CALCOLO DIFFERENZIALE
Parte Seconda

Mauro Saita
maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Gennaio 2016.[1]

Indice

[1] Nome file: 'Calcolo_differenziale_2_2016.tex'

1 Funzioni derivabili su un intervallo

1.1 Punti di massimo o minimo locale per una funzione

Definizione 1.1. *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un sottoinsieme* $D \subset \mathbb{R}$.

1. *Un punto* x_0 *in* D *è* punto di massimo locale *per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un* massimo locale *per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \geq f(x) \tag{1.1}$$

Se la disuguaglianza (1.1) *vale con il simbolo* $>$ *di maggiore in senso stretto per ogni* $x \neq x_0$, *si dice che* x_0 *è* punto di massimo locale stretto.

2. *Un punto* x_0 *in* D *è un* punto di minimo locale *per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un* minimo locale *per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \leq f(x) \tag{1.2}$$

Se la disuguaglianza (1.2) *vale con il simbolo* $<$ *di minore in senso stretto per ogni* $x \neq x_0$, *si dice che* x_0 *è* punto di minimo locale stretto.

La definizione di punto di massimo (o di minimo) per una funzione f *non richiede* affatto che la funzione f sia derivabile.

1.2 Teorema di Fermat

Anzitutto due definizioni.

Definizione 1.2. *Si dice che un punto* x_0, *appartenente a un insieme* $D \subset \mathbb{R}$, *è un punto* interno *a* D *se esiste un intorno* $I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, *di raggio* $r > 0$, *incluso in* D:

$$I(x_0; r) \subset D$$

In altri termini, x_0 *interno* a D significa che tutti i punti di $\mathbb{R}$ *sufficientemente vicini* a x_0 appartengono anch'essi a D.

Si noti che "x_0 *è interno a* D" è condizione più forte di "x_0 *appartiene a* D" (cioè , $x \in D$). Infatti, se x_0 è interno a D, allora appartiene a D; ma se x_0 appartiene a D, non è detto che sia interno a D. Ad esempio, il punto $x_0 = 0$ appartiene all'intervallo $D = [0, 1]$, ma non è interno a tale intervallo.

Definizione 1.3 (Punto stazionario)**.** *Un punto* x_0, *interno al dominio di una funzione* f, *si dice* punto critico *di* f *o* punto stazionario *di* f, *se* f *è derivabile in* x_0 *e*

$$f'(x_0) = 0$$

Teorema 1.4 (Fermat)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali definita su un insieme* $D \subset \mathbb{R}$*. Si supponga che:*

1. x_0 *sia un punto di massimo (o di minimo) locale per* f*;*
2. x_0 *sia interno a* D*;*
3. f *sia derivabile in* x_0*.*

Allora x_0 *è un punto stazionario di* f*, cioè* $f'(x_0) = 0$*.*

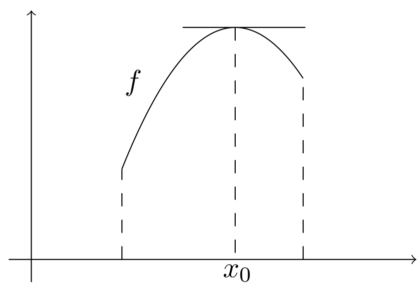


Figura 1: Interpretazione geometrica del teorema di Fermat: nel punto x_0, interno al dominio di f, la funzione è derivabile e x_0 è punto di massimo; la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale.

Dimostrazione. Per fissare le idee, si supponga che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Poiché, per ipotesi, x_0 è al tempo stesso un punto interno al dominio D di f e un punto di massimo locale, esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti[2]:

$$I \subset D \tag{1.3}$$

(perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{1.4}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Allora, per ogni $x \in I$

$$\text{se } x > x_0 \quad \text{si ha: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\text{se } x < x_0 \quad \text{si ha: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

[2]Per ipotesi esiste un intorno U di x_0 che soddisfa la condizione $U \subset D$ e esiste un intorno V di x_0 su cui vale $f(x) \leq f(x_0)$. Allora sull'intersezione $I = U \cap V$ (che è ancora un intorno di x_0) sono soddisfatte entrambe le condizioni.

Passando al limite per x che tende a x_0^+ e per x che tende a x_0^- , si ricava[3] rispettivamente $f'_+(x_0) \leq 0$ e $f'_-(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$. ∎

Si noti che nel teorema dimostrato è ovviamente essenziale l'ipotesi che x_0 sia interno a D. (Non basta che il punto x_0 appartenga a D). Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $D = [0, 1]$ ha un punto di massimo locale in $x_0 = 1$, anche se la derivata (sinistra) di f in x_0 non è nulla (è uguale a 1). Naturalmente questo non contaddice il teorema di Fermat. Semplicemente non sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, perché il punto $x_0 = 1$ non è interno a $D = [0, 1]$.

1.3 Teorema di Rolle

Teorema 1.5 (Rolle, 1690)**.** [4] *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione il cui dominio è l'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$*. Se*

1. f *è continua su* $[a, b]$
2. f *è derivabile sull'intervallo aperto* (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

allora esiste (almeno) un punto $\gamma \in (a, b)$ *in cui la derivata di* f *si annulla:*

$$f'(\gamma) = 0 \tag{1.5}$$

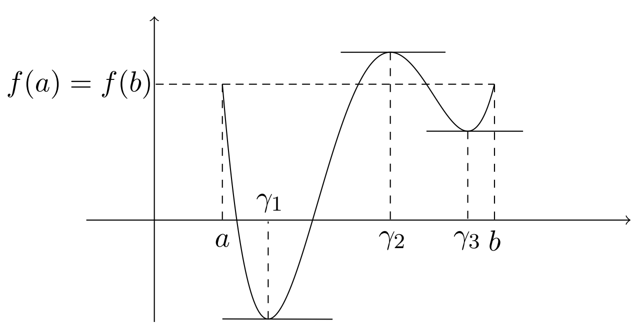


Figura 2: Interpretazione geometrica del teorema di Rolle.

[3] Qui si usa il cosiddetto teorema di *permanenza del segno*:
Sia g una funzione definita su un intorno U di un punto x_0 (con la possibile eccezione del punto x_0). Se, per ogni $x \in U \setminus x_0$, $g(x) \geq 0$ e se esiste (finito) il limite $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ *allora si ha $L \geq 0$.*
Questo teorema è del tutto evidente, se si pensa alla definizione di limite. La dimostrazione è semplice. Si supponga, per assurdo, che sia $L < 0$. Si prenda un $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, in modo tale che l'intervallino $J = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sia tutto contenuto nella semiretta negativa (cioè $L + \varepsilon < 0$). Per definizione di limite, esiste un intorno W di x_0 tale che per ogni $x \in W \setminus x_0$, si ha $g(x) \in J$, quindi $g(x) < 0$. Ma allora, per ogni x (diverso da x_0) dell'intervallino non vuoto $U \cap W$ si deve avere $g(x) \geq 0$ (per ipotesi) e al tempo stesso $g(x) < 0$. Assurdo.

[4] Michel Rolle (1652-1719), matematico francese.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass la funzione f, continua sul compatto $[a, b]$, assume il suo valore massimo M e il suo valore minimo m. Questo significa che esiste (almeno) un punto $x_M \in [a, b]$ ed esiste (almeno) un punto $x_m \in [a, b]$ tali che $f(x_M) = M$ e $f(x_m) = m$. Sono possibili due casi.

1. Sia x_M che x_m cadono negli estremi di $[a, b]$. In tale caso, per l'ipotesi $f(a) = f(b)$, si ha $M = m$. Ma allora f è costante, e quindi $f'(x) = 0$ in *ogni* punto x di (a, b).

2. Almeno uno dei due punti x_m, x_M è interno ad $[a, b]$. Allora, per il teorema di Fermat, in un tale punto la derivata si annulla .

Dunque, in ogni caso esiste (almeno) un punto γ nell'intervallo aperto (a, b) in cui la derivata si annulla. ∎

Le ipotesi del teorema di Rolle sono essenziali. Per esercizio, disegnare grafici di funzioni che soddisfano tutte le ipotesi del teorema di Rolle tranne una e mostrare che per tali funzioni il teorema NON vale.

1.4 Teorema di Lagrange (o del valore medio, o degli incrementi finiti)

Teorema 1.6 (di Lagrange)**.** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a, b)*. Allora esiste un punto* $\gamma \in (a, b)$ *per il quale si ha*

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a) \tag{1.6}$$

Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica: il numero $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della retta s che unisce i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $(\gamma, f(\gamma))$ appartenente al grafico di f in cui la retta tangente (il cui coefficiente angolare è $f'(\gamma)$) è parallela alla retta s.

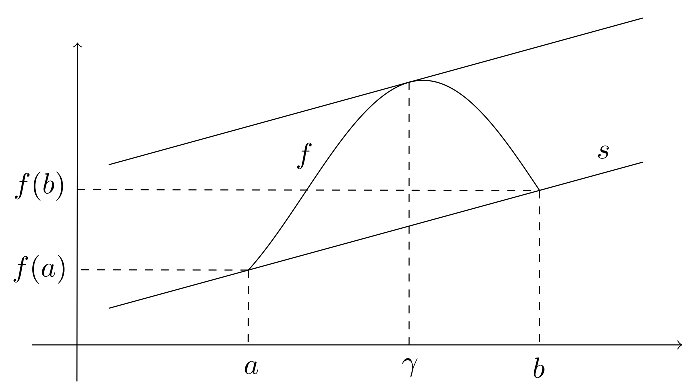


Figura 3: Interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione consiste nel costruire un'opportuna funzione $h(x)$ che soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Tale teorema, applicato alla funzione h, conclude la dimostrazione.

Si consideri la funzione il cui grafico è la retta che congiunge i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Sia $h(x)$ la funzione differenza tra $f(x)$ e $g(x)$, cioè $h(x) = f(x) - g(x)$. Si ha:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.7}$$

La funzione h è definita sull'intervallo $[a, b]$. Tale funzione è continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e assume lo stesso valore agli estremi:

$$h(a) = h(b) = 0$$

Quindi h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Per tale teorema, esiste un punto γ in (a, b) in cui $h'(\gamma) = 0$. La derivata di $h(x)$ è

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = h'(\gamma) = f'(\gamma) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che equivale a

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$$

■

Osservazione. Il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange sono equivalenti nel senso che da uno di essi è possibile dedurre l'altro e viceversa. In termini più precisi, si consideri l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabili sull'aperto (a, b). Per questa classe di funzioni, se vale il teorema di Rolle allora vale il teorema di Lagrange (si veda la dimostrazione del teorema di Lagrange proposta in questi appunti) e viceversa se vale il teorema di Lagrange allora vale il teorema di Rolle (ovvio, perchè il teorema di Rolle è un caso particolare di quello di Lagrange).

1.5 Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Teorema 1.7 (Cauchy, o degli inrementi finiti, o del valore medio). *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabili sull'intervallo aperto (a, b). Supponiamo $g'(x) \neq 0$ per ogni x in (a, b). Allora esiste (almeno) un punto $\gamma \in (a, b)$ per il quale*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x) \tag{1.9}$$

Si vede facilmente che tale funzione soddisfa, sull'intervallo $[a, b]$, tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Infatti è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) (perhé tali sono f e g). Inoltre, $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a) \\ \varphi(b) &= [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)\end{aligned}$$

Dunque, per il teorema di Rolle, esiste un punto γ in (a, b) in cui $\varphi'(\gamma) = 0$. Poiché

$$\varphi'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]g'(x)$$

in tale punto γ si ha

$$0 = \varphi'(\gamma) = [g(b) - g(a)]f'(\gamma) - [f(b) - f(a)]g'(\gamma)$$

che equivale a (1.8). (Si noti che si ha $g(b) - g(a) \neq 0$. Infatti, se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle, g' si annullerebbe in un punto di (a, b), contro l'ipotesi). ■

1.6 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema 1.8. *Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.*

Dimostrazione. Siano x_1, x_2 due punti qualsiasi in (a, b). Per il teorema di Lagrange, esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. ■

Osservazione. Si noti che nell'ultimo teorema è essenziale l'ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo* (un sottoinsieme *connesso* di $\mathbb{R}$). Ad esempio, la funzione

$$(0, 1) \cup (2, 3) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 2 & \text{se } x \in (2, 3) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio $D = (0, 1) \cup (2, 3)$, ma non è costante. (Ovviamente D non è un intervallo, cioè non è *connesso*).

1.7 Funzioni con derivate uguali su un intervallo

Teorema 1.9. *Siano f e g due funzioni reali, definite su un intervallo aperto $I = (a, b)$, con uguale derivata in ogni punto di $I = (a, b)$:*

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = g'(x) \tag{1.10}$$

Allora f e g differiscono per una costante.

Dimostrazione. La funzione

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

ha derivata nulla su I:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Dunque φ è una costante, diciamo $c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = c$$

Dunque f e g differiscono per una costante. ■

1.8 Funzioni crescenti o decrescenti

Definizione 1.10. *Si dice che una funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è* crescente *(o* crescente in senso lato*) su D (sottoinsieme* qualunque *di $\mathbb{R}$, non necessariamente un intervallo), se, per ogni $x_1, x_2 \in D$,*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1.11}$$

Se per ogni $x_1, x_2 \in D$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{1.12}$$

si dice che f è strettamente crescente *su D.*

In modo analogo si definiscono le funzioni decrescenti *e le funzioni* strettamente decrescenti*.*

Le funzioni crescenti oppure decrescenti si dicono monotòne*.Le funzioni strettamente crescenti oppure strettamente decrescenti si dicono* strettamente monotòne*.*

Teorema 1.11. *Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale derivabile su I. Allora f è crescente (in senso lato) su I se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$*

Dimostrazione.

Prima parte. f crescente implica $f'(x) \geq 0$ per ogni x.

Si fissi un punto $x_0 \in I$. Poiché, per ipotesi, f è crescente, il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è sempre maggiore o uguale a zero. Quindi il limite del rapporto incrementale, quando x tende a x_0, resta maggiore o uguale a zero:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Seconda parte. $f'(x) \geq 0$ per ogni x implica f crescente.

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, esiste un punto c, $x_1 < c < x_2$, tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché si ha $f'(c) \geq 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, abbiamo $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, ossia $f(x_1) \leq f(x_2)$. Dunque f è crescente (in senso lato) in I. ∎

1.9 Funzioni strettamente monotòne

Teorema 1.12 (Funzioni derivabili strettamente monotòne)**.** *Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale derivabile su I.*

1. *Se $f'(x) > 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I.*
2. *Se $f'(x) < 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente decrescente su I.*

Dimostrazione. Qui si dimostra il teorema nel caso di funzioni con derivata positiva in ogni punto. (L'altro caso si tratta in modo analogo).

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché per ipotesi $f'(c) > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, si deve avere $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Quindi si è dimostrato che, per ogni $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dunque f è strettamente crescente su I. ∎

Osservazione. Il teorema non si inverte. Se una funzione è strettamente crescente su un intervallo I ed è derivabile in I, allora si avrà senz'altro $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$ (per il teorema (1.11), perchè strettamente crescente implica crescente), ma in qualche punto la derivata potrebbe annullarsi. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Osservazione. L'implicazione "$f' > 0 \Longrightarrow f$ *strettamente crescente*" non vale se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$, definita su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo) ha derivata positiva su D, ma f non è strettamente crescente sul suo dominio D. Ovviamente f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ ed è crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$, ma non è crescente sul suo dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

1.10 Massimi e minimi

Se una funzione reale è definita su un intervallo $[a, b]$, i suoi eventuali punti di massimo e di minimo locale andranno ricercati tra:

1. i punti interni all'intervallo, in cui la funzione è derivabile con derivata nulla (punti stazionari interni);
2. i punti in cui la funzione non è derivabile;
3. gli estremi a e b.

Ci si pone il seguente quesito: sotto quali condizioni un punto stazionario interno è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione?

Sia f una funzione reale derivabile su un intorno $I = I(x_0; r)$ del punto x_0. Se x_0 è un punto stazionario per f, cioè $f'(x_0) = 0$. allora, dai teoremi sulle funzioni con derivata positiva o negativa, segue subito:

1. se $f'(x)$ è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0, x_0 è un punto di minimo locale per f;
2. se $f'(x)$ è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra di x_0, x_0 è un punto di massimo locale per f.

Un altro metodo per decidere se un punto stazionario x_0 sia un punto di massimo o di minimo locale per f utilizza la derivata seconda in x_0.

Teorema 1.13 (Test della derivata seconda)**.** *Se x_0 è un punto critico per f (punto interno in cui $f'(x_0) = 0$), allora:*

a) se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo locale.

b) se $f''(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo locale.

Dimostrazione. Si supponga $f''(x_0) > 0$ (Il caso b) è analogo). Si ha:

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

Ne segue (teorema di permanenza del segno) che $\frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$ per tutti gli $h \neq 0$ sufficientemente vicini a 0. Dunque $f'(x_0 + h)$ deve essere negativo per $h < 0$ e positivo per $h > 0$. Quindi x_0 è un punto di minimo locale per f. ∎

1.11 Regole di de L'Hospital

> *"Riconosco di dovere molto alle menti brillanti dei fratelli Bernoulli, in particolare del più giovane, che attualmente è professore a Groningen. Ho fatto libero uso delle loro scoperte".*
> (G.F. de L'Hospital[5], *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, 1696).

Teorema 1.14 (Joh. Bernoulli 1691, de L'Hospital 1696. Caso $\frac{0}{0}$.)**.** *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) e derivabili in (x_0, b). Se valgano le seguenti condizioni:*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{1.13}$$

allora esiste anche il limite $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.14}$$

Osservazione. Poichè f e g sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

In questo senso si dice che il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Dimostrazione. (Per il caso L finito). Anzitutto si osservi che se x è un qualunque punto in (x_0, b) allora si può scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ compreso tra x_0 e x, cioè soddisfacente: $x_0 < \gamma < x$.

Per dimostrarlo, si applichi il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni f, g sull'intervallo $[x_0, x]$. Poichè $f(x_0) = g(x_0) = 0$, per il teorema di Cauchy si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

[5] Guillaume François de L'Hospital (1661-1704), matematico francese, scrisse nel 1696 un testo di calcolo differenziale, che ebbe un ruolo importante nella diffusione di questa disciplina. Il marchese de L'Hospital fu allievo dei fratelli Bernoulli (membri di una ben nota famglia di scienziati svizzeri), in modo particolare di Johann Bernoulli (1667-1748), che verso il 1691/92 aveva pubblicato una delle prime esposizioni del calcolo differenziale e integrale. La "regola di de L'Hospital" è dovuta in realtà a Johann Bernoulli.

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x$, come si voleva dimostrare.

A questo punto si può concludere, in modo un po' sbrigativo ma sostanzialmente corretto, nel modo seguente. Quando x tende a x_0, il punto γ, compreso tra x e x_0, deve tendere a x_0. Quindi, poiché

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

e $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, anche il limite $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ deve esistere, e deve essere uguale a L.

Se si vuole essere più rigorosi, si può arrivare alla tesi usando la "ε-δ definizione" di limite. Si prenda allora un arbitrario $\varepsilon > 0$. Poiché, per ipotesi, $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta) \qquad \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon \tag{1.15}$$

Ora si prenda un qualunque x in $(x_0, x_0 + \delta)$. Per quanto abbiamo visto sopra,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x < x_0 + \delta$. Siccome tale γ è compreso tra x_0 e $x_0 + \delta$, per la (1.15) si ha $\left| \dfrac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L \right| < \varepsilon$ e quindi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L \right| < \varepsilon$$

Questo prova, per definizione di limite, che anche

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.16}$$

■

Osservazione. Ovviamente il teorema di de L'Hospital vale anche per i limiti da sinistra ($x \to x_0^-$) e quindi per il limite (ordinario) per $x \to x_0$.

Vale una regola di de L'Hospital anche nel caso di un rapporto tra funzioni che tendono entrambe all'infinito quando x tende a x_0. (Forma di indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$). Qui si riporta l'enunciato, senza dimostrazione.

Teorema 1.15 (de L'Hospital, caso $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$

2. *$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, b)$.*

3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{1.17}$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.18}$$

Infine, le regole di de L'Hospital valgono anche per le forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ quando x tende a $+\infty$ o $-\infty$. L'enunciato è sempre dello stesso tipo: se esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(finito o infinito) allora esiste anche il limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ed è uguale al precedente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Osservazione. Il teorema di de L'Hospital dice che (sotto opportune ipotesi), se esiste il limite di $f'(x)/g'(x)$ allora esiste anche il limite di $f(x)/g(x)$, e i due limiti sono uguali. Non dice che se esiste il limite di $f(x)/g(x)$ allora deve esistere anche il limite di $f'(x)/g'(x)$. Potrebbe esistere il limite di $f(x)/g(x)$, ma non quello di $f'(x)/g'(x)$. Per esempio, se $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ma il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

non esiste.

1.12 Alcuni limiti importanti

Utilizzando i teoremi di de L'Hospital è facile trovare il valore di alcuni limiti notevoli.

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.19}$$

Il limite si presenta sotto la forma di indeterminazione 1^∞. Si noti che

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \tag{1.20}$$

Si studi allora il limite della funzione all'esponente. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

Poichè sono soddisfatte le ipotesi del teorema di de L'Hospital (caso $\frac{0}{0}$), si studi il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+1/x)^{-1}(-x^{-2})}{-x^{-2}} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1$$

Poich la funzione $y \longmapsto e^y$ è continua in $y=1$, segue che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

In modo del tutto analogo si dimostra che anche

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.21}$$

2. Si calcoli il limite:
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \tag{1.22}$$

Questo limite presenta una indeterminazione della forma $0\cdot\infty$. Si scriva

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \tag{1.23}$$

In questo modo, si ottiene una indeterminazione del tipo ∞/∞. Ricorrendo al teorema di de L'Hospital, si trova il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \tag{1.24}$$

Dunque, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

3. In modo del tutto analogo, si dimostra che, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0 \tag{1.25}$$

Infatti, basta scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \tag{1.26}$$

e applicare la regola di de L'Hospital, calcolando il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^a}{a} = 0 \tag{1.27}$$

1.13 Confronto tra infiniti

Teorema 1.16 (Confronto tra infiniti)**.** *Qualunque sia il numero reale $a > 0$, quando x tende a $+\infty$ la funzione esponenziale e^x tende all'infinito più velocemente di x^α, mentre x^α tende all'infinito più velocemente della funzione logaritmo* $\ln x$.

Si ricordi che, date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, tali che $f(x) \longrightarrow +\infty$ e $g(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \to a$, (dove a può essere un numero reale, oppure $-\infty$, oppure $+\infty$), si dice che $f(x)$ *tende all'infinito più velocemente di* $g(x)$, se

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

o, in modo equivalente, se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. Dunque si può enunciare il teorema dicendo che, *per ogni* $\alpha > 0$, valgono questi limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \tag{1.28}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \tag{1.29}$$

Dimostrazione. Il limite (1.28) è del tipo ∞/∞ e sono soddisfatte le ipotesi per usare la regola di de L'Hospital. Ovviamente è sufficiente dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ nell'ipotesi che $\alpha = m$ sia un numero positivo intero.[6] Applicando m volte il teorema di de L'Hospital a x^m/e^x, otteniamo alla fine il rapporto $m!/e^x$, che non è una forma indeterminata e ovviamente tende a zero.

In modo analogo si procede per il limite (1.29). Applicando la regola di de L'Hospital, siamo condotti a valutare il limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

[6] Se α non fosse intero, prendiamo un intero $m > \alpha$. Poiché $0 < \frac{x^\alpha}{e^x} < \frac{x^m}{e^x}$, dal teorema del confronto segue che, se $\frac{x^m}{e^x} \to 0$, anche $\frac{x^\alpha}{e^x} \to 0$.

Segue che il limite (1.29) è zero.

Osservazione. Dal limite (1.28) segue che, per ogni $\alpha > 0$, vale:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha} = 0$$

Infatti, con la sostituzione $1/x = t$, il limite si trasforma in

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0$$

2 Rapporto tra derivabilità e limiti della derivata

Si vogliono indagare le seguenti questioni:

a) *Se il limite* $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ *esiste, si può concludere che esiste la derivata destra* $f'_+(x_0)$ *di* f *in* x_0*? (Idem per la derivata sinistra e per la derivata).*

b) *Se il limite* $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ *non esiste, si può concludere che la derivata destra* $f'_+(x_0)$ *di* f *in* x_0 *non esiste?*

Anticipando sulle conclusioni:

a) La risposta alla prima domanda è negativa; ma se si aggiunge l'ipotesi che f sia continua in x_0, la risposta è affermativa.

b) La risposta alla seconda domanda è negativa.

2.1 Relazione tra derivate e limiti delle derivate

Anzitutto conviene richiamare le definizioni. Si dice derivata di f nel punto x_0 (rispettivamente: derivata destra, o derivata sinistra) il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ per $x \to x_0$ (rispettivamente: per $x \to x_0^+$, per $x \to x_0^-$). La derivata si denota con $f'(x_0)$ (rispettivamente: con $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$). Dunque, quando i limiti in questione esistono finiti, per definizione, si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.2}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.3}$$

Ovviamente:

Una funzione f *è derivabile in* x_0 *se e solo se esistono, nel punto* x_0*, sia la derivata destra sia la derivata sinistra, e sono uguali tra loro.*

Infatti, per una qualunque funzione $g(x)$ vale $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ se e solo se il limite da sinistra $\lim_{x \to x_0^-} g(x)$ e il limite da destra $\lim_{x \to x_0^+} g(x)$ esistono entrambi e sono entrambi uguali a L. (Nel nostro caso, la funzione $g(x)$ è il rapporto incrementale relativo a x_0).

Teorema 2.1. *Sia* f *una funzione reale definita su un intorno aperto* I *del punto* x_0*. Se* f *è continua nel punto* x_0 *e derivabile in ogni punto* $x \neq x_0$ *allora valgono allora i fatti seguenti.*

1. *Se esiste finito il limite da destra* $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$*, allora esiste la derivata destra* $f'_+(x_0)$ *e*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \tag{2.4}$$

2. *Se esiste finito il limite da sinistra* $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$*, allora esiste la derivata sinistra* $f'_-(x_0)$ *e*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \tag{2.5}$$

3. *Di conseguenza: se esistono finiti sia* $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)(= f'_+(x_0))$ *sia* $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)(= f'_-(x_0))$ *e sono uguali tra loro – vale a dire, se esiste il* $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ *– allora* f *è derivabile in* x_0 *e*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x) \tag{2.6}$$

Osservazione 2.2. L'ipotesi che f sia continua in x_0 non si può eliminare, ossia l'affermazione "*Se esiste il limite di* $f'(x)$ *quando* $x \to x_0$*, allora esiste* $f'(x_0)$" non è corretta. Ad esempio, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Il limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ esiste e vale 0 (perchè $f'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$), ma f non è derivabile in $x_0 = 0$ (perchè non è continua in $x_0 = 0$).

Dimostrazione.

1. Supposto che esista (finito) il limite da destra $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ si deve dimostrare che esiste la derivata destra, e che essa coincide con tale limite. Per definizione, la derivata destra è il limite del rapporto incrementale da destra:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.8}$$

Essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di de L'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) \tag{2.9}$$

e così la tesi (2.4) è dimostrata.

Se si preferisce, per studiare il limite (2.8) si può utilizzare direttamente il teorema di Lagrange, del quale sono soddisfatte le ipotesi su ogni intervallo del tipo $[x_0, x]$. Per ogni x, esiste un γ tra x_0 e x per il quale vale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\gamma) \tag{2.10}$$

In breve[7], se $x \to x_0$, il punto γ (compreso tra x_0 e x) tende a x_0, e quindi, poichè per ipotesi esiste il $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e tali limiti sono uguali.

[7]Si veda la dimostrazione del teorema 1.14 di de L'Hospital, se si vuole essere più formali.

2. Come nel punto *1.* Si calcola il limite del rapporto incrementale da sinistra $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ usando L'Hospital.

3. Si tratta di un'immediata conseguenza dei due punti *1* e *2*:

se esistono (finiti) sia $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ (che abbiamo dimostrato essere $f'_+(x_0)$) sia $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ (uguale a $f'_-(x_0)$ e sono uguali tra loro – vale a dire, se esiste il $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ – allora esistono la derivata destra e la derivata sinistra e sono uguali tra loro. Di conseguenza f è derivabile in x_0 e

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x) \tag{2.11}$$

■

2.2 Osservazioni

Osservazione 2.3. Se f è continua su un intorno destro $[x_0, x_0 + r)$ di x_0 e

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty \tag{2.12}$$

Allora, sempre per il teorema di de L'Hôpital, se ne deduce che anche il limite da destra del rapporto incrementale è uguale a $+\infty$:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \tag{2.13}$$

Si scrive, anche se impropriamente, $f'_+(x_0) = +\infty$.

Analogamente, se f è continua su un intorno sinistro $(x_0 - r, x_0])$ di x_0 e

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty \tag{2.14}$$

si avrà

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \tag{2.15}$$

e si scrive $f'_-(x_0) = +\infty$.

Analoghe considerazioni valgono per i limiti per $x \to x_0^-$.

Osservazione 2.4. Può succedere che il $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ non esista, ma che la funzione f sia derivabile in x_0. Si veda il seguente esercizio.

Esercizio 2.5. *Verificare che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

è derivabile in $x_0 = 0$*, ma non esiste il* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$*.*

Soluzione. Per studiare la derivabilità di f in 0, si può usare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{2.17}$$

Dunque f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

La derivata $f'(x)$, per $x \neq 0$, è data da

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \tag{2.18}$$

Non esiste il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$, perchè $2x \sin \frac{1}{x}$ tende a zero e $\cos \frac{1}{x}$ oscilla tra -1 e 1.

2.3 Punti angolosi e di cuspide

Riassumiamo i casi possibili, quando si studiano i limiti della derivata prima:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \tag{2.19}$$

Le nostre ipotesi sulla funzione reale f sono quelle del teorema (2.1): il dominio di f è un intorno aperto I del punto $x_0 \in I$, f è *continua nel punto* x_0 *e derivabile in ogni punto* x *dell'intervallo bucato* $I \setminus \{x_0\}$.

1. *Primo caso.* I due limiti (2.19) esistono, entrambi finiti, e sono uguali tra loro. Per il teorema (2.1) essi coincidono rispettivamente con la derivata a sinistra $f'_-(x_0)$ e con la derivata a destra $f'_+(x_0)$. Dunque la funzione f è derivabile in x_0 e

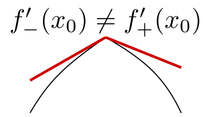
$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

2. *Secondo caso.* I due limiti (2.19) esistono, entrambi finiti, e sono diversi tra loro.

   Allora (per il teorema (2.1)) esistono in x_0 la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ e la derivata destra $f'_+(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \qquad\qquad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \tag{2.20}$$

   Poich $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, la funzione f non è derivabile in x_0. Si dice che il punto $(x_0, f(x_0))$ è *punto angoloso* per il grafico della funzione f.

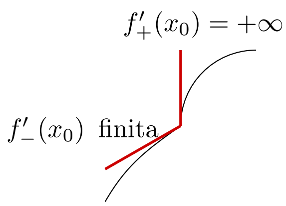


Punto angoloso.

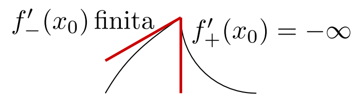
3. *Terzo caso.* Uno dei due limiti (2.19) esiste finito e l'altro vale $+\infty$ oppure $-\infty$.

   La funzione f non è derivabile in x_0 e ha in x_0 solo la derivata a sinistra, o solo a destra.

   Anche in questo caso si dice che $(x_0, f(x_0))$ è *punto angoloso* per il grafico di f.



Punto angoloso.

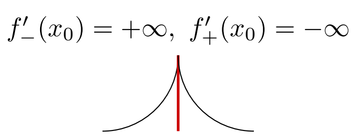


Punto angoloso.

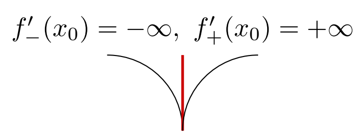
4. *Quarto caso.* Se

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$$

   (o viceversa). Abbiamo visto (teorema di de L'Hôspital) che anche il limite del rapporto incrementale da sinistra è $+\infty$, e lo stesso rapporto da destra tende a $-\infty$. Dunque f non è derivabile in x_0. Il punto $(x_0, f(x_0))$ è un *punto di cuspide* per il grafico della funzione f.



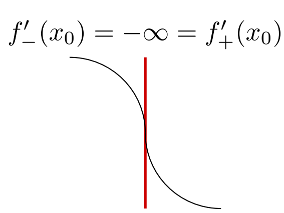
Punto di cuspide.
Esempio: $-\sqrt{|x|}$



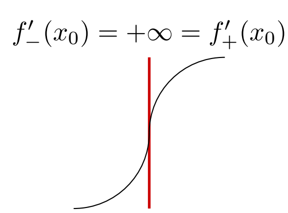
Punto di cuspide.
Esempio: $\sqrt{|x|}$

5. *Quinto caso.* I due limiti (2.19) valgono entrambi $+\infty$, o valgono entrambi $-\infty$.

   Ragionando come nell'ultimo caso, si vede che ovviamente la funzione f non è derivabile in x_0. Il punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico di f è un punto con *retta tangente verticale* (di equazione $x = x_0$).



Punto a tangente verticale.
Esempio: $-\sqrt[3]{x}$



Punto a tangente verticale.
Esempio: $\sqrt[3]{x}$

6. *Sesto caso.* Uno (almeno) dei due limiti (2.19) non esiste (né finito, né $\pm\infty$).

   In questo caso, a priori non si può dire nulla sulla derivabilità di f in x_0. La funzione f potrebbe essere derivabile in x_0 oppure no. Per studiare in questo caso la derivabilità di f in x_0, si dovrà in generale studiare direttamente il limite del rapporto incrementale di f in x_0.

   Per illustrare quest'ultimo caso, si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

   Quando $x \to 0$, non esiste né il limite di

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \tag{2.22}$$

   né il limite di

$$g'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \tag{2.23}$$

   (Infatti, se $x = 1/2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), si ha $g'(x) = -2k\pi$, mentre se $x = 1/(2k+1)\pi$, si ha $g'(x) = (2k+1)\pi$). Si è già visto (esercizio 2.5) che la funzione f è derivabile in 0.

   Per vedere se la funzione $g(x)$ è derivabile in 0, si studi il rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \tag{2.24}$$

   Ovviamente tale limite non esiste (vicino all'origine $\sin \frac{1}{x}$ oscilla) e quindi g non è derivabile in 0.

3 Formule di Taylor

3.1 Il polinomio di Taylor

Teorema 3.1 (Polinomio di Taylor)**.** *Sia f una funzione derivabile n volte in un punto x_0. Allora esiste un polinomio $P_n(x)$, e uno soltanto, di grado minore o uguale a n, che ha in comune con f, nel punto x_0, tutte le prime n derivate, cioè che soddisfa le $n+1$ condizioni*[8]*:*

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \quad P_n''(x_0) = f''(x_0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \tag{3.1}$$

Tale polinomio, detto polinomio di Taylor di ordine n di f, centrato in x_0, *è dato da:*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il grado del polinomio $P_n(x)$ è esattamente n se $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$, altrimenti sarà minore di n.

Dimostrazione. Si vede subito con un semplice conto (calcolando le derivate successive) che il polinomio (3.2) soddisfa le $n+1$ condizioni (3.1). Questo prova l'*esistenza* di un polinomio con le proprietà richieste. Quanto alla *unicità* di tale polinomio, si consideri un generico polinomio di grado $\leq n$, centrato in x_0:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n \tag{3.3}$$

Si tratta di dimostrare che se tale polinomio soddisfa le condizioni (3.1), allora necessariamente deve coincidere con il polinomio (3.2). Le derivate successive di $P(x)$ (includendo la derivata di ordine 0, che coincide per definizione con il polinomio stesso), sono:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \cdots + a_n(x-x_0)^n \\ P'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} \\ P''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + \dots + n \cdot (n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \\ P'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)a_n(x-x_0)^{n-3} \\ .. &= .. \\ P^{(n)}(x) &= n!a_n \end{aligned}$$

Valutando queste derivate successive di $P(x)$ in x_0 e imponendo le condizioni (3.1), si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P(x_0) = a_0 \\ f'(x_0) &= P'(x_0) = a_1 \\ f''(x_0) &= P''(x_0) = 2a_2 \\ f'''(x_0) &= P'''(x_0) = 3!a_3 \\ .. &= .. \\ f^{(n)}(x_0) &= P^{(n)}(x_0) = n!a_n \end{aligned}$$

[8] La derivata di ordine zero di una funzione è, per definizone, la funzione stessa.

Dunque i coefficienti $a_0, ..., a_n$ del polinomio di Taylor sono esattamente quelli del polinomio (3.2):

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, ..., \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{3.4}$$

come si voleva dimostrare. ∎

Si noti che il polinomio di Taylor di ordine 1 di una funzione f, centrato in x_0, è

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.5}$$

Il grafico di tale polinomio è la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

3.2 Funzioni di classe C^k

Innanzi tutto occorre premettere alcune definizioni. Sia I un intervallo aperto dell'asse reale. Con il simbolo $C^0(I)$ si denota l'insieme di tutte le funzioni reali[9] continue su I. Invece con $C^k(I)$, dove $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 1$, si denota l'insieme di tutte le funzioni reali definite su I, che sono derivabili k volte su I, e le cui derivate successive $f, f', .., f^k$ sono tutte continue su I, fino a quella di ordine k incluso[10]. Se una funzione f appartiene a $C^k(I)$, si dice anche che f è *di classe* C^k. Si dice che f è di classe C^∞, o che è *liscia*, se f è di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$. Gli spazi $C^k(I)$ sono esempi di *spazi funzionali*, cioè di spazi i cui elementi sono funzioni.

Esempi

1. Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\exp_a(x)$ (esponenziale di base a, $a > 0$, $a \neq 1$), x^n con $n \in \mathbb{N}$, $\arctan x$, sono tutte lisce (di classe C^∞) su $\mathbb{R}$.

2. La funzione $\ln x$ è di classe C^∞ sulla semiretta aperta $(0, +\infty)$.

3. $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$ è C^0 ma non C^1.

4. $f(x) = x|x|$ su $\mathbb{R}$ è C^1 ma non C^2.

5. $f(x) = |x|^3$ su $\mathbb{R}$ è C^2 ma non C^3.

3.3 Studio locale. Formula di Taylor con il resto nella forma di Peano

Lo sviluppo di Taylor con il resto nella forma di Peano si utilizza per studiare una funzione in un intorno di un punto fissato x_0. L'idea di base è di approssimare la funzione f in un intorno di x_0, mediante il suo polinomio di Taylor $T_n(f; x_0)$ di ordine n, centrato in x_0:

$$T_n(f; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \tag{3.6}$$

[9] Dire che una funzione è *reale* significa che il suo codominio è un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

[10] Queste richieste sono un po' ridondanti. Infatti, se una funzione è derivabile k volte, la continuità di tutte le derivate $f, f', f'', .., f^{(k-1)}$ è automatica, perché una funzione derivabile è continua. Basterebbe dire che f è di classe C^k se è derivabile k volte e la sua derivata k-esima è continua.

Il teorema di Taylor con il resto nella forma di Peano afferma che la differenza tra la funzione $f(x)$ e il suo polinomio di Taylor (3.6) è un infinitesimo, per $x \to x_0$, di ordine superiore rispetto all'infinitesimo $(x - x_0)^n$.

Teorema 3.2 (Formula di Taylor con il resto di Peano)**.** *Sia f una funzione di classe C^n su un intervallo aperto I dell'asse reale. Fissiamo un punto x_0 in I. Allora vale il seguente sviluppo:*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Per definizione una funzione $g(x)$ è un $o((x - x_0)^n)$ (si legge: o-piccolo di $(x - x_0)^n$) in un intorno di x_0, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Quindi, per dimostrare la formula di Taylor (3.7) occorre dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \cdots - \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0 \quad (3.8)$$

Per capire come vanno le cose, basta studiare in dettaglio il caso $n = 2$. Usando due volte di seguito il teorema di L'Hospital, abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} &= && (3.9)\\
\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} &= && (3.10)\\
\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{2} &= 0 && (3.11)
\end{aligned}$$

Poichè l'ultimo limite (giustificato dalla continuità di f'' in x_0) esiste e vale 0, per il teorema di de L'Hospital anche il limite iniziale (3.9) esiste e vale 0, come si voleva dimostrare.

La formula per un n arbitrario (e per una funzione di classe C^n) si dimostra esattamente nello stesso modo, iterando la regola di de L'Hospital. ∎

3.3.1 Alcune importanti approssimazioni locali

Usando la formula di Taylor locale (3.7), si verifica che valgono, per $x \to 0$ e per ogni naturale n, i seguenti importanti sviluppi sviluppi.

$$\begin{aligned}
\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) && (3.12)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+2}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots+(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n) \qquad \text{(Per ogni numero } \alpha\text{).} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+o(x^8) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^4) \tag{3.18}$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6) \tag{3.19}$$

(È difficile dare l'espressione dello sviluppo di $\tan x$. I coefficienti si scrivono in funzione dei *numeri di Bernoulli* B_n).

3.4 Studio su un intervallo. Formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange

La formula di Taylor di f centrata in x_0, con il resto nella forma di Lagrange, si utilizza per studiare una funzione f su un intervallo (magari 'grande') contenente il punto x_0. (Ovviamente potrà servire anche a studiare la funzione f localmente, cioè in un piccolo intorno di x_0).

Teorema 3.3 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)**.** *Sia f una funzione derivabile $n+1$ volte su un intervallo aperto I dell'asse reale. Fissiamo un punto x_0 in I. Allora, per ogni altro punto $x \in I$ esiste un punto c, compreso tra x_0 e x, per il quale vale:*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.20}$$

Il termine $\frac{f^n(c)}{n!}(x-x_0)^n$ si chiama il *resto nella forma di Lagrange.*

Si noti che se $n = 0$, la formula di Taylor (3.20) si riduce al teorema di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \tag{3.21}$$

Per dimostrare la formula di Taylor (3.20) si utilizza qui il teorema di Cauchy, che è utile richiamare:

Teorema. [Cauchy] *Siano $h(x)$ e $k(x)$ funzioni definite su un intervallo aperto I, entrambe derivabili, con $k'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Siano x_0, x_1 due punti qualunque di I. Allora esiste un numero c, compreso tra x_0 e x_1, per il quale vale la seguente uguaglianza:*

$$\frac{h(x_1) - h(x_0)}{k(x_1) - k(x_0)} = \frac{h'(c)}{k'(c)} \tag{3.22}$$

In particolare, se entrambe le funzioni h e k si annullano nel punto x_0, cioè $h(x_0) = k(x_0) = 0$, l'uguaglianza (3.22) diventa

$$\frac{h(x_1)}{k(x_1)} = \frac{h'(c)}{k'(c)} \tag{3.23}$$

per un opportuno c tra x_0 e x_1. (Sarà in questa forma che utilizzeremo il teorema di Cauchy nella dimostrazione della formula di Taylor).

Dimostrazione. [Formula di Taylor (3.20)]. Dimostriamo la formula nel caso particolare $n = 1$, vale a dire dimostriamo che esiste un numero c, compreso tra x_0 e x per il quale vale:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \tag{3.24}$$

La dimostrazione per n arbitrario è esattamente la stessa. La formula 3.24, che vogliamo dimostrare, equivale ovviamente (per $x \neq x_0$) a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(c)}{2!} \tag{3.25}$$

Quindi quello che dobbiamo dimostrare è che la frazione

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \tag{3.26}$$

si può scrivere come $\dfrac{f''(c)}{2!}$ per un opportuno numero c tra x_0 e x.

Chiamiamo rispettivamente $N(x)$ e $D(x)$ il numeratore e il denominatore di (3.26):

$$N(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \qquad D(x) = (x - x_0)^2$$

Notiamo che $N(x_0) = 0$ e $D(x_0) = 0$. Inoltre, con un calcolo diretto, si ricava subito:

$$N'(x) = f'(x) - f'(x_0), \qquad D'(x) = 2(x - x_0) \tag{3.27}$$

Per il teorema di Cauchy (siamo nel caso particolare (3.23)) esiste allora un punto c_1 per il quale vale:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x) - N(x_0)}{D(x) - D(x_0)} = \frac{N'(c_1)}{D'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(x_0)}{2(c_1 - x_0)} \tag{3.28}$$

Se, per fissare le idee, supponiamo $x_0 < x$, avremo

$$x_0 < c_1 < x \tag{3.29}$$

Adesso applichiamo di nuovo il teorema di Cauchy nella forma (3.23) alla coppia di funzioni $h(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $k(x) = 2(x - x_0)$, sull'intervallo $[x_0, c_1]$. Si noti che tali funzioni si annullano entrambe in x_0. Le loro derivate sono $h'(x) = f''(x)$ e $h'(x) = 2$. Dunque, per la formula (3.23), esiste un numero c_2, con $x_0 < c_2 < c_1$, per il quale si ha

$$\frac{h(c_1) - h(x_0)}{k(c_1) - k(x_0)} = \frac{h(c_1)}{k(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(x_0)}{2(c_1 - x_0)} = \frac{f''(c_2)}{2} \tag{3.30}$$

Siccome sappiamo da (3.29) che c_1 è compreso tra x_0 e x, anche c_2 è compreso tra x_0 e x:

$$x_0 < c_2 < x$$

Scrivendo c al posto di c_2, abbiamo dunque dimostrato la formula (3.25).

Nello stesso modo, applicando più volte di seguito il teorema di Cauchy, si dimostra la formula di Taylor (3.20) nel caso di un intero positivo n arbitrario. ∎

Osservazione. Si noti che abbiamo richiesto che f fosse derivabile $n + 1$ volte, ma non abbiamo richiesto la continuità della derivata di ordine massimo $n + 1$.

3.4.1 Un'applicazione: stima dell'errore

Problema 3.4. *Nell'intervallo* $[0, \pi/4]$*, approssimiamo* $\sin x$ *con il polinomio di Taylor*

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Dare una stima dell'errore che si compie.

Soluzione. Si noti che i due polinomi di Taylor P_3 e P_4 della funzione sin, centrati in 0, sono entrambi uguali a $x - \frac{x^3}{3!}$ (perché la derivata quarta di sin in 0 si annulla). Se vediamo $x - \frac{x^3}{3!}$ come il polinomio di Taylor P_4, allora il teorema di Taylor con il resto nella forma di Lagrange, assicura che esiste un numero c tra 0 e $\frac{\pi}{4}$ per il quale vale:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!}x^5$$

L'errore che si compie è dunque

$$\left|\frac{\cos c}{5!}x^5\right| \leq \frac{(\pi/4)^5}{5!} \simeq 0,0024$$

Se invece pensiamo a $x - \frac{x^3}{3!}$ come al polinomio di Taylor P_3, per il teorema di Taylor (3.3) con il resto di Lagrange abbiamo, per un opportuno d tra 0 e $\frac{\pi}{4}$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin d}{4!}x^4$$

La stima dell'errore è allora

$$\left|\frac{\sin d}{4!}x^4\right| \leq \frac{(\pi/4)^4}{4!} \simeq 0,0158..$$

meno precisa della precedente.

4 Funzioni convesse e funzioni concave

Definizione 4.1. *Una funzione definita su un intervallo aperto I si dice:*

- convessa*, se per ogni coppia di punti x_1, x_2 in I il segmento congiungente i punti $M = (x_1, f(x_1))$ e $N = (x_2, f(x_2))$ sta al di sopra del grafico di f. In modo equivalente, se per ogni x_1, x_2 in I e per ogni coppia di numeri reali $\lambda, \mu \geq 0$, soddisfacenti $\lambda + \mu = 1$, si ha:*
$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \tag{4.1}$$

- concava*, se per ogni coppia di punti x_1, x_2 in I il segmento congiungente i punti $M = (x_1, f(x_1))$ e $N = (x_2, f(x_2))$ sta al di sotto del grafico di f. In modo equivalente, se per ogni x_1, x_2 in I e per ogni coppia di numeri reali $\lambda, \mu \geq 0$, soddisfacenti $\lambda + \mu = 1$, si ha:*
$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \tag{4.2}$$

Se chiamiamo *corda* il segmento di estremi M, N e *arco* il grafico di f tra gli stessi estremi, possiamo dire che una funzione continua definita su un intervallo si dice *convessa se, in ogni sottointervallo, la corda sta al di sopra dell'arco*, mentre si dice *concava se, in ogni sottointervallo, la corda sta al di sotto dell'arco.*

Una funzione convessa si dice *strettamente convessa* se, in ogni sottointervallo, arco e corda hanno solo gli estremi in comune. In modo analogo si definisce una funzione *strettamente concava.*

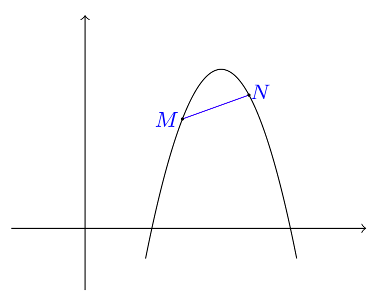


Figura 4: Funzione concava: la corda sta tutta al di sotto dell'arco.

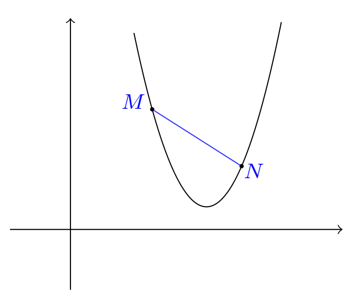


Figura 5: Funzione convessa: la corda sta tutta al di sopra dell'arco.

Esempi. La funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa (su $\mathbb{R}$). Anche la funzione $g(x) = x^2$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, è convessa.

Osservazione. Una funzione convessa su un intervallo I, può non essere derivabile, come risulta dall'esempio $x \longmapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Ma si dimostra che se I è un intervallo aperto e $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è convessa su I, allora le derivate sinistre e le derivate destre esistono in ogni punto di I. Di conseguenza, una funzione convessa su un intervallo aperto è continua. (Invece una funzione f convessa su un intervallo $[a, b]$ può non essere continua in a o in b, come si vede facilmente con un esempio).

Per le funzioni derivabili, la convessità si può formulare anche in un altro modo. (La dimostrazione è semplice, ma qui non viene riportata).

Teorema 4.2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, derivabile in tutto un intervallo $[a, b]$, sia convessa è che la retta tangente al grafico in un suo qualsiasi punto stia tutta al di sotto del grafico.*

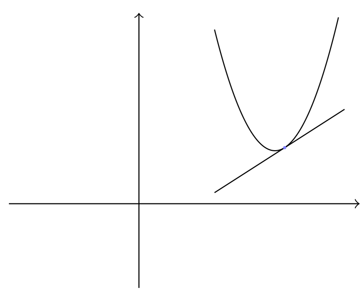


Figura 6: Funzione convessa: il grafico sta tutto al di sopra della retta tangente.

4.1 Interpretazione del segno della derivata seconda

Teorema 4.3. *Sia f derivabile due volte su un intervallo aperto I. Se per ogni $x \in I$ si ha $f''(x) \geq 0$, allora f è convessa.*

Dimostrazione. Per dimostrare che f è convessa, si utilizza il teorema precedente e si dimostra che, per ogni punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico di f, il grafico si trova tutto al di sopra della retta tangente in tale punto. Sia dunque x_0 un punto in I. Si prenda un qualunque punto $x \in I$. Poichè f è due volte derivabile, si può scrivere la formula di Taylor arrestata al secondo ordine, con centro in x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \tag{4.3}$$

per un opportuno punto c compreso[11] tra x e x_0. Allora

$$f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big] = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \geq 0 \tag{4.4}$$

perchè $(x - x_0)^2 \geq 0$ e $f''(c) \geq 0$ per ipotesi. Dunque il primo membro della (4.4) è maggiore o uguale a zero, ossia

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Ordinata sul grafico di } f} \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Ordinata sulla retta tangente}} \tag{4.5}$$

Si noti infatti che $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Abbiamo così dimostrato che il grafico di f sta tutto al di sopra della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. □

Definizione 4.4 (Punto di flesso)**.** *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Un punto x_0 si dice* punto di flesso *per f se è estremo comune di due intervalli, su uno dei quali la funzione è convessa, e sull'altro concava.*

Osservazione. Se f è una funzione due volte derivabile sull'intervallo aperto I e $x_0 \in I$, l'annullarsi della derivata seconda, $f''(x_0) = 0$, è condizione *necessaria* perchè x_0 sia un punto di flesso per f. La condizione non è però sufficiente, come è evidente dall'esempio $f(x) = x^4$. Per decidere se un punto x_0, in cui la derivata seconda si annulla, sia un punto di flesso, converrà esaminare il segno della derivata seconda in un intorno sinistro e il segno in un intorno destro di x_0. Se questi segni sono diversi, si è in presenza di un punto di flesso, altrimenti no.

Esempio. La funzione $f(x) = x^3$ ha un punto di flesso in $x_0 = 0$, perchè la derivata seconda $f''(x) = 6x$ è negativa in un intorno sinistro e positiva in un intorno destro di 0.

---

[11]Quando si dice che c è *compreso tra* x e x_0 intendiamo dire che $x < c < x_0$ se $x < x_0$, mentre $x_0 < c < x$ se $x_0 < x$.