

CALCOLO DIFFERENZIALE

Parte prima

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

1

Indice

1	Derivate	2
1.1	Definizione di derivata	2
1.2	Funzioni differenziabili	4
1.3	Derivabilità implica continuità	5
1.4	La derivata secondo Leibniz	6
1.5	Interpretazione geometrica di derivata	8
1.6	Funzioni derivabili in un intervallo	9
1.7	Limiti importanti	10
1.8	Il differenziale. Approssimazione al primo ordine.	12
2	Derivate di alcune funzioni	13
2.1	Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$	13
2.2	Derivata di exp e log	14
2.3	Derivata di $\sin x$ e $\cos x$	16
3	Regole sulle derivate	18
3.1	Derivata della somma	18
3.2	Derivata del prodotto	18
3.3	Derivata della funzione composta	19
3.4	Derivata di $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$	20
3.5	Derivata della funzione composta. Alcuni casi importanti	20
3.6	Derivata della funzione inversa	22
3.7	Derivata della funzione reciproca $\frac{1}{f}$	24
3.8	Derivata del quoziente	24

¹Nome file: 'Calcolo_differenziale.1.2018.tex'

1 Derivate

1.1 Definizione di derivata

Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e sia x_0 un punto di I . Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ si chiama *incremento della variabile indipendente* tra x_0 e x la quantità

$$\Delta x = x - x_0$$

mentre si chiama *incremento della funzione f relativo a Δx* la quantità

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Definizione 1.1 (Rapporto incrementale). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ una funzione qualsiasi, I un intervallo aperto dell'asse reale e $x_0 \in I$. Si chiama rapporto incrementale di f relativo ad x_0 la funzione*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.1)$$

che risulta definita in $I \setminus \{x_0\}$.

La quantità $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ rappresenta la *variazione assoluta* di f relativa all'incremento $\Delta x = x - x_0$, mentre il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ indica il *tasso medio di variazione* di f rispetto all'incremento Δx . Per esempio se per $\Delta x = 0.2$ si ha un incremento di f pari a $\Delta y = 0.05$, il tasso medio di variazione di f (rispetto all'incremento Δx) è $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4}$; in termini percentuali la variazione è stata del 25%.

Definizione 1.2 (Funzione derivabile). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e $x_0 \in I$. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.2)$$

Si osservi che, posto $x - x_0 = h$, tale limite assume la forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.3)$$

Quindi, in modo del tutto equivalente, si dice che la funzione f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite (1.3).

I simboli che più spesso si usano per denotare la derivata di f in x_0 sono:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Esempio. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Il rapporto incrementale di f relativo a $x_0 \in \mathbb{R}$ è la funzione

$$x \mapsto \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \quad (1.4)$$

La derivata di f in x_0 è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2 \quad (1.5)$$

Si arriva alla stessa conclusione calcolando il limite (1.3)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3) - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2) = 3x_0^2$$

dove si è posto $x = x_0 + h$.

Esempio. La derivata di $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 h + h^2 - 3h}{h} = 2x_0 - 3$$

Derivata a destra e derivata a sinistra

La definizione di derivata si può estendere al caso in cui il punto x_0 sia uno dei due estremi di un intervallo. Si supponga che la funzione f , a valori reali, sia definita su un intervallo chiuso $[a, b]$. Si dice che f è *derivabile a destra* nel punto $x_0 = a$, se esiste (finito) il limite del rapporto incrementale quando x tende al punto x_0 da destra, cioè quando esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.6)$$

Se tale limite esiste finito, si chiama *derivata a destra* e lo si indica con

$$f'_+(x_0)$$

In modo analogo, una funzione reale f , definita su un intervallo $[a, b]$, si dice *derivabile in* $x_0 = b$ se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.7)$$

che si denota (quando esiste finito) con il simbolo

$$f'_-(x_0)$$

e si chiama *derivata a sinistra* nel punto b . A volte si utilizzerà ancora il simbolo f' , al posto di f'_+ o f'_- , quando il significato dei simboli è chiaro dal contesto.

1.2 Funzioni differenziabili

Per definizione di derivata, se f è derivabile in x_0 , si ha

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h) \quad (1.8)$$

dove $\alpha(h)$ è una funzione infinitesima, cioè una funzione che tende a zero, quando h tende a zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$$

L'uguaglianza (1.8) si può scrivere così

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + h \alpha(h) \quad (1.9)$$

dove $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Le considerazioni svolte giustificano la seguente definizione

Definizione 1.3 (Funzione differenziabile). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e $x_0 \in I$. Si dice che f è differenziabile in x_0 se, per h che tende a 0, esiste un numero reale $A \in \mathbb{R}$ per il quale si ha:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + h \alpha(h) \quad (1.10)$$

dove $\alpha(h)$ è una quantità infinitesima, per h che tende a zero.

Per una funzione reale, di variabile reale, il concetto di derivabilità e quello di differenziabilità sono equivalenti

Teorema 1.4 (Derivabilità equivale a differenziabilità). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e $x_0 \in I$. Allora*

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Dimostrazione.

Derivabilità implica differenziabilità.

Se f è derivabile in x_0 allora si può scrivere, per h in un intorno di 0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) h + h \alpha(h) \quad (1.11)$$

dove $f'(x_0)$ è un numero reale e $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Segue che f è differenziabile in x_0 .

Differenziabilità implica derivabilità

Se f è differenziabile in x_0 allora, per h che tende a 0, esiste un numero reale A per il quale si ha

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + h \alpha(h) \quad (1.12)$$

dove $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. Il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 è dato da:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \alpha(h)$$

Quindi il limite del rapporto incrementale esiste ed è uguale al numero A :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [A + \alpha(h)] \\ &= A + \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) \\ &= A \end{aligned}$$

■

1.3 Derivabilità implica continuità

Vale il seguente

Teorema 1.5 (Derivabilità implica continuità). *Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Quando h tende a zero, il secondo membro di (1.9) tende a zero. Allora si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Questo prova che f è continua in x_0 . ■

Il viceversa di questo teorema non è vero, nel senso che non tutte le funzioni continue sono derivabili. Per esempio, in $x = 0$, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile, infatti il rapporto incrementale di f in $x = 0$ vale

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

quindi non esiste il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h}$.

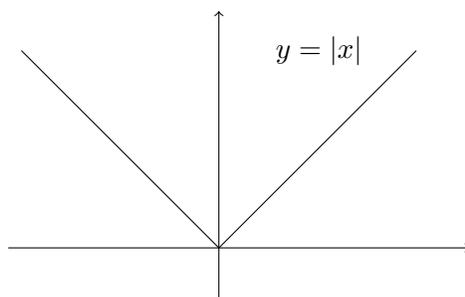


Figura 1: In $x = 0$ la funzione $y = |x|$ non è derivabile sebbene sia continua.

1.4 La derivata secondo Leibniz

Nel mese di ottobre del 1684 G.W. Leibniz pubblicò lo scritto dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*.² A questo articolo si fa risalire la nascita ufficiale del calcolo infinitesimale, sebbene gli stessi risultati fossero già stati trovati, qualche decennio prima, da I. Newton con un approccio completamente diverso³.

L'idea di Leibniz è la seguente: se a un punto x_0 della funzione $y = f(x)$ si dà un incremento infinitesimo dx anche la funzione subisce un incremento infinitesimo

$$dy = f(x_0 + dx) - f(x)$$

Allora la derivata di f in x_0 è il rapporto tra le quantità infinitesime dy e dx , ovvero

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x)}{dx}$$

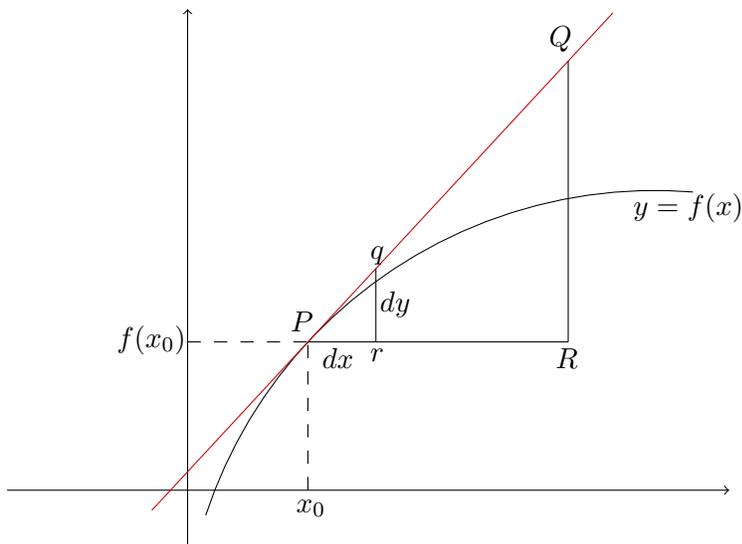


Figura 2

La notazione $\frac{dy}{dx}$ consente di pensare la derivata senza dover ricorrere al concetto di limite: esso è ‘nascosto’ nel simbolo *differenziale* ‘d’; per questa ragione la notazione di Leibniz è molto usata in fisica e nelle scienze applicate.

²Nuovo metodo per i massimi e i minimi, nonchè per le tangenti, che non si arresta davanti alle quantità fratte o irrazionali, e per quelli un singolare genere di calcolo.

³Le ricerche di I. Newton su questo argomento sono raccolte in tre scritti: 1) *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, scritto nel 1669 e pubblicato nel 1711; 2) *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Metodo delle flussioni e delle serie infinite), scritto nel 1671 e pubblicato nel 1742; 3) *De quadratura curvarum* (Sulla quadratura delle curve) pubblicato nel 1704. Le idee contenute nel *De quadratura curvarum* vengono utilizzate in *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principi matematici della filosofia naturale), prima opera pubblicata da Newton (1687).

In termini più precisi, per determinare la derivata della funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ in un suo punto x_0 , bisogna prima calcolare il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e poi passare al limite, per Δx che tende a zero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Il simbolo ‘ Δ ’ che compare nel rapporto incrementale sta a indicare differenze finite: Δx è l’incremento (finito) della variabile indipendente e Δy la corrispondente variazione (finita) della funzione. Quando si passa al limite, per Δx che tende a 0, il simbolo ‘ Δ ’ viene sostituito con il simbolo *differenziale* ‘ d ’.

Esempio. Velocità istantanea nel moto rettilineo

Un oggetto si muove lungo una retta. Fissati su di essa il punto origine O , l’unità di misura e il verso di percorrenza sia

$$t \mapsto s(t) = OP$$

la funzione che ad ogni istante di tempo t associa la distanza $s(t)$ dell’oggetto dal punto O .



Figura 3

Se all’istante t_0 l’oggetto si trova in P_0 e all’istante t è in P allora la sua velocità media (relativa all’intervallo di tempo $\Delta t = t - t_0$) è

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

mentre la velocità istantanea al tempo t_0 si ottiene facendo tendere t a t_0

$$\text{velocità istantanea} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Quindi la *velocità istantanea* è la derivata dello “spazio” rispetto al tempo.

Esempio. Intensità di corrente

In un filo di rame di sezione A , la quantità di carica che attraversa la sezione del filo nel tempo che va da t_0 a t è $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$. L’intensità media di corrente è

$$I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

mentre l’intensità istantanea di corrente al tempo t_0 è

$$\text{intensità istantanea di corrente} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Quindi, *l'intensità istantanea di corrente è la derivata della "carica" rispetto al tempo.*

1.5 Interpretazione geometrica di derivata

Dire che la funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è derivabile (differenziabile) nel punto x_0 equivale ad affermare che il grafico di f possiede retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$; tale retta è unica e non può essere verticale.

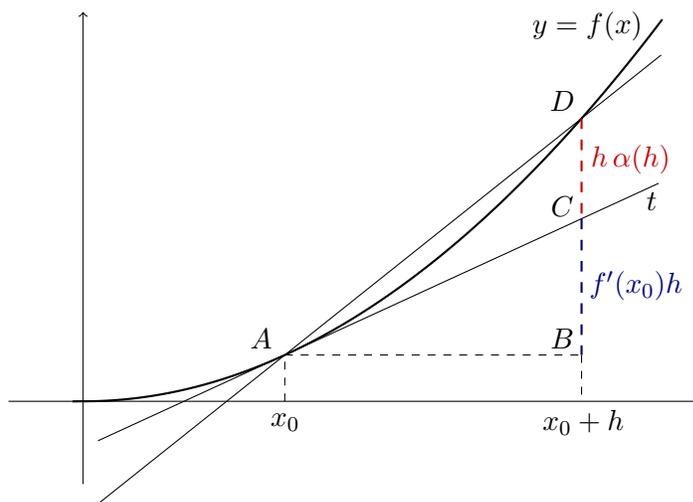


Figura 4: La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente in A al grafico di f .

Con riferimento alla figura, si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Il rapporto incrementale di f relativo a x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

è il coefficiente angolare della retta che interseca il grafico di f nei punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $D = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Per h che tende a 0, la secante AD assume la posizione della retta t , ossia della tangente al grafico di f in A ; quindi la derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente t .

Più precisamente, l'*incremento* di f è rappresentato dal segmento $BD = BC + CD$, dove

$$BC = f'(x_0)h$$

è l'incremento della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ mentre

$$CD = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = h\alpha(h)$$

è una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto a h (nel senso che, divisa per h , tende a zero per h che tende a zero).

1.6 Funzioni derivabili in un intervallo

Si dice che la funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (che potrebbe essere chiuso o no, limitato o no) è *derivabile in I* , se ammette derivata in tutti i punti interni di I e inoltre ammette derivata destra nel primo estremo di I e derivata sinistra nel secondo estremo di I , quando questi estremi appartengono a I . Se f è derivabile in tutto I , la nuova funzione

$$I \xrightarrow{f'} \mathbb{R} \tag{1.13}$$

si chiama *funzione derivata* di f , anch'essa è definita su I .

Se anche f' è derivabile su tutto I , la *derivata seconda* f'' non è altro che la derivata prima di f' , anch'essa è definita su I e così via. Se esiste la derivata $n - 1$ -esima, la derivata n -esima (se esiste) verrà indicata con il simbolo $f^{(n)}$.

1.7 Limiti importanti

Alcuni fatti che riguardano il numero di Eulero.

Il numero di Eulero e , detto anche costante di Napier, è il limite della successione $(1 + 1/n)^n$:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1.14)$$

L'uguaglianza appena scritta *non* è un teorema, ma una *definizione*. Più precisamente, si dimostra che la successione $(1 + 1/n)^n$ è crescente e limitata; quindi, per la completezza di \mathbb{R} , converge a un numero reale. Tale numero reale, per definizione, è chiamato e . Inoltre si dimostra senza difficoltà (ma qui non si riporta la dimostrazione) che si ha anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (1.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (1.16)$$

Ponendo $1/x = y$, nelle uguaglianze (1.15) e (1.16), si ricava un altro limite importante:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e \quad (1.17)$$

che sarà fondamentale in seguito.

La ragione per cui si preferisce scegliere il numero e come base per la funzione esponenziale e come base per la funzione logaritmo sta nel fatto che, con tale scelta, si ha, come si vedrà più avanti,

$$De^x = e^x, \quad D \ln(x) = \frac{1}{x}$$

(In genere, si usa il simbolo \ln per denotare il logaritmo “naturale”, ossia in base e . Se necessario per evitare equivoci, scriverà anche \log_e). Se invece si sceglie una base a qualunque (purché positiva e diversa da 1), valgono le regole di derivazione più complicate, cioè

$$Da^x = a^x \cdot \ln a, \quad D \log_a(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Si può allora dimostrare che valgono alcuni limiti fondamentali:

Teorema 1.6. *Per ogni base a (positiva e diversa da 1), si ha*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + y)}{y} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} \quad (1.18)$$

In particolare, se $a = e$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1 \quad (1.19)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \log_a \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right] && \text{(Proprietà dei logaritmi: } \log_a b^c = c \log_a b \text{).} \\
 &= \log_a \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right] && \text{(Perché la funzione } \log_a \text{ è continua).} \\
 &= \log_a e && \text{(Per il limite 1.17).} \\
 &= \frac{1}{\log_e a} && \text{(Proprietà dei logaritmi: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{).}
 \end{aligned}$$

(L'uguaglianza $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ segue dall'ovvia equivalenza

$$a^w = b \iff a = b^{1/w}$$

Infatti, per la definizione di logaritmo, tale equivalenza si legge: $w = \log_a b$ se e solo se $\frac{1}{w} = \log_b a$). In particolare, se $a = e$, si ha $\log_a e = \log_e e = 1$, e quindi si ricava l'uguaglianza (1.19):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \tag{1.20}$$

■

Teorema 1.7. *Per ogni base a (positiva e diversa da 1), si ha*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a \tag{1.21}$$

In particolare, se $a = e$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Per ricondursi al precedente limite (1.18), occorre effettuare il cambio di variabili $a^x - 1 = y$, da cui si ricava $x = \log_a(1+y)$. Quando x tende a zero, anche y tende a zero. Allora, tenendo presente il limite (1.18), si ha:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} \\
 &= \log_e a
 \end{aligned}$$

■

1.8 Il differenziale. Approssimazione al primo ordine.

Definizione 1.8. Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) una funzione derivabile in un punto $x_0 \in I$. Si chiama differenziale di f in x_0 , e si denota df_{x_0} , l'applicazione lineare⁴

$$\mathbb{R} \xrightarrow{df_{x_0}} \mathbb{R}, \quad h \mapsto df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h \quad (1.23)$$

Un problema cruciale è approssimare il valore $f(x_0 + h)$, per h piccolo, vicino a un punto x_0 in cui f sia derivabile. Ci sono (lo si vedrà in seguito) tante possibili approssimazioni di una funzione in un intorno di un punto: approssimazioni al primo ordine, al secondo ordine, al terzo ordine eccetera, a seconda della regolarità della funzione f . Con la derivata prima, si può definire l'approssimazione al primo ordine.

Se f è derivabile in x_0 si può scrivere:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\alpha(h) \quad (1.24)$$

Allora la *approssimazione al primo ordine*, o *approssimazione lineare*, di f in x_0 si ottiene trascurando il termine $h\alpha(h)$ e prendendo in considerazione, come valore approssimato di $f(x_0 + h)$, soltanto la somma di $f(x_0)$ con il differenziale $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$. Dunque:

L'approssimazione al primo ordine di $f(x_0 + h)$ è

$$f(x_0) + f'(x_0)h \quad (h \text{ piccolo}) \quad (1.25)$$

ovvero, in modo equivalente, l'approssimazione al primo ordine di $f(x)$, vicino a x_0 , è

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \text{ vicino a } x_0). \quad (1.26)$$

L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.27)$$

Dunque, dalla (1.26) segue che *approssimare al primo ordine (o in modo lineare) una funzione $f(x)$ in un intorno di x_0 significa confondere, vicino a x_0 , il grafico di $f(x)$ con la retta tangente nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.*

Ad esempio, l'approssimazione lineare di $\sin x$ vicino a $x_0 = 0$ è x . Infatti, è noto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

⁴Un'applicazione lineare g da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ per la quale valgono le due seguenti proprietà

1. $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (g conserva la somma)
2. $g(kx) = kg(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni fissato $k \in \mathbb{R}$ (g conserva la moltiplicazione per uno scalare)

Le applicazioni lineari $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x) = mx$, cioè tutte e sole le funzioni aventi per grafico una retta per l'origine.

Questo significa che $\frac{\sin x}{x} - 1 = \alpha(x)$ è una funzione che tende a zero per $x \rightarrow 0$. Dunque

$$\sin x = x + x\alpha(x), \quad \text{con } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$$

Ricordando che $\sin 0 = 0$, possiamo dedurre che la derivata di $\sin x$ in $x_0 = 0$ è uguale a 1 e che l'approssimazione lineare di $\sin x$ vicino a $x_0 = 0$ è x . Interpretazione geometrica: vicino all'origine, il grafico di $\sin x$ si confonde (al primo ordine) con la retta tangente (che è la bisettrice del primo e del terzo quadrante).

2 Derivate di alcune funzioni

2.1 Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$

Teorema 2.1 (Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$). *La derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$, è*

$$Dx^n = nx^{n-1} \tag{2.1}$$

Prima dimostrazione.

Sia x un numero reale fissato e h un qualunque incremento. Il rapporto incrementale di $f(x) = x^n$ è dato (per lo sviluppo del binomio di Newton) da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot [(x+h)^n - x^n] &= \frac{1}{h} \cdot \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n \right] \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left[\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \right] \\ &= \frac{1}{h} \cdot h \cdot \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right] \\ &= \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Quando h tende a zero, l'espressione contenuta nell'ultima parentesi quadra tende a nx^{n-1} .

■

Seconda dimostrazione.

La derivata di x^n, n intero positivo, si può anche calcolare in un altro modo se si conosce la regola di Leibniz; infatti sapendo che $Dx = 1$ si ha

$$\begin{aligned} Dx^2 &= D(x \cdot x) \\ &= (Dx) \cdot x + x \cdot (Dx) \\ &= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \end{aligned}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} Dx^n &= D(x \cdots x) \\ &= (Dx) \cdot x \cdots x + x \cdot (Dx) \cdots x + \dots + x \cdot x \cdots x \cdot (Dx) \\ &= 1 \cdot x \cdots x + x \cdot 1 \cdot x \cdots x + \dots + x \cdot x \cdots 1 = \\ &= x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

In modo più formale, l'uguaglianza $Dx^n = nx^{n-1}$ si dimostra per induzione su n .

2.2 Derivata di exp e log

Teorema 2.2 (Derivata del logaritmo). *La derivata di $\ln x$ (logaritmo naturale, in base e) è*

$$D \ln x = \frac{1}{x} \quad (2.2)$$

La derivata del logaritmo $\log_a(x)$ in base arbitraria è

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Per mettere meglio in evidenza il ruolo del numero e , conviene prima calcolare la derivata della funzione $\log_a(x)$ rispetto a una base arbitraria ($a \neq 1, a > 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x(1+h/x)) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x) + \log_a(1+h/x) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+h/x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} && \text{(Si è posto } h/x = y\text{).} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1+y)^{1/y}] \\ &= \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{y \rightarrow 0} [(1+y)^{1/y}] && \text{(Per la continuità di } \log_a\text{).} \end{aligned}$$

È a questo punto che si impone all'attenzione il numero definito dal limite

$$\lim_{y \rightarrow 0} [(1+y)^{1/y}]$$

Si è già visto che tale limite esiste ed è chiamato e . Allora, dall'ultima uguaglianza scritta, segue la tesi (2.3)

$$D \log_a(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Se si sceglie come base dei logaritmi il numero e , si ha $\log_a e = \log_e e = 1$, e quindi

$$D \log_e(x) = \frac{1}{x}$$

■

Teorema 2.3 (Derivata dell'esponenziale). *La derivata dell'esponenziale e^x è*

$$De^x = e^x \quad (2.4)$$

La derivata di a^x è

$$Da^x = a^x \cdot \ln a \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Si tratta di determinare il limite del rapporto incrementale di e^x in un generico punto fissato x in \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot 1 \quad (\text{Per il limite 1.22}) \\ &= e^x \end{aligned}$$

Esattamente nello stesso modo, usando il limite (1.21), si dimostra che $Da^x = a^x \cdot \log_e a$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \cdot \log_e a \quad (\text{Per il limite 1.21}) \end{aligned}$$

Un altro modo per dimostrare che $De^x = e^x$ consiste nel ricordare che la funzione e^x è l'inversa di $\ln(x)$ e poi usare il teorema della derivazione della funzione inversa. Posto $\exp(x) = y$, $x = \ln(y)$, si ha

$$\begin{aligned} (\exp)'(x) &= \frac{1}{(\ln)'(y)} \\ &= \frac{1}{1/y} \\ &= y \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

■

2.3 Derivata di $\sin x$ e $\cos x$

Per calcolare la derivata di $\sin x$ occorre ricordare che vale il seguente limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.6)$$

Da tale limite si ricava:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad (2.7)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \end{aligned}$$

che tende a zero, perché $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ e $\frac{\sin h}{\cos h + 1} \rightarrow 0$.

Teorema 2.4.

$$D \sin x = \cos x \quad (2.8)$$

$$D \cos x = -\sin x \quad (2.9)$$

Dimostrazione dell'uguaglianza (2.8). Si scriva il rapporto incrementale di $y = \sin x$ e poi si utilizzi la formula di addizione del seno:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{1}{h} \cdot [\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x] \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Quando h tende a zero, $\frac{\cos h - 1}{h}$ tende a 0 e $\frac{\sin h}{h}$ tende a 1. Quindi il rapporto incrementale tende a $\cos x$. ■

Dimostrazione dell'uguaglianza (2.9). Con un conto analogo al precedente, usando la formula di addizione del coseno, si dimostra che $D \cos x = -\sin x$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{1}{h} \cdot [\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x] \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

da cui segue che il limite del rapporto incrementale è $-\sin x$. ■

Un'altra dimostrazione di questo fatto si ottiene osservando che

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e utilizzando la regola della derivata di funzione composta (che in queste note è presentata più avanti):

$$\begin{aligned} D \cos x &= D \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= (-1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

■

3 Regole sulle derivate

3.1 Derivata della somma

Si ricordi che la somma di due funzioni f e g è la funzione definita da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Teorema 3.1 (Derivata della somma). *Siano f e g funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0 . Allora la funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale, a partire da x_0 , della funzione $f + g$ si scrive:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Quando x tende a x_0 il secondo membro tende a $f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

3.2 Derivata del prodotto

Date due funzioni f e g , a valori reali, il loro prodotto $f \cdot g$ (oppure fg) è la funzione definita da

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Teorema 3.2 (Derivata del prodotto. Regola di Leibniz). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0 . Allora la funzione prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (3.2)$$

Prima dimostrazione. Si scriva il rapporto incrementale della funzione prodotto $f \cdot g$. Si noti che vale l'identità

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che si ottiene con il trucco di sommare e sottrarre a secondo membro il termine $f(x)g(x_0)$. Quando x tende a x_0 , il termine $f(x)$ tende a $f(x_0)$ (per la continuità di f in x_0), il rapporto $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ tende a $g'(x_0)$ e il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tende a $f'(x_0)$. Quindi il limite del secondo membro, quando x tende a x_0 , esiste ed è uguale a

$$f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

Dunque la regola (3.2) è dimostrata.

Seconda dimostrazione. Per ipotesi, f e g sono differenziabili in x_0 . Questo significa che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\alpha(h), \quad g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + h\beta(h)$$

dove $\alpha(h)$ e $\beta(h)$ sono quantità infinitesime rispetto a h .

Posto per semplicità $p(x) = f(x)g(x)$, la quantità $p(x_0 + h) = f(x_0 + h)g(x_0 + h)$ si scrive nel modo seguente:

$$\begin{aligned} p(x_0 + h) &= f(x_0 + h)g(x_0 + h) \\ &= [f(x_0) + f'(x_0)h + h\alpha(h)] [g(x_0) + g'(x_0)h + h\beta(h)] \\ &= f(x_0)g(x_0) + [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]h + R(h) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove

$$R(h) = hf(x_0)\beta(h) + h^2f'(x_0)g'(x_0) + h^2f'(x_0)\beta(h) + h^2g'(x_0)\alpha(h) + h^2\alpha(h)\beta(h)$$

è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a h , cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0$. Segue che il prodotto $p(x)$ è differenziabile in x_0 e che la sua derivata in x_0 vale proprio

$$p'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

■

3.3 Derivata della funzione composta

Teorema 3.3 (Derivata della funzione composta).⁵ *Se è definita la funzione composta $g \circ f$, f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \tag{3.4}$$

Dimostrazione. L'ipotesi che f sia derivabile in x_0 si può scrivere così

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \alpha(h) \cdot h \tag{3.5}$$

dove $\alpha(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Posto $f'(x_0) \cdot h + \alpha(h) \cdot h = k$, la 3.5 si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + k \tag{3.6}$$

dove la quantità k tende a zero quando h tende a zero. Similmente, l'ipotesi che g sia derivabile in $y_0 = f(x_0)$ si scrive

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot k + \beta(k) \cdot k \tag{3.7}$$

⁵Questa regola è chiamata *chain rule* (regola della catena) in inglese.

dove $\beta(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow 0$.

Si scriva ora il rapporto incrementale di $g \circ f$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} [g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))] &= \frac{1}{h} [g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))] && \text{(per la 3.6)} \\
 &= \frac{1}{h} [g(y_0 + k) - g(y_0)] \\
 &= \frac{1}{h} [g'(y_0) \cdot k + \beta(k) \cdot k] && \text{(per la 3.7)} \\
 &= g'(y_0) \cdot \frac{k}{h} + \beta(k) \cdot \frac{k}{h} \\
 &= g'(y_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \beta(k) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}
 \end{aligned}$$

Quando h tende a zero, il termine $g'(y_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tende a $g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, mentre il termine $\beta(k) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (prodotto di una quantità che tende a zero per una che tende a un limite finito) tende a zero. La formula (3.7) è quindi dimostrata. ■

3.4 Derivata di x^α , ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$)

La funzione x^α , con α numero reale arbitrario, è definita per $x > 0$. La sua derivata è $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$:

Teorema 3.4. *La derivata di x^α , ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$) è*

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Basta scrivere x^α come $e^{\ln(x^\alpha)}$ e usare le regole di derivazione dell'esponenziale e della funzione composta:

$$\begin{aligned}
 Dx^\alpha &= De^{\ln(x^\alpha)} \\
 &= De^{\alpha \ln(x)} \\
 &= e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\
 &= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \alpha x^{\alpha-1}
 \end{aligned}$$

■

3.5 Derivata della funzione composta. Alcuni casi importanti

Nella seguente tabella sono riportate le applicazioni più frequenti della regola di derivazione della funzione composta.

Funzioni	Derivate
$f(x) = (g(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha (g(x))^{\alpha-1} g'(x)$
$f(x) = \log_a g(x) $	$f'(x) = (\log_a e) \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \ln g(x) $	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = \left(\frac{1}{\log_a e} \right) g'(x) a^{g(x)}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$
$f(x) = \sin g(x)$	$f'(x) = g'(x) \cos g(x)$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x) \sin g(x)$

3.6 Derivata della funzione inversa

Teorema 3.5 (Derivata della funzione inversa). *Sia f una funzione reale definita su un intervallo I e invertibile. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Posto $x = f^{-1}(y)$, il rapporto incrementale di f^{-1} , a partire a y_0 , è

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}$$

Ora si ricordi che se una funzione f è continua su un intervallo, anche la sua inversa f^{-1} è continua. Quindi, se y tende a y_0 , x tende a x_0 ; allora il limite a secondo membro tende a $\frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Esempi

1. **Derivata della radice quadrata.** L'inversa della funzione $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $y = x^2$ è

$$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad x = \sqrt{y}$$

Utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$D(\sqrt{y}) = \frac{1}{D(x^2)} \Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2x} \Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

per ogni y in $(0, +\infty)$.

2. **Derivata del logaritmo.** L'inversa della funzione $(-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $y = e^x$ è

$$(0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty), \quad x = \ln y$$

Utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$D(\ln y) = \frac{1}{D(e^x)} \Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{y}$$

per ogni y in $(0, +\infty)$.

3. **Derivata di arcoseno.** La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $y = \sin x$ è invertibile e la sua inversa è

$$[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \quad x = \arcsin y$$

Allora

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{D(\sin x)} \Big|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos x} \Big|_{x=\arcsin y}$$

Poichè $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, si ottiene:

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

per ogni y in $(-1, +1)$.

4. Derivata di arcocoseno. La funzione $[0, +\pi] \longrightarrow [-1, 1]$, $y = \cos x$ è invertibile e la sua inversa è

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \quad x = \arccos y$$

Allora

$$D(\arccos y) = \frac{1}{D(\cos x)} \Big|_{x=\arccos y} = \frac{1}{-\sin x} \Big|_{x=\arccos y}$$

Poichè $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$, si ottiene:

$$D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

per ogni y in $(-1, +1)$.

5. Derivata di arcotangente. La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \longrightarrow (-\infty, +\infty)$, $y = \tan x$ è invertibile e la sua inversa è

$$(-\infty, +\infty) \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \quad x = \arctan y$$

Allora

$$D(\arctan y) = \frac{1}{D(\tan x)} \Big|_{x=\arctan y} = \cos^2 x \Big|_{x=\arctan y}$$

Essendo $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$, si ricava:

$$D(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

oppure

$$D(\arctan y) = \frac{1}{D(\tan x)} \Big|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Big|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1 + y^2}$$

per ogni y in \mathbb{R} .

3.7 Derivata della funzione reciproca $\frac{1}{f}$

Teorema 3.6 (Derivata della funzione reciproca). *Sia f una funzione reale definita in un intorno di un punto x (fissato) in \mathbb{R} , derivabile in x e diversa da zero in x . Allora la funzione $1/f$ è derivabile in x e si ha:*

$$D \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \quad (3.10)$$

Anzitutto si osservi che f , per ipotesi derivabile nel punto x , deve essere continua in x . Quindi, essendo $f(x) \neq 0$, la funzione f si mantiene diversa da zero in tutto un intorno di x . (Ad esempio, se $f(x) > 0$, esiste un intorno di x in cui f è positiva). Ne segue che la funzione $1/f$ è definita in un intorno di x , (perché il denominatore in quell'intorno si mantiene diverso da zero).

Dimostrazione. Il rapporto incrementale (rispetto al fissato punto x) si scrive:

$$\frac{1}{h} \left[\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right] = \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

Quando h tende a zero, il termine $\frac{1}{h} \cdot (f(x) - f(x+h))$ tende a $-f'(x)$, mentre il denominatore tende a $f(x)^2$. Quindi il rapporto incrementale tende a $-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. ■

3.8 Derivata del quoziente

Teorema 3.7 (Derivata del quoziente). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili, con $g(x) \neq 0$. Allora il rapporto $f(x)/g(x)$ è derivabile e si ha:*

$$D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Basta notare che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e usare la regola di Leibniz del prodotto e la regola (3.11):

$$\begin{aligned} D \frac{f(x)}{g(x)} &= D \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot D \frac{1}{g(x)} \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$