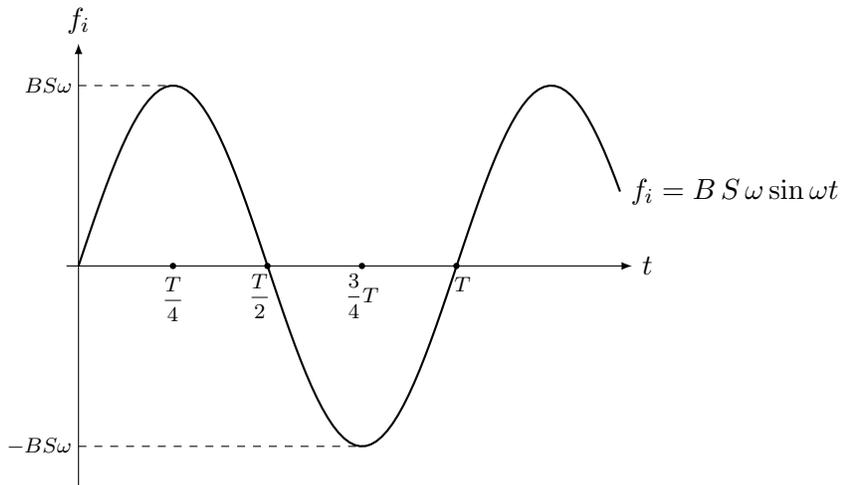


Figura 40: Il grafico della forza elettromotrice indotta f_i rispetto al tempo.

Infine dalla legge di Ohm si ricava l'espressione dell'intensità di corrente

$$i = \frac{1}{R} B S \omega \sin \omega t \quad (4.8)$$

La corrente così ottenuta si dice *corrente alternata monofase*.

La corrente che arriva nelle nostre case è oggi prodotta mediante un *generatore trifase* che è costituito da tre generatori monofase in modo che la corrente alternata prodotta da ognuno di essi risulti sfasata di $\frac{1}{3}T$ rispetto a quelle degli altri due. Si utilizzano tre cavi conduttori, uno per ogni generatore, più un quarto cavo conduttore detto "neutro". Senza addentrarsi nella descrizione di tale sistema e sui motivi che lo rendono preferibile rispetto ad altri, qui ci si limita a ricordare che esso permette di ridurre le inevitabili perdite, dovute all'effetto Joule, di cui bisogna necessariamente tener conto quando si vuole trasportare corrente lungo reti elettriche che si estendono per centinaia di chilometri. La prima linea sperimentale di trasmissione trifase in media tensione fu installata nel 1891 in occasione della mostra internazionale sull'elettricità di Francoforte sul Meno: era lunga 175 Km circa e aveva una tensione di 15 – 25 kV. Il primo elettrodotto commerciale fu invece realizzato nel 1896 dalla società Westinghouse negli Stati Uniti per collegare la centrale installata alle cascate del Niagara con la città di Buffalo (New York), distante 80 Km.

4.6 Corrente di spostamento. Equazioni di Maxwell (1861).

Verso il 1860 il grande fisico scozzese James Clerk Maxwell scoprì che in certi casi la legge di Ampere risultava inadeguata. Tale legge afferma che la circuitazione del campo magnetico lungo un cammino chiuso è proporzionale alla corrente concatenata con il cammino, cioè

$$\int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (4.9)$$

dove γ è un cammino chiuso (orientato), mentre i ("la corrente concatenata con il cammino") è la corrente che attraversa una qualsiasi superficie avente per contorno γ . L'uguaglianza (4.9) è valida in regime stazionario (correnti continue) e nel caso di circuiti continui ininterrotti.

Che cosa succede se la corrente varia nel tempo?

Si consideri, ad esempio, un condensatore durante la fase di carica; quello schematizzato in figura è costituito da due armature circolari di raggio r . Per caricare un qualunque condensatore è necessario collegare le estremità dei suoi conduttori, diciamo P e Q , a un generatore; allora nei conduttori inizia a fluire corrente, una certa quantità di carica viene rimossa dall'armatura di destra e si deposita su quella di sinistra e dopo un breve intervallo di tempo (quando le armature sono cariche) la corrente cessa di fluire nei conduttori. Si ricordi che durante il tempo di carica del condensatore la corrente i che fluisce nei suoi conduttori varia nel tempo: è massima all'inizio, quando le armature sono scariche, e va via via diminuendo fino ad annullarsi quando le armature sono completamente cariche.

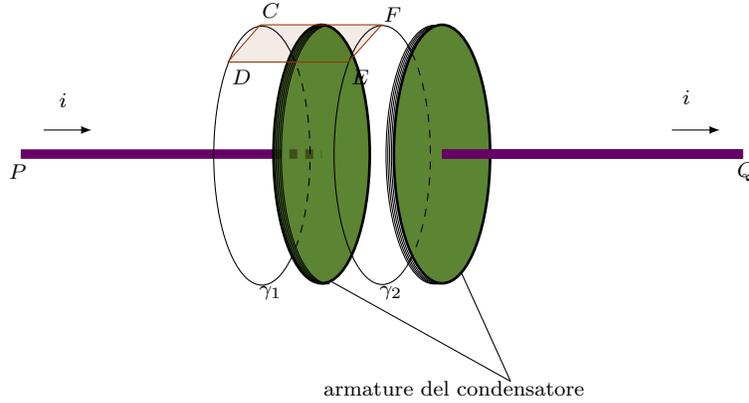


Figura 41:

Ora, sia γ_1 è la circonferenza indicata in figura, avente il centro sull'asse del condensatore e raggio uguale a quello delle due armature; per la legge di Ampere

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (4.10)$$

dove la corrente concatenata con γ_1 è la corrente i che attraversa il cerchio delimitato da γ_1 . Poichè in ogni punto della circonferenza il campo magnetico ha intensità costante si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad (4.11)$$

Dalle uguaglianze (4.10) e (4.11) si ricava che, in ogni punto di γ_1 , l'intensità del campo magnetico è

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (4.12)$$

Invece, la circuitazione di \mathbf{B} lungo la circonferenza γ_2 (posta tra le due armature, avente anch'essa raggio r e centro sull'asse del condensatore) vale zero perchè tale circonferenza non è concatenata con la corrente. Da $\int_{\gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ si deduce che $\mathbf{B} = 0$, in ogni punto di γ_2 .

Si calcoli ora la circuitazione di \mathbf{B} lungo il rettangolo $CDEF$. Tale rettangolo ha i vertici sulle due circonferenze e i lati $CD = EF = dx$ talmente piccoli da poter considerare costante il campo magnetico in ogni punto dei due segmenti. Poichè il rettangolo non è concatenato con la corrente si ha

$$\int_{\text{rettangolo}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_C dx - B_F dx = 0 \quad (4.13)$$

Allora l'intensità di B nel punto F è

$$B_F = B_C = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (4.14)$$

e ciò contraddice il fatto che il campo magnetico sia nullo in tutti i punti di γ_2 .

Maxwell capì che qualcosa non funzionava nella legge di Ampere, nel senso che essa, come nel caso della fase di carica di un condensatore, non poteva essere utilizzata per spiegare tutte le situazioni possibili. Il ragionamento che portò Maxwell a introdurre nella legge di Ampere il giusto correttivo si può a grandi linee riassumere così: la legge di Faraday-Neumann afferma che un campo magnetico variabile è sempre accompagnato da un campo elettrico indotto e se in essa si sostituisce la forza elettromotrice f_i con $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ si ottiene

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (4.15)$$

Maxwell ipotizzò allora che così come un campo magnetico variabile produce un campo elettrico (legge di Faraday-Neumann) anche *un campo elettrico variabile deve produrre un campo magnetico*. Deve allora valere una legge analoga a (4.15) dove \mathbf{B} e \mathbf{E} hanno ruoli scambiati; egli scoprì che

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \quad (4.16)$$

D'altra parte la legge di Ampere afferma che

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i \quad (4.17)$$

Maxwell stabilì allora che l'equazione completa doveva essere

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \quad (4.18)$$

e chiamò il termine $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$ *corrente di spostamento*.

Qui di seguito sono riportate le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo universalmente note come *le equazioni di Maxwell*. Tali equazioni svolgono nell'elettromagnetismo lo stesso ruolo che le leggi di Newton svolgono nella meccanica classica. In linea di principio tutti i problemi legati a fenomeni elettrici e/o magnetici della fisica classica si possono risolvere usando le equazioni di Maxwell così come tutti i problemi di meccanica classica si possono risolvere utilizzando le leggi di Newton.

1. Legge di Gauss per il campo elettrico. Se S è una superficie chiusa orientata allora

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Il teorema di Gauss per il campo elettrico afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa orientata è uguale al prodotto di $\frac{1}{\epsilon_0}$ per la carica totale racchiusa all'interno della superficie. Dal teorema di Gauss è possibile dedurre, come caso particolare la legge di Coulomb.

2. Legge di Gauss per il campo magnetico. Se S è una superficie chiusa orientata allora

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Questa legge afferma che il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa orientata vale zero. Questa equazione traduce il fatto che in un campo magnetico non vi sono “sorgenti” né “pozzi”; cioè in un campo magnetico le linee di campo sono sempre linee chiuse e di conseguenza non esistono poli magnetici isolati.

3. Legge di Faraday-Neumann-Lenz.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

La legge afferma che la circuitazione del campo elettrico lungo un cammino γ chiuso e orientato (cioè la forza elettromotrice) è uguale alla velocità di variazione (presa col segno meno) del flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie S avente come contorno il cammino chiuso γ .

4. Legge di Ampere generalizzata.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$$

La legge afferma che la circuitazione del campo magnetico è uguale al prodotto di μ_0 per la corrente concatenata più il prodotto di $\mu_0 \epsilon_0$ per la velocità di variazione del flusso elettrico concatenato con il cammino chiuso.

5 Onde elettromagnetiche

Al tempo di Maxwell nessuno immaginava che la costante dielettrica ϵ_0 e la costante di permeabilità magnetica μ_0 (entrambe relative al vuoto) fossero in relazione con la velocità c della luce. Egli scoprì che la relazione tra queste tre grandezze è espressa dalla seguente uguaglianza

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5.1)$$

Maxwell, partendo dalle equazioni che portano il suo nome, dimostrò i seguenti fatti

- Una corrente variabile irradia onde elettromagnetiche la cui velocità è $v = c$, cioè pari a quella della luce.
- In un'onda elettromagnetica il campo elettrico \mathbf{E} e il campo magnetico \mathbf{B} hanno stessa intensità, sono perpendicolari tra loro e allo stesso tempo sono entrambi perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica
- La luce può essere interpretata come campi elettrici e magnetici ad alta frequenza.

La prima verifica sperimentale della teoria di Maxwell sulla luce fu realizzata da Hertz nel 1888. Solo qualche anno dopo Marconi riuscì a trasmettere onde elettromagnetiche da una parte all'altra dell'Oceano Atlantico.

Spettro elettromagnetico.

Le onde elettromagnetiche sono classificate in base alla loro frequenza. Onde di diversa frequenza sono in genere prodotte da sorgenti diverse e hanno proprietà molto diverse tra loro. Esse si suddividono in (ν indica la frequenza e λ l'ampiezza)

1. Onde radio. $1 \cdot 10^2 \text{ Hz} < \nu < 10^9 \text{ Hz}$. La loro lunghezza d'onda varia tra alcuni chilometri e qualche centimetro. Sono utilizzate principalmente nelle telecomunicazioni radio e TV.
2. Microonde. $10^9 \text{ Hz} < \nu < 10^{11} \text{ Hz}$.
3. Radiazione infrarossa. $5 \cdot 10^{11} \text{ Hz} < \nu < 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. La radiazione infrarossa viene spontaneamente emessa dai corpi caldi.
4. Radiazione visibile (luce). $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < \nu < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. La luce viene emessa dalle cariche di atomi e molecole in movimento per agitazione termica a temperature molto elevate (alcune migliaia di gradi). Lo spettro di radiazione emesso dal sole, la cui temperatura superficiale è circa 6000 gradi, va dall'infrarosso all'ultravioletto.
5. Radiazione ultravioletta. $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < \nu < 3 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$. Viene prodotta, ad esempio, quando un gas è sottoposto a una scarica elettrica. La radiazione ultravioletta prodotta dal sole viene in buona parte assorbita nella parte alta dell'atmosfera (a un'altezza superiore a 80 chilometri) che così si ionizza (ionosfera).
6. Raggi X. $3 \cdot 10^{17} \text{ Hz} < \nu < 5 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$. Vengono emessi, ad esempio, quando un fascio accelerato di elettroni colpisce un materiale solido: il brusco rallentamento degli elettroni provoca una radiazione elettromagnetica costituita soprattutto di raggi X.
7. Raggi γ . $\nu > 10^{18} \text{ Hz}$. La loro emissione è associata a molti processi nucleari quali, ad esempio, i decadimenti radioattivi.

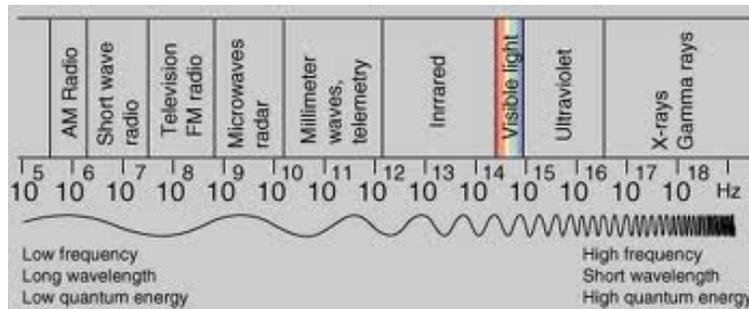


Figura 42: Spettro elettromagnetico.

6 Elenco delle attività di laboratorio

1. Verifica sperimentale della legge di Coulomb mediante bilancia a torsione.
2. Elettrizzazione statica di conduttori e isolanti.
3. Voltmetri.
4. Bottiglia di Leida.
5. Condensatori piani e cilindrici.
6. Amperometri (galvanometri).
7. Circuiti in serie e in parallelo.
8. Gabbia di Faraday.
9. Correnti ad arco.
10. Esperienza di Ørsted.
11. Macchina di Wimshurst
12. Macchina di Van de Graaff.
13. Motori elettrici.
14. Principio di funzionamento della dinamo.

Per ulteriori approfondimenti degli argomenti affrontati in queste note si consigliano i seguenti libri di testo

1. Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini, *Fisica II. Elettromagnetismo e ottica.*, Liguori editore, 1988.
2. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sand, *Lectures on physics.* Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
3. Piero Caldirola, Marcello Fontanesi, Elio Sindoni, *Elettromagnetismo.* Parte seconda. Tamburini Masson Editori, Milano 1976.
4. Paul A. Tipler, *Corso di Fisica. Elettrocità. Magnetismo. Ottica.* Zanichelli editore 1995.
5. David Hallyday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fondamenti di fisica. Elettromagnetismo.* Terza edizione, Zanichelli editore, 2009

Dalla rete

1. Il fisico Sheldon Lee Glashow, premio Nobel per la fisica nel 1979, presenta una breve storia dell'elettromagnetismo (80 minuti circa). Lo scopo è quello di raccontare a un pubblico di non esperti le più importanti scoperte di elettricità, di magnetismo e le loro profonde connessioni.
www.youtube.com/watch?v=u3F8VzEgLTs
2. Nel sito del MIT (Massachusetts Institute of Technology) è disponibile molto materiale di qualità (appunti e video). In particolare si segnala (ma non è l'unico) il corso del Prof. Walter Lewin: *Physics II: Electricity and Magnetism*
<http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/>
3. Nella sezione "materiali gratuiti" del sito di Geogebra
www.geogebra.org
sono disponibili molte figure dinamiche che descrivono esperimenti virtuali e altre che aiutano a capire concetti chiave della teoria dell'elettromagnetismo.
4. Ipertesti sull'elettromagnetismo, abbastanza curati, si possono trovare nel sito
www.openfisica.com/fisica_ipertesto/magnetismo/
5. Museo virtuale di Fisica del liceo Foscarini (Venezia):
museo.liceofoscarini.it/virtuale/escamagn.html?
6. Origine del campo magnetico: teorema di Ampere e di Gauss.
www.ba.infn.it/depalma/lezioni/ampere_gauss.pdf?

7. Video dei costruttori del treno a levitazione magnetica di Shanghai

<http://www.youtube.com/watch?v=weWmTldrOyo>

8. Il treno più veloce del mondo: JR-Maglev, 581 km/h;

<http://www.youtube.com/watch?v=VuSrLvCVoVk&feature=related>

9. Una bella biografia di Niels Bohr:

www.youtube.com/watch?v=-QDn6wkiFTs

Nella stesura di queste note mi sono stati molto utili gli appunti del Prof. *Fausto Gelmini* che qui colgo l'occasione di ringraziare; i suoi scritti, che coniugano chiarezza e sintesi, mi hanno aiutato a comprendere concetti e argomenti di un mondo a me non così familiare. Ovviamente, eventuali errori contenuti in queste note sono solo ed esclusivamente imputabili al sottoscritto.