Note sul calcolo integrale

Mauro Saita
Per segnalare refusi o errori scrivere, per favore, a:
maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, febbraio 2016

Indice

[1]

[1] Nome file: Calcolo_integrale_1_2016.tex

1 Introduzione al concetto di integrale.

Prima di dare definizioni rigorose si vuole descrivere in modo informale il concetto di integrale definito e il teorema fondamentale del calcolo integrale presentando due problemi: il calcolo dello spazio percorso da una particella in moto rettilineo, quando si conosca la funzione velocità, e il calcolo dell'area di una parabola.

Problema 1. Trovare lo spazio percorso, quando si conosca la velocità.

Il caso del moto uniforme.

Si consideri un punto che, nell'intervallo di tempo fra l'istante iniziale t_0 e l'istante finale t, si muove lungo la retta reale con velocità costante. Sia $s(t)$ la posizione del punto all'istante t e $v(t) = v$ la sua velocità, supposta costante. *Qual è lo spazio percorso dal punto?*

La risposta a questo quesito è ovvia ma significativa: la distanza percorsa dal punto, dall'istante t_0 all'istante t, è il prodotto della velocità v (costante) per l'intervallo di tempo $t - t_0$

$$s(t) - s(t_0) = v \cdot (t - t_0) \tag{1.1}$$

Tale grandezza ammette la seguente interpretazione geometrica: il grafico della velocità in funzione del tempo, si osservi la figura 1, è un segmento parallelo all'asse dei tempi mentre la distanza percorsa $s(t) - s(t_0)$ e l'area del rettangolo ombreggiato.

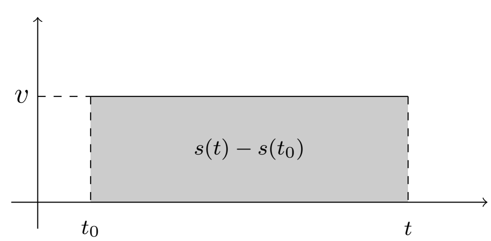

Figura 1: Moto rettilineo uniforme: grafico della velocità in funzione del tempo.

Il caso del moto a velocità variabile.

Un punto si muove lungo la retta reale con velocità che varia in modo continuo rispetto al tempo. Sia $s(t)$ la posizione del punto all'istante t e $v(t) = s'(t)$ la sua velocità. *Qual è lo spazio percorso dal punto nell'intervallo di tempo fra l'istante iniziale t_0 e l'istante finale t?*

L'idea è quella di suddividere l'intervallo di tempo $t - t_0$ in tanti intervallini talmente piccoli da poter supporre che su ognuno di essi la velocità sia costante. Lo spostamento del punto durante uno di questi intervallini di tempo è approssimativamente uguale al prodotto $v(\tau)\,\Delta t$, dove τ è un istante arbitrario che appartiene a quell'intervallino di tempo e Δt è l'ampiezza dello stesso intervallino di tempo. Anche se, come si vedrà in seguito, non è strettamente necessario si scelgano gli intervallini di tempo tutti *uguali*, cioè si fissino degli istanti t_i $(i = 1, ..., n)$ in modo tale che si abbia $t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ e che, per ogni $i = 1, ..., n$, l'ampiezza di ogni intervallino $[t_{i-1}, t_i]$ sia

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{t - t_0}{n}$$

Se in ognuno di questi intervallini $[t_{i-1}, t_i]$ si sceglie in modo arbitrario un altro istante di tempo $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ vale, in modo approssimativo, l'uguaglianza

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\, \Delta t$$

Questa uguaglianza approssimata sarà tanto più precisa, quanto più piccoli saranno gli intervalli di tempo Δt. Quindi, anche nel caso di velocità variabile, *la distanza percorsa dal punto è rappresentata dall'area delimitata dal grafico della funzione velocità e dall'asse del tempo.*

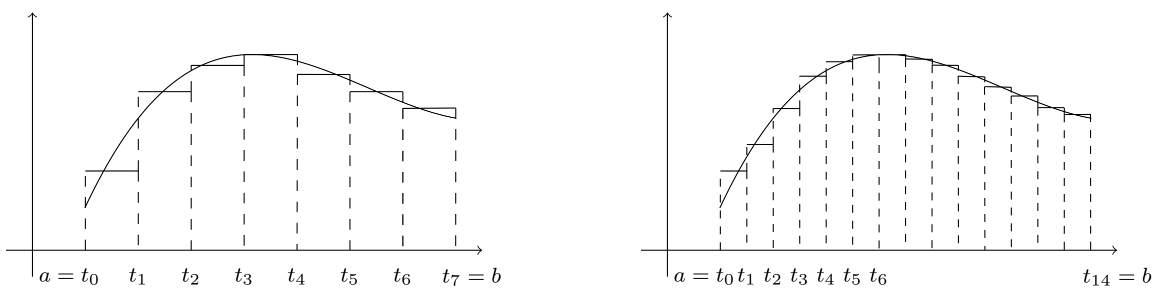

Figura 2: La funzione velocità, su ogni intervallino di tempo, è approssimata da un valore costante: più piccoli sono gli intervallini migliore è l'approssimazione.

Per determinare in termini esatti tale area si è allora condotti a prendere in considerazione il limite delle somme del tipo $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\, \Delta t$ quando Δt tende a zero. Il limite di tale somme (che verrà definito in modo rigoroso e si dimostrerà esistere) si denota $\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$, cioè si pone, per definizione,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\, \Delta t = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

Da questa definizione si ottiene l'uguaglianza esatta

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = s(t) - s(t_0) \tag{1.3}$$

che si può riscrivere così

$$\int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau = s(t) - s(t_0) \tag{1.4}$$

La formula (1.4) costituisce il cosiddetto *teorema fondamentale del calcolo integrale.* Essa permette di trovate l'integrale $\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$ quando $v = s'$ è la derivata di una funzione s. In tal caso, l'integrale è dato dalla variazione $s(t) - s(t_0)$ della funzione s (una antiderivata o primitiva della funzione integranda v) sull'intervallo di integrazione.

Problema 2. Calcolo di un'area.

Trovare l'area S della figura compresa tra il grafico della parabola $f(x) = x^2$ e l'asse delle x, quando x varia nell'intervallo $[0, 1]$.

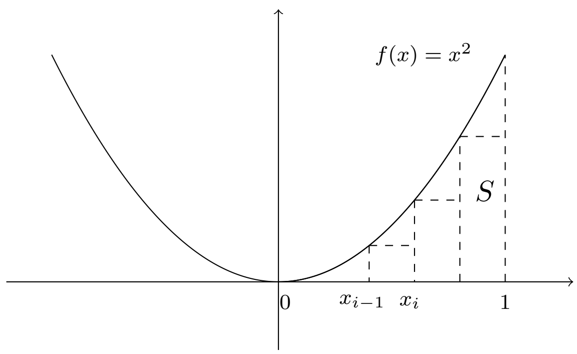

Figura 3: Approssimazione un'area S al di sotto di un grafico mediante la somma delle aree di rettangoli.

Si suddivida l'intervallo $[0, 1]$ in n intervallini, cioè si fissino i punti

$$x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = 1$$

Su ogni intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione $f(x) = x^2$ assume valore minimo nell'estremo di sinistra e il suo valore è $f(x_{i-1})$ mentre l'ampiezza di ogni intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ è

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Pertanto si può ragionevolmente approssimare per difetto l'area S delimitata dalla parabola, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ mediante somme di aree di rettangoli (come in figura) di base Δx_i e altezza $f(x_{i-1})$:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

Se si vuole ottenere una vera uguaglianza (e non un'uguaglianza approssimata) occorre passare al limite

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i = \int_0^1 f(x)\, dx \tag{1.5}$$

dove λ è la massima ampiezza degli intervallini $[x_{i-1}, x_i]$.

Per determinare l'area S si può fare così: si scelga la partizione

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \ldots\ldots x_i = \frac{i}{n}, \ldots\ldots x_n = 1$$

L'intervallo $[0, 1]$ risulta diviso in n intervallini $[x_{i-1}, x_i]$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$) ognuno dei quali ha ampiezza $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$. Inoltre $f(x_{i-1}) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$. Quindi l'area S si può approssimare per difetto così

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \tag{1.6}$$

Ricordando che, per ogni intero positivo k vale la formula

$$1^2 + 2^2 + \ldots k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

l'uguaglianza (1.6) si scrive

$$S \approx \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

Per ottenere una vera uguaglianza (e non un'uguaglianza approssimata) bisogna passare al limite per $\Delta x \to 0$ o equivalentemente per $n \to +\infty$. Si ottiene

$$S = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1) = \frac{1}{3}$$

Quindi l'area S della figura compresa tra il grafico della parabola $f(x) = x^2$ e l'asse delle x, quando x varia nell'intervallo $[0, 1]$ vale $\frac{1}{3}$ mentre l'area del segmento parabolico (cioè della regione di piano limitata dalla parabola e dalla retta $y = 1$) è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico. Questo è un caso particolare di un classico risultato dimostrato da Archimede con metodi puramente geometrici.

L'esempio appena presentato mostra che il problema del calcolo delle aree ha la *stessa forma matematica* del problema del calcolo dello spazio, nota la velocità. Se si trova una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$, si può concludere che

$$S = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0)$$

Nel caso in esame, basta prendere $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Dunque

$$S = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Segue che l'area del segmento parabolico (cioè della regione di piano limitata dalla parabola e dalla retta $y = 1$) è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico.

2 Teoria dell'integrazione secondo Riemann

Veniamo adesso a una definizione rigorosa di integrale. Ci sono diverse teorie dell'integrazione; quella che noi studieremo è la teoria dell'integrazione secondo Riemann. Il concetto di integrale di Riemann può essere introdotto in due modi equivalenti: come limite di somme di Riemann (dette anche somme di Cauchy-Riemann), oppure in termini di somme superiori e somme inferiori.

Definizioni preliminari.

Definizione 2.1. *Sia* $[a, b]$ *un intervallo della retta reale. Si chiama* partizione P *l'insieme ordinato* $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *di un numero finito di punti il primo del quale coincide con* a *e l'ultimo con* b

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$$

Ogni partizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ definisce n sotto-intervallini

$$[x_0, x_1] \quad [x_1, x_2] \quad ...... \quad [x_{n-1}, x_n]$$

La lunghezza di $[x_{k-1}, x_k]$ è $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Definizione 2.2. *Si chiama* parametro di finezza *della partizione* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *il numero*

$$|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$$

vale a dire la massima tra le lunghezze dei sotto-intervalli della partizione.

Per i nostri scopi, più piccolo è il parametro di finezza, meglio è.

2.1 Integrale (nel senso di Riemann) come limite di somme

Per definizione, una *partizione* (o *suddivisione*) P dell'intervallo $[a, b]$ è una scelta di un numero finito di punti

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m = b$$

Ogni partizione $P = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ dell'intervallo $[a, b]$ definisce m sotto-intervallini

$$[a_0, a_1] \quad [a_1, a_2] \quad ...... \quad [a_{m-1}, a_m]$$

La lunghezza di $[a_{k-1}, a_k]$ è $\Delta_k = a_k - a_{k-1}$. Il *parametro di finezza* della partizione $P = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ è per definizione il numero

$$|P| = \max_{i=1,\ldots,m} (a_i - a_{i-1})$$

vale a dire la massima tra le lunghezze dei sotto-intervalli della partizione. Per i nostri scopi, più piccolo è il parametro di finezza, meglio è.

Una *partizione marcata*, o *partizione puntata*, di $[a, b]$ consiste in una partizione

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m = b$$

dell'intervallo $[a, b]$, insieme a una ulteriore scelta di punti $\{x_1, ..., x_m\}$, tali che

$$x_1 \in [a_0, a_1], \;\; x_2 \in [a_1, a_2], ..., \;\; x_m \in [a_{m-1}, a_n]$$

I punti $\{x_1, ..., x_m\}$ sono dunque intercalati a quelli della partizione $P = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$:

$$a = a_0 \leq x_1 \leq a_1 \leq x_2 \leq a_2 < \cdots\cdots < a_{m-1} \leq x_m \leq a_m = b \tag{2.1}$$

Per non appesantire troppo le notazioni, qui si denota ancora con la lettera P una partizione puntata.

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo compatto $[a, b]$. Non si richiede che f sia continua, perchè il caso di funzioni non continue è importante. Si potrebbe richiedere che f sia limitata su $[a, b]$; ma anche questa richiesta è superflua, perchè si dimostra facilmente che se una funzione è integrabile, nel senso che verrà chiarito in questo paragrafo, essa è necessariamente limitata.

A ogni partizione marcata P di $[a, b]$,

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m = b, \qquad\qquad x_1 \in [a_0, a_1], \;\; x_2 \in [a_1, a_2], ..., \;\; x_m \in [a_{m-1}, a_n]$$

associamo la *somma di Riemann di f associata a P*, definita come

$$\mathcal{S}_f(P) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)\Delta_j$$

Se accade che le somme di Riemann di f si avvicinano quanto si vuole a un numero A, pur di prendere sufficientemente piccola la massima delle lunghezze $\Delta_j = a_j - a_{j-1}$ e *qualunque* sia la scelta dei punti $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$, allora si dice che la funzione f è integrabile (secondo Riemann) e che A è il suo integrale. Più precisamente, diamo la seguente definizione di funzione *integrabile secondo Riemann* e di *integrale di Riemann*:

Definizione 2.3 (Integrale secondo Riemann, come limite di somme)**.** *Una funzione* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* integrabile secondo Riemann *se esiste un numero reale A che soddisfa la seguente proprietà: per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$, tale che, per ogni partizione puntata P con parametro di finezza* $\max\limits_i\{a_j - a_{j-1}\} < \delta$*, si abbia*

$$|\mathcal{S}_f(P) - A| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Se un tale numero A esiste, allora è unico, si denota

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama integrale di Riemann *di f sull'intervallo compatto $[a, b]$.*

Se f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ e $A = \int_a^b f(x)\,dx$ è il valore del suo integrale, scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_1)\,\Delta t_i \tag{2.3}$$

e diremo che $\int_a^b f(x)\,dx$ è il *limite delle somme di Riemann*, fatto sull'insieme delle partizioni di $[a, b]$, al tendere a zero del parametro di finezza $|P|$ delle partizioni.

2.2 Integrale in termini di somme inferiori e somme superiori

Definizione 2.4. *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione limitata sull'intervallo* $[a, b]$ *e* P

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$$

una partizione dell'intervallo $[a, b]$*. Posto:*

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

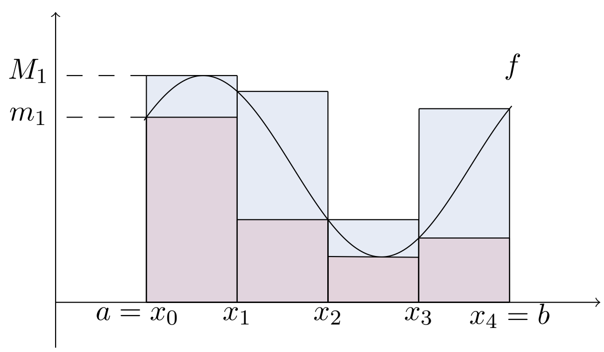

Figura 4: .

Si chiama somma inferiore *di* f *relativa alla partizione* P *il numero*

$$S^-(f; P) = \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Si chiama somma superiore *di* f *relativa alla partizione* P *il numero*

$$S^+(f; P) = \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Le seguenti proprietà delle somme inferiori e superiori si verificano facilmente:

1. Per ogni partizione P,
$$S^-(f;P) \leq S^+(f;P)$$
2. Se P_1 è una partizione più fine della partizione P_2, nel senso che $P_1 \supset P_2$ (cioè P_1 si ottiene da P_2 aggiungendo altri punti), allora
$$S^-(f;P_1) \geq S^-(f;P_2)$$
$$S^+(f;P_1) \leq S^-(f;P_2)$$
3. Siano P_1, P_2 due partizioni dell'intervallo $[a,b]$ e sia $P = P_1 \cup P_2$ la loro unione. Allora
$$S^-(f;P_1) \leq S^-(f;P) \leq S^+(f;P) \leq S^+(f;P_2) \tag{2.4}$$

Dalla proprietà (2.4) segue che ogni somma inferiore $S^-(f;P_1)$ è minore o uguale di ogni somma superiore $S^+(f;P_2)$, quali che siano le partizioni P_1, P_2. Segue che

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} S^-(f;P) \leq \inf_{P\in\mathcal{P}} S^+(f;P) \tag{2.5}$$

dove $\mathcal{P}$ denota l'insieme di tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a,b]$. Se succede che

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} S^-(f;P) = \inf_{P\in\mathcal{P}} S^+(f;P)$$

questo numero comune si chiama l'integrale di f su [a,b]

Definizione 2.5. (Integrale secondo Darboux) *Una funzione* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*, limitata sull'intervallo* $[a,b]$*, si dice* integrabile *su* $[a,b]$*, se*

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} S^-(f;P) = \inf_{P\in\mathcal{P}} S^+(f;P) \tag{2.6}$$

Il comune valore (2.6) si chiama allora integrale *di f su $[a,b]$ e si denota* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

I due modi di introdurre l'integrale (secondo Riemann e secondo Darboux, cioè come limite di somme oppure come valore comune dell'integrale inferiore e dell'integrale superiore) sono *equivalenti*. Infatti si dimostra la seguente

Proposizione 2.6. *Se una funzione è integrabile sull'intervallo compatto $[a,b]$ secondo la definizione (2.3), allora è limitata ed è integrabile anche secondo la definizione 2.5. Viceversa, ogni funzione integrabile secondo la definizione (2.5) è integrabile anche secondo la definizione (2.3). Inoltre, i valori dei due integrali coincidono.*

La dimostrazione di questo teorema non è difficile, ma non ci interessa riportarla.[2]

[2] L'idea della dimostrazione è semplice. Da un lato, le somme di Riemann sono incastrate fra somme inferiori e somme superiori; quindi, se tali somme convergono a uno stesso numero A, anche le somme di Riemann vi convergono. Viceversa, scegliendo opportune partizioni marcate, ci si può avvicinare quanto si vuole all'integrale inferiore e all'integrale superiore. Quindi, se l'integrale di Riemann esiste, deve esistere anche l'integrale di Darboux, e i due integrali hanno lo stesso valore.

Dal momento che i due concetti di integrale sono equivalenti, d'ora in poi ci riferiremo indifferentemente all'integrale secondo Riemann o secondo Darboux, usando l'una o l'altra definizione a seconda della convenienza.

2.3 Integrabilità di alcune classi di funzioni

Dalle proprietà delle somme inferiori e superiori e dalla definizione di integrale segue facilmente la seguente proposizione:

Proposizione 2.7 (Criterio di integrabilità)**.** *Una funzione* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*, limitata sull'intervallo compatto* $[a,b]$*, è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una partizione* X *tale che*

$$S^+(f;X) - S^-(f;X) \leq \varepsilon \tag{2.7}$$

In base a tale criterio, si dimostra il seguente teorema.

Teorema 2.8 (Integrabilità delle funzione continue sui compatti)**.** *Se* f *è una funzione reale continua su un intervallo compatto* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, allora* f *è integrabile su* $[a,b]$*.*

(La dimostrazione di questo teorema richiede la nozione di uniforme continuità ed è facoltativa).

Dimostrazione. Si sfrutta la proprietà di uniforma continuità di f. Per il teorema di Heine-Cantor, la funzione f, essendo continua su un compatto, è uniformemente continua. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|x_1 - x_2| < \delta$, allora $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ne segue che se P è una qualunque partizione di $[a,b]$ con parametro di finezza $|P| < \delta$, si ha

$$\sup\{f(x),\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} \;-\; \inf\{f(x),\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \varepsilon \tag{2.8}$$

e quindi

$$S^+(f;P) - S^-(f;P) \leq \varepsilon(b-a) \tag{2.9}$$

Da questo segue, per il criterio 2.7, che f è integrabile su K. □

Enunciamo tre teoremi, dei quali non diamo la dimostrazione.

Teorema 2.9. *Una funzione* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *la quale sia nulla su* $[a,b]$ *ecetto che in numero finito di punti* $p_1, ..., p_N$ *è integrabile e ha integrale nullo.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che l'enunciato vale se f è sempre nulla, tranne che in un unico punto p_1. Fissato $\varepsilon > 0$,

Ne segue che *se* f *è una funzione integrabile e una funzione* g *differisce da* f *solo in numero finito di punti, allora anche* g *è integrabile e i due integrali coincidono.* (Infatti, la differenza $f - g$ è sempre nulla, tranne che su un numero finito di punti, e quindi, per il teorema precedente, ha integrale nullo).

Questo significa che, *nel calcolo dell'integrale di una funzione* f*, possiamo cambiare i valori che* f *assume in un insieme finito di punti (o trascurare del tutto tali valori), senza che l'integrale cambi.*

Teorema 2.10 (Integrabilità delle funzioni monotòne)**.** *. Se f è una funzione monòtona su un intervallo compatto $[a; b]$, allora è integrabile.*

Teorema 2.11 (Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità)**.** *Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione limitata e supponiamo che l'insieme dei punti di discontinuità di f sia finito. Allora f è integrabile su $[a, b]$.*

2.4 Prime proprietà dell'integrale

Sia $\mathcal{R}[a, b]$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili sull'intervallo $[a, b]$. Qui di seguito sono elencate, senza dimostrarle, alcune proprietà dell'integrale.

Teorema 2.12. *Valgono le proprietà seguenti:*

1. *Se f, g sono funzioni Riemann-integrabili sull'intervallo $[a, b]$ allora anche $\lambda f + \mu g$ è una funzione Riemann-integrabile su $[a, b]$ (se f, g appartengono a $\mathcal{R}[a, b]$ e λ, μ sono numeri reali, allora anche $\lambda f + \mu g$ appartiene a $\mathcal{R}[a, b]$).*

2. (Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda)*. Per ogni $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ si ha*
$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{2.10}$$

3. (Omogeneità dell'integrale)*. Per ogni $f \in \mathcal{R}[a, b]$, e per ogni numero reale λ, si ha*
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.11}$$
Le proprietà 2. e 3. si sintetizzano dicendo che l'operatore di integrazione
$$\mathcal{R}[a, b] \xrightarrow{\int_a^b} \mathbb{R}, \qquad\qquad f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.12}$$
è lineare*.*

4. (Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione)*. Per ogni $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $c \in (a, b)$, le restrizioni di f agli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ sono integrabili e*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2.13}$$

5. (Monotonia dell'integrale)*. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ e $f_1(x) \le f_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora*
$$\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{2.14}$$

6. *Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $M \in \mathbb{R}$ è un numero tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora*
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M(b - a) \tag{2.15}$$

7. *Se* $[a,b] \xrightarrow{f} [c,d]$ *è Riemann integrabile e* $[c,d] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è continua, allora la funzione composta* $g \circ f$ *è Riemann integrabile su* $[a,b]$.

8. *Se* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *allora anche* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *e*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{2.16}$$

9. *Se* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *allora anche il loro prodotto* $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Definizione 2.13 (Integrale orientato)**.** *Se* $a > b$, *si pone, per definizione,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{2.17}$$

Con questa definizione, l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2.18}$$

vale per ogni scelta di a, b, c *(anche se* c *non è compreso tra* a *e* b*), a patto che gli integrali considerati esistano.*

2.5 Teorema della media

Teorema 2.14 (della media integrale)**.** *Se la funzione* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è integrabile su* $[a,b]$ *ed è limitata tra due costanti* m *ed* M, *nel senso che* $m \leq f(x) \leq M$ *per ogni* x *in* $[a,b]$, *allora l'integrale definito di* f *soddisfa le disuguaglianze*

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M \tag{2.19}$$

Se inoltre f *è continua in* $[a,b]$, *esiste un punto* c *in* $[a,b]$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(c) \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Da $m \leq f(x) \leq M$ segue, per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \tag{2.21}$$

che coincide con (2.19), in quanto $\int_a^b m dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M dx = M(b-a)$. Quindi, se la funzione f è (integrabile) e limitata su $[a,b]$, cioè $m \leq f(x) \leq M$, allora

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

Si supponga ora che f sia continua sull'intervallo $[a,b]$. Per tale funzione si ha:

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

e, per le disuguaglianze (2.19),

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x) \tag{2.22}$$

La funzione f è continua su $[a, b]$; quindi, per il teorema dei valori intermedi, essa assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore. Esiste allora un punto c tra a e b per il quale

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(c)$$

■

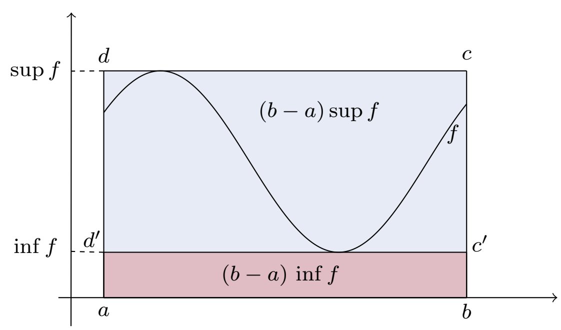

Figura 5: Se f è positiva e continua su $[a, b]$, e si interpreta l'integrale come l'area A della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle x, le disuguaglianze (2.22) sono evidenti: $(b-a)\sup f$ è l'area del rettangolo $abcd$ che contiene interamente A, mentre $(b-a)\inf f$ è l'area del rettangolo $abc'd'$ tutto contenuto in A.

2.6 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione 2.15. *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *integrabile su* $[a, b]$*. Si chiama* funzione integrale *di* f *(con punto base* a*) la funzione* $[a, b] \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ *definita nel modo seguente: per ogni* $x \in [a, b]$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{2.23}$$

Definizione 2.16. *Una funzione* $[a, b] \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *è una* primitiva *o una* antiderivata *della funzione* $[a, b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *se* G *è derivabile e* $G'(x) = g(x)$, *per ogni* $x \in [a, b]$ *(si intende di considerare la derivata destra in* a *e la derivata sinistra in* b*).*

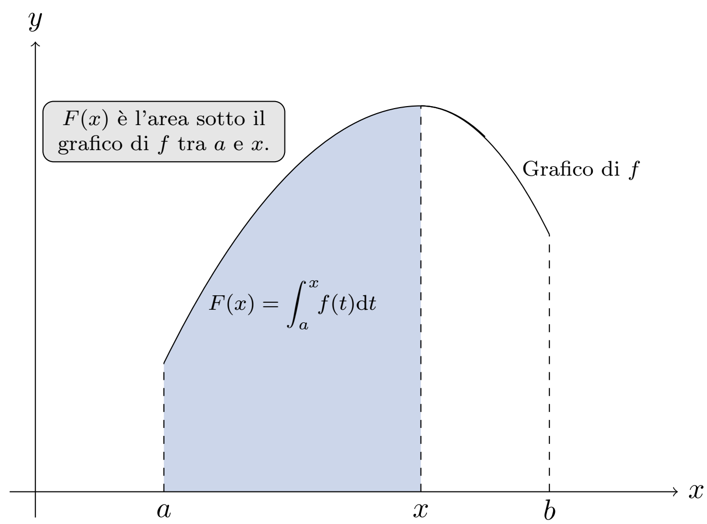

Figura 6: Interpretazione geometrica di funzione integrale nel caso di funzione integranda positiva.

Teorema 2.17 (Continuità della funzione integrale)**.** *Se* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è integrabile su* $[a, b]$ *allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.24}$$

è continua in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per ogni $x_0 \in [a, b]$, bisogna dimostrare che $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, ossia che $|F(x) - F(x_0)|$ tende a zero, per x che tende a x_0. Posto $x = x_0 + h$ si ottiene

$$\begin{aligned}
|F(x_0 + h) - F(x_0)| &= \left| \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| \quad \text{(teorema 2.12, p. 4)} \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\;dt \quad \text{(teorema 2.12, p. 8)}
\end{aligned}$$

Ora, ricordando che la funzione integranda è limitata, ossia che esiste un numero $\alpha > 0$ per il quale $|f(x)| < \alpha$, si ricava

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\;dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \alpha\,dt = \alpha|h| \tag{2.25}$$

Per h che tende a zero, la quantità $\alpha|h|$ tende a zero e, di conseguenza, anche $|F(x_0 + h) - F(x_0)|$ tende a zero. ∎

Teorema 2.18 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo* $[a, b]$*. Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *La funzione integrale di* f

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.26}$$

è derivabile e $F'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$ *(*$F(x)$ *è una primitiva* f*).*

2. *Se* $G(x)$ *è una qualunque primitiva di* f *su* $[a, b]$*, ossia* G *è derivabile e* $G'(x) = f(x)$ *per ogni* x *in* $[a, b]$*, allora*

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) \tag{2.27}$$

Dimostrazione. Si fissi un punto x_0 in $[a, b]$. Allora

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(c) \tag{2.28}$$

dove c è un opportuno punto tra x_0 e $x_0 + h$. La (2.28) segue dall'uguaglianza (2.20) del precedente lemma della media integrale, applicato all'intervallo di estremi x_0 e x_0+h. Quando h tende a zero, il punto c, compreso tra x_0 e $x_0 + h$, tende a x_0. Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x_0)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \tag{2.29}$$

Per l'arbitrarietà con cui si è scelto x_0 in $[a, b]$ la prima parte del teorema è dimostrata, cioè $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$. ∎

Sia ora $G(x)$ una qualunque funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ hanno la stessa derivata sull'intervallo $[a, b]$. Quindi differiscono per una costante:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + c \tag{2.30}$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene:

$$G(b) - G(a) = \Big[\int_a^b f(t)dt + c\Big] - \Big[\int_a^a f(t)dt + c\Big] \tag{2.31}$$

$$= \int_a^b f(t)dt \tag{2.32}$$

L'uguaglianza (2.27) risulta così dimostrata. ∎

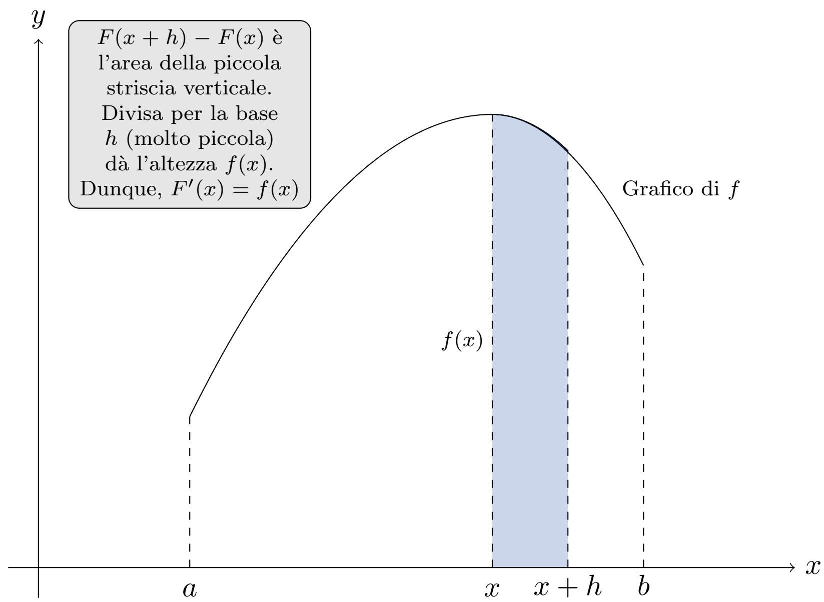

Figura 7: Dimostrazoine intuitiva del teorema fondamentale del calcolo integrale.

2.7 Cambio di variabili negli integrali definiti.

Teorema 2.19 (Cambio di variabili negli integrali definiti). *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo* $[a, b]$ *e sia* $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a, b]$ *una funzione biunivoca con derivata continua* $\varphi'(t) > 0$. *(Dunque* $\varphi(\alpha) = a$ *e* $\varphi(\beta) = b$.*) Allora vale questa uguaglianza:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b) \tag{2.33}$$

Prima dimostrazione.

Tramite la funzione biunivoca φ si può associare a ogni partizione

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

di $[a, b]$ una partizione

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

di $[\alpha, \beta]$ e viceversa, ponendo $x_i = \varphi(t_i)$, per $i = 0, ..., n$. (Qui si usa il fatto che φ sia crescente; se invece fosse decrescente, alla partizione $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$ si deve associare la partizione $\varphi(\beta) = a < \varphi(t_{n-1}) < \varphi(t_{n-2}) < \cdots < \varphi(\alpha) = b$).

Per il Teorema del Valore Medio si ha

$$x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{2.34}$$

per opportuni $\eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

L'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ è limite di somme di Riemann del tipo

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2.35}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, per ogni $i = 1, ..., n$. Siccome la scelta dei punti ξ_i è arbitraria, si può scegliere $\xi_i = \varphi(\eta_i)$. La corrispondente somma di Riemann di f sarà allora

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\eta_i))\varphi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{2.36}$$

Ora le somme del tipo (2.36) sono somme di Riemann per la funzione composta $f(\varphi(t)\varphi'(t)$ sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, e quindi convergono all'integrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Seconda dimostrazione.

Si considerino due funzioni G, H definite sull'intervallo $[\alpha, \beta]$ nel modo seguente:

$$G(y) = \int_a^{\varphi(y)} f(x)dx \qquad\qquad H(y) = \int_\alpha^y f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{2.37}$$

per ogni $y \in [\alpha, \beta]$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (insieme al teorema di derivazione di funzione composta, per la $G(y)$), queste due funzioni sono derivabili in $[\alpha, \beta]$ e hanno la stessa derivata:

$$G'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) \qquad\qquad H'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) \tag{2.38}$$

Dunque G e H differiscono per una costante. Ma nel punto $y = \alpha$ assumono lo stesso valore:

$$G(\alpha) = F(\alpha) = 0$$

Ne segue che G e H sono uguali:

$$\text{per ogni } y \text{ in } [\alpha, \beta] \qquad\qquad G(y) = H(y)$$

In particolare $G(\beta) = H(\beta)$, che è la tesi.

∎

2.8 Ricerca di primitive

Il teorema fondamentale del calcolo integrale riconduce il calcolo dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ alla determinazione di una primitiva di f, problema in molti casi difficile. L'integrale indefinito è l'insieme delle primitive di una funzione, la tabella riportata qui sotto è stata ottenuta dalla conoscenza delle derivate di alcune funzioni elementari. Il dominio delle funzioni è sottointeso mentre quello delle corrispondenti primitive è un qualsiasi intervallo contenuto nell'intersezione del dominio della funzione con il dominio della primitiva. La lettera c indica una qualsiasi costante reale.

Funzioni	Primitive
$x^\alpha \ \ (\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x \ \ (a > 0 \ \wedge \ a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\, a^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\ \mathrm{cotan}\, x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\sinh x$	$\cosh + c$
$\cosh x$	$\sinh + c$

Una seconda tabella di primitive si ottiene dalla conoscenza della regola di derivazione della funzione composta, infatti da $D[g(f(x))] = g'(f(x))f'(x)$ si ricava

$$\int g'(f(x))f'(x)\,dx = g(f(x)) + c$$

Funzioni	Primitive
$[f(x)]^{\alpha} f'(x)$, $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}\,[f(x)]^{\alpha+1} + c$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$f'(x)\,e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$f'(x)\,a^{f(x)} \quad (a > 0 \ \wedge \ a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\,a^{f(x)} + c$
$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$\dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2}$	$\tan f(x) + c$
$\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan f(x) + c$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arcsin f(x) + c$

2.9 Il metodo di sostituzione per il calcolo di una primitiva.

Per cercare una primitiva di una funzione assegnata, a volte può essere utile un cambio di variabili. Per descrivere questa tecnica, che si chiama *metodo di sostituzione* viene qui presentato il metodo nei due casi che si incontrano più spesso.

Metodo di sostituzione: Primo caso.

Si supponga di volere calcolare un integrale indefinito del tipo

$$\int f(h(u))\, du \tag{2.39}$$

Il problema consiste nel trovare una funzione $H(u)$ la cui derivata sia $H'(u) = f(h(u))$. Nel nostro caso la funzione integranda $f(h(u))$ è una funzione composta, dove f e h sono funzioni assegnate. Si supponga che la funzione $x = h(u)$ sia invertibile e si denoti con $u = h^{-1}(x) = k(x)$ la sua inversa. Per semplicità, si scriva $x = x(u)$, anziché $x = h(u)$, e analogamente, $u = u(x)$, al posto di $u = h^{-1}(x)$. Ma sia chiaro che questo significa che $x = x(u)$ è la specifica funzione h e che $u = u(x)$ denota l'inversa di h.

Si supponga inoltre che h abbia una derivata continua $h'(u)$ che non si annulli mai. Questa richiesta permette di dire che anche la funzione inversa $k = h^{-1}$ è derivabile. (Regola della derivata della funzione inversa.)

Il metodo di sostituzione si basa sulla seguente osservazione:

Sia $G(x)$ qualunque primitiva della funzione $f(x)u'(x)$, cioè si abbia

$$G'(x) = f(x)u'(x) = f(x)k'(x) \tag{2.40}$$

Allora la funzione composta $G(h(u))$ è una primitiva di $f(h(u))$ (che è la funzione integranda iniziale nell'integrale (2.39)).

Infatti, per la regola di derivazione di una funzione composta, si ha:

$$\frac{d}{du}\, G(h(u)) = G'(h(u))\, h'(u) = f(h(u))\, k'(h(u))\, h'(u) = f(h(u)) \tag{2.41}$$

perché $k'(h(u))\, h'(u)$. (Infatti, per la regola di derivazione della funzione inversa $k = h^{-1}$,

$$k'(h(u)) = \frac{1}{h'(u)}$$

e quindi $k'(h(u))h'(u) = 1$). Riassumendo schematicamente. Per trovare una primitiva di $f(h(u))$, si può procedere nel modo seguente:

1. Si pone $h(u) = x$;
2. Si trova la funzione inversa $u = h^{-1}(x) = u(x)$;
3. Si considera la funzione $f(x)u'(x)$, dove $u(x) = h^{-1}(x)$ è l'inversa di $x = h(u)$;

4. Si cerca una primitiva $G(x)$ di $f(x)u'(x)$;
5. In $G(x)$ si opera la sostituzione $x = h(u)$, ottenendo così la funzione $G(h(u))$.

La funzione finale $G(h(u))$ sarà allora una primitiva di $f(h(u))$. In altri termini, per calcolare l'integrale indefinito

$$\int f(h(u))\,du \tag{2.42}$$

basta calcolare l'integrale indefinito

$$\int f(x)\,u'(x)dx \tag{2.43}$$

e poi effettuare la sostituzione $x = h(u)$.
Il simbolo

$$f(h(u))\,du \tag{2.44}$$

che appare sotto il segno di integrale, suggerisce la trasformazione giusta da fare, quando si effettua una sostituzione di variabili: se al posto di $h(u)$ si sostituisce $h(u) = x$ e al posto di du si sostituisce

$$du = u'(x)dx$$

dove $u(x) = h^{-1}(x)$, allora si passa automaticamente da (2.42) a (2.43). Dunque, se per denotare gli integrali indefiniti si usa la notazione di Leibniz (2.44) , il metodo di sostituzione si ricorda più facilmente e si effettua meccanicamente.

Ovviamente, non è detto che il metodo di sostituzione sia sempre praticabile. Ad esempio, il metodo fallisce se non si sa trovare esplicitamente la funzione inversa $u = h^{-1}(x)$; oppure se non si sa trovare una primitiva $G(x)$ di $f(x)u'(x)$.

Metodo di sostituzione: Secondo caso.

Si supponga di dovere calcolare un integrale indefinito del tipo:

$$\int f(h(u))h'(u)\,du \tag{2.45}$$

che differisce dal precedente integrale (2.39) perché ora nella funzione integranda compare il termine $h'(u)$. Si ponga $h(u) = x$ e sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$. Allora si vede subito che $F(h(u)$ è una primitiva di $f(h(u))h'(u)$. Infatti, per la regola di derivazione di una funzione composta, si ha:

$$\frac{d}{du}F(h(u)) = F'(h(u))h'(u) = f(h(u))h'(u)$$

Anche in questo caso la notazione simbolica di Lebniz suggerisce la cosa giusta da fare. Si ponga $h(u) = x$ e $dx = x'(u)du = h'(u)du$. Allora il metodo di sostituzione prende la forma

$$\int f(h(u))h'(u)\,du = \int f(x)\,dx = F(x) = F(h(u)) \tag{2.46}$$

In questo caso il metodo di sostituzione risulta semplificato, perché non è necessario trovare l'inversa della funzione $h(u)$.

Esempio. Calcolare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx$$

Soluzione. Si effettui il cambio di variabile, ponendo $2x = t$, ossia $x = \frac{t}{2}$. In termini più precisi, si definisceo la funzione $x = h(t) = \frac{t}{2}$, con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si ha $h'(t) = \frac{1}{2}$. Allora, per la formula del cambio di variabile, si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin h(t)) \, h'(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) dt = \frac{1}{2} [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Esempio. Calcolare: $\displaystyle\int \frac{1}{e^u + e^{-u}} \, du$

Posto $e^u = x$. Allora la funzione inversa è $u = \ln x$ e $du = u'(x)dx = \dfrac{1}{x}dx$. Quindi per il metodo di sostituzione (primo metodo) si ha

$$\int \frac{1}{e^u + e^{-u}} \, du = \int \frac{1}{x + x^{-1}} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x$$

Ora si torni alla variabile iniziale u con la sostituzione $x = e^u$, e così si trova la primitiva cercata: $\arctan e^u$.

Esempio. Calcolare: $\int e^u \sqrt{1 + e^u} \, du$

Si utilizzi il metodo di sostituzione, ponendo $1 + e^u = x = x(u)$. Con tale sostituzione l'espressione $e^u \sqrt{1 + e^u} \, du$ diventa

$$e^u \sqrt{1 + e^u} \, du = \sqrt{x(u)} \, x'(u) \, du$$

Si noti che, per la presenza del termine $x'(u) \, du = dx$, si è nel secondo caso del metodo di sostituzione. Allora

$$\int e^u \sqrt{1 + e^u} \, du = \int \sqrt{x(u)} x'(u) du = \int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

Ora al posto di x si deve porre: $x = 1 + e^u$. Quindi la primitiva cercata è $\frac{2}{3}(1 + e^u)\sqrt{1 + e^u}$.

Se invece non ci si fosse accorti di quel fattore $x'(u)du = e^u du$ che ci ha fatto usare il secondo caso del metodo di sostituzione, si poteva procedere nel modo seguente (Metodo di sostituzione: Primo caso). La funzione inversa di $x = 1 + e^u$ è $u = \ln(x - 1)$. Allora

$$du = u'(x)dx = \frac{1}{x - 1} dx$$

La regola di sostituzione, ponendo $1 + e^u = x$ e $du = \frac{1}{x-1}dx$, prende la forma:

$$\int e^u \sqrt{1 + e^u} \, du = \int (x - 1)\sqrt{x} \frac{1}{x - 1} dx = \int \sqrt{x} dx$$

e da qui si procede come sopra.

Esempio. Calcolare $\int \tan x\, dx$ e $\int \cot x\, dx$

Per definizione di tangente, si ha $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$. Posto $\cos x = t$. Non è necessario invertire questa relazione, in quanto è presente il termine $(-\sin x)dx = dt$ (è il secondo caso del metodo di sostituzione). Quindi

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{1}{t} dt = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

In modo analogo, con la sostituzione $\sin x = t$, si trova:

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|\sin x|$$

2.10 Integrazione per parti

Ricordiamo che se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili, la derivata del prodotto $f(x)g(x)$ è data dalla regola di Leibniz

$$\Big[f(x)g(x)\Big]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{2.47}$$

Se integriamo entrambi i membri e ricordiamo che una primitiva della derivata di una funzione è la funzione stessa, otteniamo

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \tag{2.48}$$

ovvero

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{2.49}$$

La (2.49) si chiama formula di *integrazione per parti.* Come al solito, l'uguaglianza (2.48) va intesa nel senso seguente: la somma di una qualunque primitiva di $f'(x)g(x)$ e di una qualunque primitiva di $f(x)g'(x)$ è uguale a $f(x)(g(x)$, *a meno di una costante additiva.* Allo stesso modo va interpretata la (2.49).

Esempio. Per calcolare $\int \ln x\, dx$, possiamo usare la formula di integrazione per parti (2.49), dove $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$. Si ha $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = 1$. Dunque

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} x = x \ln x - x$$

Esempio.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\, dx &= \int \sin x \sin x\, dx = -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cos x\, dx \\
&= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\, dx \\
&= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx \\
&= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x\, dx
\end{aligned}
$$

Portando l'integrale a primo membro, si ottiene

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \cos x \sin x}{2} \tag{2.50}$$

In modo del tutto analogo si trova

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2} \tag{2.51}$$

3 Integrali impropri o generalizzati

Finora abbiamo considerato solo integrali $\int_a^b f(x)dx$ dove l'intervallo $[a,b]$ è limitato e la funzione $f(x)$ è limitata su $[a,b]$. Ora vediamo come il concetto di integrale si definisce quando la funzione $f(x)$ è limitata ma l'intervallo di integrazione non è limitato, oppure quando la funzione non è limitata e l'intervallo di integrazione è limitato. Un esempio del primo tipo è l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \tag{3.1}$$

(L'intervallo $(1,+\infty)$ non è limitato). Un esempio del secondo tipo è

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \tag{3.2}$$

(La funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata vicino a 0).

In entrambi i casi si parla di integrali generalizzati (o impropri).

3.1 Integrali su intervalli non limitati

Sia f una funzione reale definita su un intervallo non limitato $[a,+\infty)$:

$$[a,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Diremo che f è *integrabile (o integrabile in senso generalizzato, o in senso improprio)* sulla semiretta $[a,+\infty)$ se f è integrabile su ogni intervallo $[a,t]$ con $t>a$ ed esiste finito il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{3.4}$$

In questo caso si pone, per definizione,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{3.5}$$

Se l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste (finito) si dice che tale integrale è *convergente*. Se il limite 3.4 è $+\infty$, si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è *divergente*.

In modo simile si definiscono le funzioni integrabili su intervalli non limitati del tipo $(-\infty,b]$.

3.1.1 Integrale di $1/x^a$

Teorema 3.1 (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$)**.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx \quad \begin{cases} \textit{diverge a } +\infty & \textit{se } a \leq 1 \\ \textit{converge (al numero } \dfrac{1}{a-1}\textit{)} & \textit{se } a > 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Se $a = 1$, abbiamo

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty \tag{3.7}$$

e quindi l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \tag{3.8}$$

vale $+\infty$, ossia è divergente.

Se $a \neq 1$, si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\, dx = \frac{1}{1-a}\Big[x^{1-a}\Big]_1^t = \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) \tag{3.9}$$

Ora

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx \quad \begin{cases} \text{diverge a } \ +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge (al numero } \dfrac{1}{a-1}) & \text{se } a > 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Esempio. *Vediamo se la funzione xe^x è integrabile (in senso improprio) sulla semiretta $(-\infty, 0)$. Per ogni $t < 0$, la funzione xe^x è integrabile su $[t, 0]$ (perché è continua) e si ha:*

$$\int_t^0 xe^x = (x-1)e^x\Big|_t^0 = -1 - (t-1)e^t \tag{3.11}$$

Ora si deve calcolare il limite per t che tende a $-\infty$. Si ottiene:

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 xe^x = \lim_{t \to -\infty} (-1 - (t-1)e^t) = -1 \tag{3.12}$$

Dunque la funzione xe^x è integrabile su $(-\infty, 0)$ e

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 xe^x = -1 \tag{3.13}$$

3.1.2 Criterio del confronto

A volte si può stabilire se una funzione è integrabile in senso generalizzato, senza bisogno di trovarne esplicitamente un'antiderivata. Può bastare un confronto con funzioni integrabili più semplici.

Teorema 3.2 (Criterio del confronto.)**.** *Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano funzioni continue definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$ e soddisfacenti*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{3.14}$$

Allora:

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{3.15}$$

In particolare:

1. *Se g è integrabile su I, anche f è integrabile su I;*

2. *Se f non è integrabile su I (cioè, se $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$), anche g non è integrabile su I (ossia, anche $\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$)*

Dimostrazione. Poiché le funzioni integrande f e g sono non-negative, gli integrali in questione sicuramente esistono[3], magari uguali a $+\infty$. Per la proprietà di monotonia dell'integrale, valgono le disuguaglianze

$$0 \leq \int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx \tag{3.16}$$

per ogni $t > a$. Passando al limite per $t \to +\infty$, si ha allora la tesi. □

L'enunciato del teorema è del tutto ragionevole quando si pensi alla seguente interpretazione geometrica. Poiché $0 \leq f(x) \leq g(x)$, la regione di piano compresa tra l'asse delle x e il grafico di $f(x)$ è tutta al di sotto del grafico di $g(x)$. Quindi, se l'area $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è finita, a maggior ragione l'area $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sarà finita. Mentre se l'area $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è infinita, a maggior ragione l'area $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sarà infinita.

Esempio. Stabilire se l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente.

Soluzione. La funzione e^{-x^2} è ovviamente integrabile su ogni intervallo $[0, b]$, in quanto è continua. Occorre studiare la sua integrabilità in un intorno di $+\infty$. Non si sa trovare esplicitamente un'antiderivata di e^{-x^2}. Osserviamo però che in un intorno di $+\infty$ (vale a dire per tutti gli x sufficientemente grandi) si ha

$$0 \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2} \tag{3.17}$$

(In realtà la 3.17 vale per ogni x in $(0, +\infty)$, perché $e^t > t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi

$$0 < \frac{1}{e^t} < \frac{1}{t} \tag{3.18}$$

per ogni $t > 0$). Siccome sappiamo già che in un intorno di $+\infty$ la funzione $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile, per il criterio del confronto possiamo concludere che l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente. □

3.1.3 Criterio del confronto asintotico

Un altro criterio per stabilire se una funzione è integrabile in senso generalizzato è il criterio del confronto asintotico. Ricordiamo una definizione. Date due funzioni $f(x), g(x)$, definite

[3] Ricordiamo che se una funzione reale $h(t)$ è crescente su un intervallo $(a, +\infty)$, allora sicuramente esiste (finito o $+\infty$) il limite $\lim_{t\to+\infty} h(t)$, e tale limite è uguale al sup di h su $(a, +\infty)$. Nel nostro caso, siccome le funzioni f e g sono non-negative, le funzioni integrali $\int_a^t f$ e $\int_a^t g$ sono crescenti, e quindi hanno limite per $t \to +\infty$.

entrambe su $(a, +\infty)$, con $g(x)$ sempre diverso da zero, si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ quando x tende a $+\infty$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x), \quad \text{per } x \to +\infty \tag{3.19}$$

se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{3.20}$$

Vale allora il seguente

Teorema 3.3 (Criterio del confronto asintotico.)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni non-negative continue definite su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$. Supponiamo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$. Allora $f(x)$ è integrabile su I se e solo se $g(x)$ è integrabile su I.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Quindi, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ sarà contenuto nell'intervallo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ per tutti gli x sufficientemente grandi. In altri termini, varranno definitivamente le due disuguaglianze

$$(1-\varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1+\varepsilon)g(x) \tag{3.21}$$

Ora la tesi segue subito dal teorema del confronto. Infatti, se $g(x)$ è integrabile sulla semiretta I, da

$$f(x) \leq (1+\varepsilon)g(x)$$

segue che $f(x)$ è integrabile; mentre, se $g(x)$ non è integrabile su I, da

$$(1-\varepsilon)g(x) \leq f(x)$$

segue che $f(x)$ non è integrabile.

Esempio. Stabilire se l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^5 + x^4 + 7} dx \tag{3.22}$$

converge.

Infatti, la funzione integranda è asintotica a $\dfrac{1}{x^2}$:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^5 + x^4 + 7} \sim \frac{1}{x^2}, \quad \text{per } x \to +\infty \tag{3.23}$$

Ne segue, per il criterio del confronto asintotico, che l'integrale 3.22 è convergente.

Esempio. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right) dx \tag{3.24}$$

è convergente.

Infatti, per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}$$

e $\frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}$ è integrabile sulla semiretta $[1, +\infty)$.

3.2 Integrali di funzioni non limitate

Vediamo ora come estendere il concetto di integrale definito a funzioni che non sono limitate in un intorno di un punto. Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $(a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Supponiamo che f non sia limitata in un intorno del punto a. Se esiste finito il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx \tag{3.25}$$

esso viene chiamato *integrale improprio*, o *generalizzato*, di f sull'intervallo $[a, b]$ e si denota ancora con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Come esempi guida, consideriamo le due funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, definite sull'intervallo $(0, 1]$. Ovviamente, entrambe non sono limitate vicino a 0. Nel primo caso, una primitiva di $f(x)$ su $(0, 1]$ è $\ln x$ e

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)dx = \lim_{c \to 0^+} \big[\ln(1) - \ln(c)\big] = +\infty$$

Nel secondo caso,

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c \to 0^+} \big[2\sqrt{x}\big]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

Quindi, $f(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile in senso generalizzato su $[0, 1]$, mentre $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ lo è (e il suo integrale vale 2).

3.2.1 Integrali di $1/x^a$. Criteri del confronto e del confronto asintotico

Con un conto del tutto analogo a quello svolto per studiare l'integrabilità di $\frac{1}{x^a}$ sull'intervallo $[1, +\infty)$, si ottiene il seguente

Teorema 3.4 (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di zero)**.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \quad \begin{cases} \textit{diverge a } +\infty & \textit{se } a \geq 1 \\ \textit{converge (al numero } \dfrac{1}{1-a}\textit{)} & \textit{se } a < 1 \end{cases} \tag{3.26}$$

Anche per gli integrali impropri di funzioni non limitate, valgono il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico.

Teorema 3.5 (Criterio del confronto.)**.** *Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano funzioni continue sull'intervallo $I = (a, b]$, entrambe non limitate vicino al punto a e soddisfacenti*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{3.27}$$

Allora:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{3.28}$$

In particolare:

1. *Se* g *è integrabile su* I*, anche* f *è integrabile su* I*;*

2. *Se* f *non è integrabile su* I *(cioè* $\int_a^b f(x)dx = +\infty$*), anche* g *non è integrabile (cioè, anche* $\int_a^b g(x)dx = +\infty$*).*

Teorema 3.6 (Criterio del confronto asintotico.)**.** *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *funzioni non-negative continue sull'intervallo* $I = (a, b]$*, entrambe non limitate vicino al punto* a*. Supponiamo* $f(x) \sim g(x)$ *per* $x \to a^+$*. Allora* $f(x)$ *è integrabile su* I *se e solo se* $g(x)$ *è integrabile su* I*.*

Le dimostrazioni di questi due teoremi sono del tutto simili a quelle già viste nel caso di integrali su intervalli illimitati, e non le ripeteremo.