

Archimede. Sulle spirali (Περὶ ἑλίκων)

Commenti e note di alcune proposizioni del trattato

A cura di
Mauro Saita

Per commenti, critiche o segnalazioni di errori scrivere, per favore a:
maurosaita@tiscalinet.it

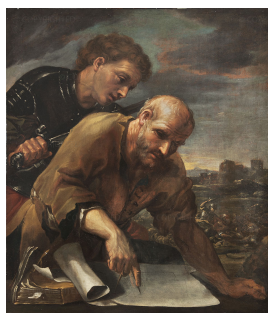


Figura 1: Guillaume Courtois (1628-1679). Olio su tela, 92,3 cm × 107 cm. Il dipinto raffigura l'uccisione di Archimede da parte di un soldato romano durante l'assedio di Siracusa. Secondo una celebre battuta “il contributo alla scienza dell'impero romano è stato quello di fornire la data certa della morte di Archimede: il 212 a.C.”. Sebbene si tratti di una affermazione dai contenuti provocatori, racchiude un fondo di verità.

Indice

1	Quadratura della spirale: una ricostruzione della dimostrazione di Archimede	2
2	Confronto di infinitesimi di ordine diverso	7
3	Tangente alla spirale	9
4	Il ruolo di Archimede nella fondazione del calcolo infinitesimale	11

I Quadratura della spirale: una ricostruzione della dimostrazione di Archimede

Archimede definisce la spirale in termini cinematici; essa è la curva descritta dal punto P che inizialmente si trova in O e che si muove con velocità costante lungo la semiretta Or , mentre la semiretta ruota attorno a O con velocità angolare costante.

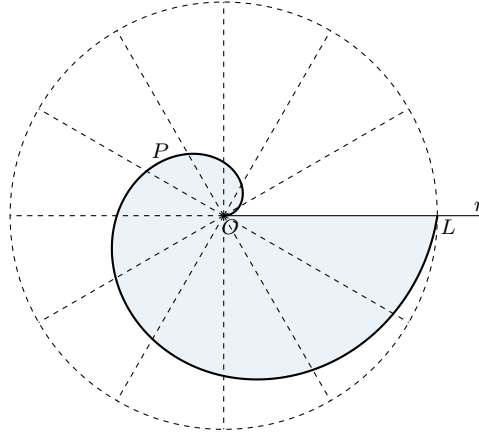


Figura 2: La superficie S delimitata dal primo giro della spirale di Archimede e dal primo segmento OL è quella di colore azzurro.

Nomenclatura.

- (i) “Primo giro della spirale” è l’arco di spirale descritto da P , quando la semiretta Or descrive il primo angolo giro.
- (ii) “Primo segmento” è il segmento OL che ha per estremi l’origine O della spirale e la posizione L occupata dal punto P quando la semiretta Or ha terminato il primo giro.
- (iii) “Primo cerchio” è il cerchio di centro O e raggio OL .

Teorema 1.1 (Archimede. *Sulle spirali*, Proposizione 24.). *La superficie S compresa tra il primo giro della spirale e il primo segmento è un terzo del primo cerchio C*

$$S = \frac{1}{3} C$$

Dimostrazione.

Per rendere più comprensibile la bellissima dimostrazione di Archimede qui si è scelto di suddividerla in quattro passi principali.

Passo 1.

Archimede suddivide il primo cerchio in n settori circolari uguali, ognuno dei quali ha ampiezza pari a $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (si veda la figura 4); al crescere del numero n delle suddivisioni, la superficie di ogni singolo settore diventa sempre più piccola.

Si osservi ora la figura 3: è possibile inscrivere nella superficie S racchiusa tra il primo giro della spirale e il primo segmento, una figura (diciamo I_n) formata dall'unione di $n - 1$ settori circolari *simili* (in figura sono quelli dai contorni di colore verde):

$$I_n = s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_{n-1}$$

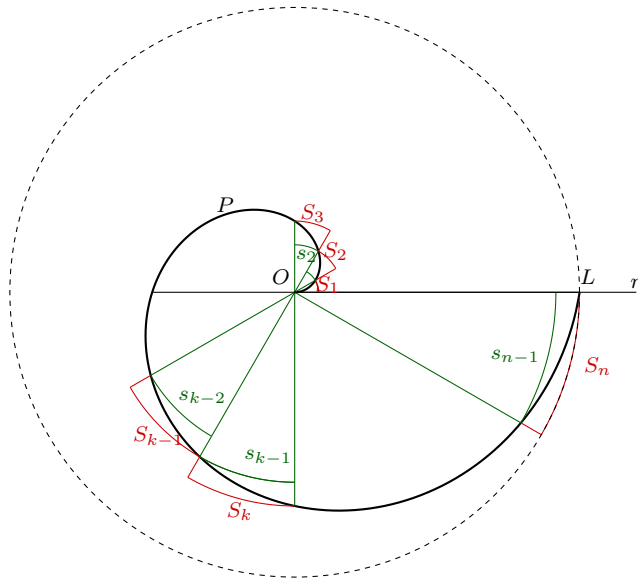


Figura 3: Suddivisione in settori dell'area del primo giro di spirale.

Procedendo in modo analogo è possibile circoscrivere a S , la figura C_n formata dall'unione di n settori circolari *simili* (in figura sono i settori di vertice O , aventi gli archi di colore rosso e i lati rosso-verde):

$$C_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$$

Ora occorre notare che ogni settore circolare circoscritto S_k , $1 \leq k \leq n$ è uguale al settore circolare inscritto s_k , cioè $S_k = s_k$ per ogni k , $1 \leq k \leq n$. Segue che entrambe le figure I_n e C_n si possono scrivere come somme di settori circolari circoscritti:

$$C_n = \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{e} \quad I_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

Inoltre I_n e C_n differiscono per l'ultimo settore circolare circoscritto, ossia

$$C_n - I_n = S_n = \frac{1}{n}C$$

dove C indica il primo cerchio. Quest'ultima uguaglianza sta a significare che la differenza $C_n - I_n$ si può rendere più piccola di qualsiasi superficie prefissata (Spirali, *proposizione* 23).

Passo 2.

Archimede osserva che il settore circolare S_k varia in modo proporzionale a k^2 , cioè

$$S_k = ak^2$$

con a costante positiva.

Si divida il primo cerchio di raggio $OL = R$ in n settori circolari uguali. Poiché la semiretta Or ha velocità angolare costante essa spazza l'angolo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ di ciascun settore circolare nel medesimo tempo τ e nello stesso intervallo di tempo il punto P che genera la spirale percorre il tratto rettilineo di lunghezza $\frac{R}{n}$. Allora, l'area del k -esimo settore circolare è

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2} \cdot \text{raggio}^2 \cdot \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(k \frac{R}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= (\pi R^2) \cdot \frac{k^2}{n^3} \end{aligned} \tag{I.I}$$

Quindi, fissato n , il settore circolare S_k risulta essere proporzionale a k^2 .

1

Vale la pena osservare che per $k = n$ dall'uguaglianza (I.I) si ottiene: $S_n = \frac{\pi R^2}{n} = \frac{C}{n}$. Segue che, per n sufficientemente grande, $S_n < E$ dove E è una qualsiasi superficie preventivamente fissata.

Passo 3.

Archimede nella doppia riduzione all'assurdo utilizza l'uguaglianza che esprime la somma dei quadrati dei primi n numeri interi positivi, ossia:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n \left(n + \frac{1}{2}\right) (n + 1)$$

Qui, non si riporta la sua argomentazione.

Passo 4.

Archimede dimostra con due argomentazioni separate che le ipotesi $S < \frac{1}{3}C$ e $S > \frac{1}{3}C$ conducono a contraddizione. Segue che deve essere $S = \frac{1}{3}C$.

- Si supponga $S < \frac{1}{3}C$.

Allora, per quanto affermato al passo 1, deve esistere un n in corrispondenza del quale

$$\frac{1}{3}C - S > C_n - \mathcal{I}_n > 0$$

Essendo $\mathcal{I}_n < S$ per ogni n , si ottiene $\frac{1}{3}C - \mathcal{I}_n > C_n - \mathcal{I}_n > 0$, ossia

$$\frac{1}{3}C > C_n > 0$$

¹Per dimostrare che $S_k = ak^2$ si può argomentare anche nel seguente modo: indicata con v la velocità (costante) con la quale il punto P si muove sulla semiretta Or , il lato di ogni settore circolare aumenta della quantità $\rho = v\tau$ rispetto al lato del settore circolare precedente mentre l'angolo descritto nel medesimo intervallo di tempo è sempre pari a α . Quindi il lato e l'arco del k -esimo settore circolare sono nell'ordine, $\rho_k = k(v\tau) = k\rho$, $l_k = \rho_k \alpha = (k\rho) \alpha$. Segue: $S_k = \frac{1}{2}l_k \rho_k = \frac{1}{2}(k\rho \alpha) k\rho = \frac{1}{2}\rho^2 \alpha \cdot k^2$.

Ora,

$$\frac{1}{3}C = \frac{1}{3}nS_n = \frac{1}{3}an^3 > a \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n \left(n + \frac{1}{2}\right) (n+1) = \frac{1}{3}an^3 + \text{quantità positive}$$

il che è assurdo.

- Si supponga $S > \frac{1}{3}C$.

Allora deve esistere un n in corrispondenza del quale

$$S - \frac{1}{3}C > C_n - I_n > 0$$

Essendo $C_n > S$ per ogni n , si ottiene $C_n - \frac{1}{3}C > C_n - I_n > 0$, ossia

$$0 < \frac{1}{3}C < I_n$$

Ora, eseguendo per $\frac{1}{3}C$ lo stesso calcolo eseguito nel caso precedente si ottiene

$$\frac{1}{3}C = \frac{1}{3}an^3 > a \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}a(n-1) \left(n - \frac{1}{2}\right) n = \frac{1}{3}an^3 + \text{quantità negative}$$

il che è assurdo.

L'area delimitata dal primo giro di spirale ottenuta con il calcolo integrale

Equazione della spirale. Secondo la definizione cinematica di spirale data da Archimede, il punto P che descrive la curva si muove di moto rettilineo lungo la semiretta Or con velocità v costante mentre la medesima semiretta ruota (per esempio, in senso antiorario) attorno a O con velocità angolare ω anch'essa costante.

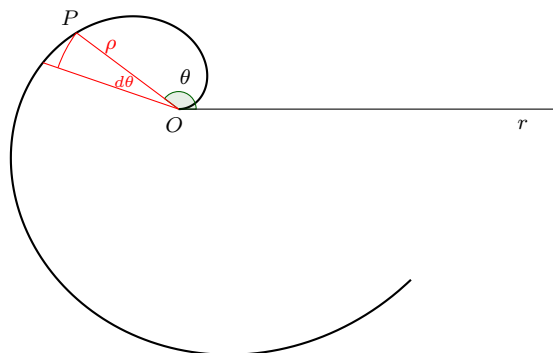


Figura 4: Spirale in coordinate polari, $\rho = \lambda\theta$.

Con riferimento alla figura qui sopra, si supponga che all'istante $t = 0$ il punto P si trovi in O e che la semiretta Or sia diretta orizzontalmente da sinistra verso destra; dopo un tempo t le coordinate polari di P sono $(\rho, \theta) = (vt, \omega t)$ e l'equazione polare della spirale è

$$\rho = \lambda\theta$$

dove $\lambda = \frac{v}{\omega}$.

Area del primo giro di spirale. L'area di un settore infinitesimo di spirale è $dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \lambda^2 \frac{4\pi^3}{3} \quad (1.2)$$

Il risultato appena trovato si può scrivere in modo diverso; posto $\theta = 2\pi$ nell'equazione della spirale si ottiene il raggio R del primo cerchio, cioè $R = 2\pi\lambda$ e sostituendo $\lambda = \frac{R}{2\pi}$ in 1.2 si ottiene

$$A = \frac{1}{3}\pi R^2 \quad (1.3)$$

2 Confronto di infinitesimi di ordine diverso

Proposizione 5. Archimede, *Sulle Spirali*.

Dati un cerchio e una retta tangente al cerchio, è possibile tracciare una linea retta dal centro del cerchio alla tangente, in modo che la linea retta tra la tangente e la circonferenza del cerchio abbia un rapporto con il raggio [del cerchio] inferiore rispetto alla circonferenza del cerchio che è tra il punto di tangenza e la <retta> tracciata fino alla data circonferenza (per quanto grande) [del cerchio].

All'enunciato segue una dimostrazione che appare geniale per semplicità e che a mio parere dovrebbe essere proposta sia nella scuola secondaria, sia nei numerosi corsi di analisi matematica di livello universitario.

L'interpretazione che si riporta qui dell'enunciato e della dimostrazione di Archimede è quella proposta in [6]. La tesi di Russo espressa in linguaggio moderno è la seguente: Archimede individua due segmenti infinitesimi, diciamo dl_1 , dl_2 , il cui rapporto $\frac{dl_1}{dl_2}$ è ancora un infinitesimo, cioè stabilisce che dl_1 è un *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* dl_2 . Secondo questa ricostruzione, per la prima volta nella storia della matematica vengono confrontati due infinitesimi di ordine diverso.

Con riferimento alla figura qui sotto, sia P un punto della circonferenza di centro O , t la retta tangente alla circonferenza in P e Q un altro punto di t . Si congiunga O con Q e sia A il punto di intersezione della circonferenza con il segmento OQ . Se si immagina il punto Q mobile sulla tangente t , quando Q si avvicina a P i segmenti AQ e PQ diventano entrambi infinitesimi ma di tipo diverso. Allora il rapporto $\frac{AQ}{PQ}$ è anch'esso infinitesimo.

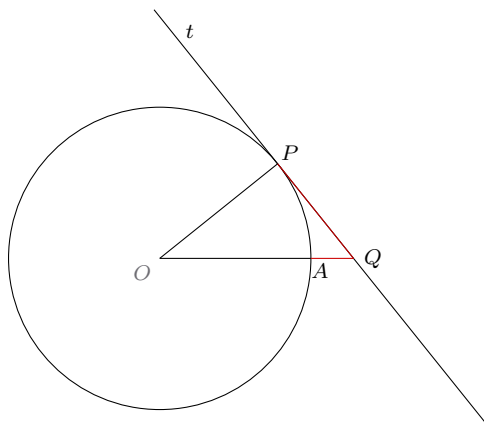
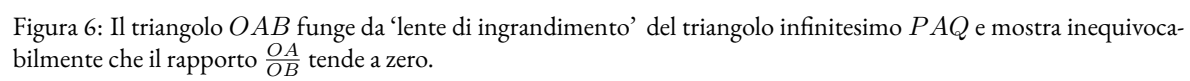


Figura 5: Quando l'angolo $\widehat{POQ}$ diventa piccolo, AQ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a PQ .

La dimostrazione di Archimede è davvero semplice.

Si tracci la retta r per O perpendicolare al raggio OP e la retta PA il cui prolungamento incontra la retta r in B . I triangoli PAQ e OAB risultano simili e pertanto il rapporto $\frac{AQ}{PQ}$ è uguale al rapporto $\frac{OA}{OB}$. Ora, il numeratore OA è costante perché raggio della circonferenza mentre il denominatore OB diventa sempre più lungo; segue che il loro rapporto $\frac{AQ}{PQ} = \frac{OA}{OB}$ diventa sempre più piccolo. In termini più rigorosi, Archimede afferma che, fissata una qualsiasi quantità positiva ε , il rapporto $\frac{AQ}{PQ}$ diviene minore di ε quando Q è abbastanza vicino a P .



3 Tangente alla spirale

Teorema 3.1 (Archimede, *Sulle Spirali*, *Proposizione 20*). *Se si prende un punto qualsiasi sulla spirale descritta nella prima rotazione, e per esso si conduce la tangente alla spirale, e dal principio della spirale si conduce una perpendicolare alla retta che unisce il principio col punto di contatto, la porzione di perpendicolare compresa tra la tangente e il principio della spirale sarà uguale all'arco di circonferenza descritto dal raggio che unisce il principio al punto di contatto, intersecato dalla retta di inizio rotazione.*

Con riferimento alla figura qui sotto, si tracci la tangente in un punto P qualsiasi della spirale di centro O . La perpendicolare al raggio OP condotta da O interseca la tangente in Z . Si tracci l'arco di circonferenza di centro O e raggio OP ; esso interseca la semiretta Or in Q . Allora la lunghezza del segmento OZ coincide con quella dell'arco PQ , cioè

$$\widehat{PQ} = \overline{OZ}$$

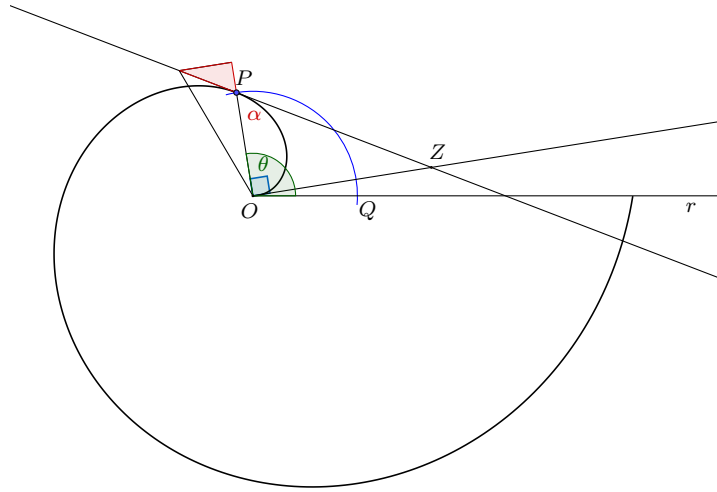


Figura 7: Tangente alla spirale in P . Il segmento OZ è uguale all'arco di circonferenza $\widehat{PQ}$.

Qui non viene presentata la dimostrazione di Archimede che è complicata e richiede molti lemmi preparatori. Ci si limita a qualche considerazione di carattere generale sottolineare che il risultato esposto sopra può essere interpretato in due modi: se si sa rettificare un arco di circonferenza (in figura, $\widehat{PQ}$) allora il teorema fornisce un metodo per tracciare la tangente alla spirale in un suo punto qualsiasi; se invece si sa tracciare la tangente alla spirale in P allora il teorema fornisce un metodo per rettificare un arco di circonferenza. Qualunque sia il punto di vista assunto, il risultato esposto in questo teorema contiene idee che stanno alla base del calcolo differenziale, come mostra la dimostrazione moderna. Indicate con (ρ, θ) le coordinate polari di P , l'equazione della spirale assume la forma $\rho = \lambda\theta$ e $\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda$. Posto $\widehat{OPZ} = \alpha$,

$$\tan \alpha = \frac{OZ}{OP} = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\lambda}$$

e da queste uguaglianze si ricava

$$OZ = \frac{\rho^2}{\lambda} = \rho\theta = \widehat{PQ}$$

Caso particolare di questo risultato è rappresentato dalla seguente

Teorema 3.2 (Archimede, *Sulle Spirali*, Proposizione 18.). *Se una linea retta è tangente ad una spirale, nella prima rotazione, nel suo estremo (termine della spira) e se dal punto che è principio della spirale (l'origine) si conduce una retta perpendicolare alla retta di inizio rotazione, la retta così condotta incontra la tangente, e il segmento di retta compreso fra la tangente e il principio della spirale sarà uguale alla circonferenza del primo cerchio.*

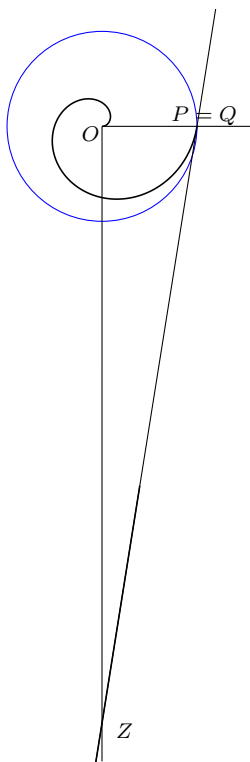


Figura 8: Al termine del primo giro il punto P coincide con Q e l'arco $\widehat{PQ}$ diventa la circonferenza del primo cerchio. In questo caso il segmento OZ rettifica la circonferenza del primo cerchio (la figura è stata opportunamente scalata).

Il motivo per cui questa proposizione precede il risultato più generale espresso dalla Proposizione 20 è duplice: innanzitutto nella matematica greca si è soliti procedere dal particolare al generale; prima Archimede presenta il caso più semplice, quando la perpendicolare OZ interseca la semiretta Or nella sua posizione iniziale; poi estende il risultato alle posizioni intermedie (Proposizione 20) e alle spire successive (Proposizione 21). Un altro motivo da non sottovalutare risiede nella straordinarietà del risultato espresso dalla Proposizione 18: esso risolve uno dei tre grandi problemi dell'antichità: la rettificazione del cerchio. Sebbene il segmento OZ non sia stato trovato con il solo ausilio di riga e compasso, esso è uguale all'intera circonferenza di raggio OP .

La riflessione su questa proposizione meriterebbe molto più spazio di quello che qui le viene dedicato; per colmare questa lacuna si rimanda il lettore ai commenti molto interessanti contenuti in pag

Tra i tanti aspetti che Nerz affronta nella sua approfondita analisi qui si riporta solo il brevissimo estratto in cui l'autore ipotizza che la dimostrazione di Archimede contenga l'idea di approssimare localmente la spirale con la tangente: *"In effetti, considerando questa particolare questione, si potrebbe facilmente essere indotti a pensare, localmente per questo problema (anche se tale procedura non si è affermata come tecnica matematica generale), che la proprietà della tangente esprima una composizione locale di moti."*

4 Il ruolo di Archimede nella fondazione del calcolo infinitesimale

Le radici del calcolo infinitesimale sono rintracciabili in due fondamentali problemi affrontati per la prima volta da Archimede in epoca ellenistica, ossia la determinazione di *aree di figure curve* e quello delle *lunghezze dei loro contorni*. Il primo e più significativo risultato è stato senz'altro quello di trovare la misura della superficie del cerchio e quella della lunghezza della sua circonferenza. Archimede ha dimostrato che i due problemi sono equivalenti, mediante una tra le più belle dimostrazioni che il pensiero matematico possa annoverare tra i suoi risultati.

La ricerca di aree di figure curve ha prodotto molti altri risultati significativi come ad esempio l'area del segmento di parabola, l'area dell'ellisse e quella del primo giro di spirale. In estrema sintesi il procedimento di Archimede può essere riassunto così: egli "pesava" le figure in modo da poter formulare una *congettura* sulla misura dell'area A che stava cercando; poi ricercava una dimostrazione rigorosa del risultato conseguito per via empirica. Come è noto egli utilizzava due successioni di figure $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{C}_n$, le cui aree fornivano un'approssimazione dell'area A , la prima per difetto e la seconda per eccesso, $\mathcal{I}_n \leq A \leq \mathcal{C}_n$. Mostrava con considerazioni rigorose che, al crescere di n , la differenza $\mathcal{C}_n - \mathcal{I}_n$ diventava minore di qualsiasi area precedentemente fissata e infine, con una doppia riduzione all'assurdo, stabiliva che l'area doveva essere esattamente A .

Senza voler sminuire i contributi dei matematici del '600 prima e di Cauchy, Riemann e altri poi si può ragionevolmente affermare che l'attuale definizione di integrale definito, resa possibile via via che si chiariva il concetto di 'curva', non è altro che la generalizzazione del procedimento di Archimede.

Diversa è invece la situazione per quanto riguarda il calcolo differenziale: Archimede aveva probabilmente capito che nella determinazione della lunghezza di linee curve giocava un ruolo cruciale la tangente geometrica alla curva tuttavia manca, negli scritti giunti fino a noi del matematico siracusano, l'idea di approssimare tratti infinitesimi di curva con microsegmenti rettilinei della retta tangente. Sarà questo modo di procedere, forse utilizzato per la prima volta da Barrow e Wallis e successivamente da Newton, che permise di mettere in luce il legame di carattere locale esistente tra una curva e la sua retta tangente.

D'altra parte bisogna dar merito ad Archimede che, pur non possedendo una definizione rigorosa di limite, ha per primo preso in considerazione quantità geometriche infinite e quantità geometriche infinitesime, stabilendo in relazione a queste ultime l'esistenza di infinitesimi di ordine diverso.

In conclusione, se si vuole spiegare per quale motivo sono stati più importanti i contributi di Archimede al calcolo integrale rispetto a quelli del calcolo differenziale bisogna ricordare che l'analisi matematica moderna ha evidenziato che trovare le lunghezze di curve è più difficile che calcolare le aree che tali curve racchiudono. Il caso dell'ellisse ne costituisce un esempio: è stato lo stesso Archimede a calcolarne l'area ma è stato necessario ricorrere a complicati integrali ellittici per determinarne la lunghezza.

Riferimenti bibliografici

- [1] Archimedes and Thomas Little Heath. *The Works of Archimedes*. Dover Publications, Mineola, NY, 2002. Unabridged reprint of the 1897 Cambridge University Press edition, including the 1912 supplement.
- [2] Archimedes and Reviel Netz. *The Works of Archimedes: Volume 2, On Spirals: Translation and Commentary*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [3] Eduard Jan Dijksterhuis. *Archimedes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Translated by C. Dikshoorn, with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr.
- [4] Federico Giampiero Lastaria. Archimede, la misura del cerchio. Disponibile online all'indirizzo: <https://www.heinrichfleck.net/quaderni/quaderni.html>, 2023. Ultima consultazione: 16 luglio 2026.
- [5] Lucio Russo. Corso di storia della scienza (21 lezioni video). Disponibile online all'indirizzo: <https://www.luciorusso.it/>, 2010. Un raro corso di storia della scienza di cui si consiglia la visione completa. Il corso propone una rilettura critica dell'evoluzione del pensiero scientifico dalle sue origini ellenistiche all'era digitale. E' dedicato a studenti universitari di facoltà scientifiche ma anche a studenti della scuola superiore del quinto anno. La sua rilevanza didattica riguarda molteplici aspetti, non ultimo quello di scardinare l'idea di una superiorità intrinseca della modernità mostrando come la scienza proceda per fasi di grandioso avanzamento a cui seguono lunghi periodi di regresso e oblio culturale. Gli argomenti riguardanti Archimede sono trattati principalmente nella lezione 9. Ultima consultazione: 10 giugno 2026.
- [6] Lucio Russo. *Archimede. Un grande scienziato antico*. Frece. Carocci, Roma, 2019.