Federico Lastaria
Mauro Saita

La cicloide
Dicembre 2011

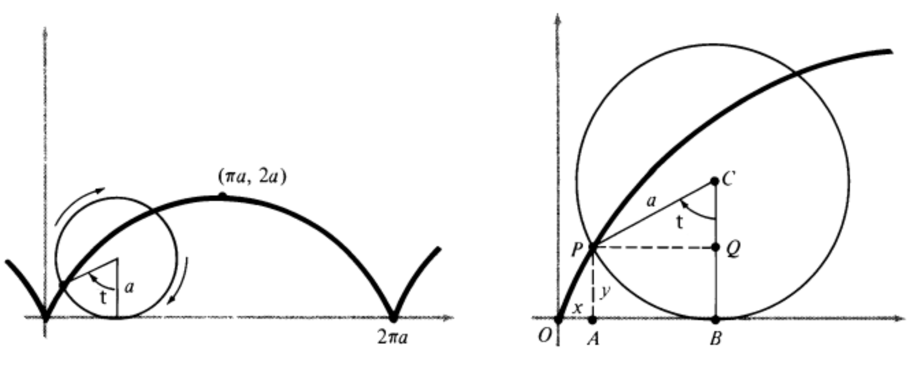
Indice

1 La cicloide

Equazioni parametriche per la cicloide sono

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $a > 0$ è il raggio della circonferenza che genera la cicloide e $t \in \mathbb{R}$.



.

Figura 1: La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza quando questa rotola, senza strisciare, su di una retta. L'ascissa x del punto P, che all'istante $t = 0$ coincide con l'origine O, è $x = \overline{OB} - \overline{AB}$. La lunghezza $\overline{OB}$ è uguale alla lunghezza dell'arco di circonferenza BP, vale a dire at, perché la circonferenza rotola senza strisciare; mentre $\overline{AB} = \overline{PQ} = a \sin t$. Dunque $x = \overline{OB} - \overline{AB} = at - a \sin t$. La coordinata y è data da $y = \overline{BC} - \overline{QC} = a - a \cos t$.

1.1 Il Principio del Tempo Minimo di Fermat e la Legge di Snell

In breve, il Principio del tempo minimo di Fermat si può enunciare nel modo seguente:

Per andare da un punto a un altro, la luce sceglie sempre il cammino più rapido.

In particolare, Fermat applica il Principio del tempo minimo allo studio del fenomeno della rifrazione della luce e pone il seguente problema, risolto da Leibniz:

Problema 1.1 (Dal Principio del tempo minimo segue la legge di rifrazione di Snell)**.** *Supponiamo che un raggio luminoso si propaghi da un punto A a un punto B, attraversando due mezzi, rispettivamente con le velocità costanti v_1 e v_2. Supponiamo che valga il Principio del tempo minimo. Dimostrare che allora vale la Legge di Snell*[1]

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \qquad \text{(Legge di Snell)}$$

dove α_1 e α_2 sono gli angoli che la normale alla superficie di separazione dei due mezzi forma rispettivamente con il raggio incidente e con quello rifratto.

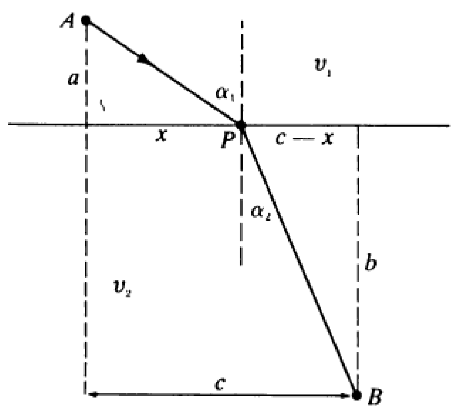


Figura 2: La legge di Snell sulla rifrazione della luce.

Soluzione.

Fissiamo un sistema di riferimento come nella figura di sopra. Sia $P = (x, 0)$ il punto in cui il raggio incontra l'asse delle x. Il tempo totale $T(x)$ impiegato dal raggio di luce per andare da A a B passando per P è uguale alla somma del tempo per andare da A a P e del tempo per andare da P a B:

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$$

La derivata di T rispetto a x è

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{-(c - x)}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

[1] Questa legge fu trovata sperimentalmente dal matematico e astronomo olandese W. Snell nel 1621.

Si osservi che $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha_1$ e $\dfrac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \sin\alpha_2$. Quindi la derivata $T'(x)$ è zero quando

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\sin\alpha_1 - \frac{1}{v_2}\sin\alpha_2 = 0$$

cioè quando

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \qquad \textit{(Legge di Snell)}$$

Per concludere, si noti che la derivata seconda

$$T''(x) = \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{(b^2+(c-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

è sempre positiva e pertanto il valore di x che annulla T' è proprio un minimo. □

1.2 Il problema della brachistòcrona

"Dati due punti A e B su un piano verticale, determinare il cammino AMB lungo il quale una particella mobile M, che parte da A e discende soltanto sotto l'effetto del suo peso, raggiunge B nel tempo più breve". (Johann Bernoulli[2])

La sfida di Johann Bernoulli fu raccolta da alcuni dei più grandi matematici del tempo. Oltre che dallo stesso Johann Bernoulli (che aveva posto il problema), la questione fu risolta, con metodi diversi e tutti corretti, anche dal fratello di Johann, Jacob Bernoulli, da Leibniz, da De L'Hospital e da Newton. Qui presentiamo la soluzione molto interessante di Johann Bernoulli, che collega il problema di trovare la curva *brachistocrona*[3], cioè la curva che realizza il tempo minimo, con il Principio del Tempo Minimo di Fermat e la Legge di Snell sulla rifrazione della luce.

Supponiamo che una particella, vincolata senza attrito a una curva, cada sotto l'effetto della sola forza gravitazionale. Fissiamo un sistema di riferimento in cui l'asse delle y sia orientato verso il basso. Se la particella parte dall'origine con velocità nulla, quando avrà percorso in verticale un dislivello y la sua velocità sarà [4]

$$v = \sqrt{2gy} \tag{1.2}$$

[2] *Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur*, (Un nuovo problema alla cui soluzione i matematici sono invitati), *Acta Eruditorum*, 1696.

[3] Greco: $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ (brachistos), più corto; $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ (chronos), tempo.

[4] Se pensiamo che i punti a potenziale zero siano quelli a quota y, alla partenza l'energia potenziale è mgy e l'energia cinetica è zero, mentre a quota y l'energia potenziale è zero e quella cinetica è $\frac{1}{2}mv^2$. Poiché la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale è costante (legge di conservazione dell'energia), si ha $mgy = \frac{1}{2}mv^2$, da cui si ricava $v = \sqrt{2gy}$.

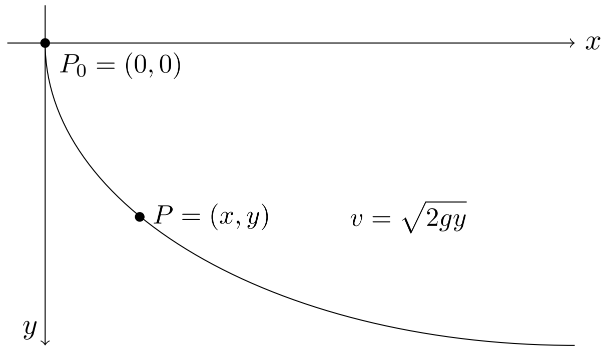


Figura 3: La velocità nel punto $P(x, y)$ è $v = \sqrt{2gy}$. L'asse y è orientato verso il basso.

Supponiamo che C sia una curva lungo la quale il tempo di caduta sia il minimo possibile. Immaginiamo di dividere il piano verticale in strati orizzontali di altezza molto piccola, in modo tale che all'interno di ciascuno di essi i piccoli archi della curva C siano rettilinei e su di essi la velocità del punto mobile sia costante. Otteniamo in questo modo una spezzata poligonale, percorrendo la quale il punto mobile impiega il minor tempo possibile. Per il Principio del Tempo Minimo, deve allora valere la Legge di Snell (Problema 1.1), cioè deve esistere una numero K (costante su tutta la spezzata poligonale) per il quale $\frac{v_i}{\sin \alpha_i} = K$, per ogni piccolo strato orizzontale. Prendendo allora strati sempre più piccoli, concludiamo che il cammino C sul quale si realizza il tempo minimo deve soddisfare *in ogni punto* la proprietà

$$\frac{v}{\sin \alpha} = K \tag{1.3}$$

dove v è la velocità, α è l'angolo che la tangente alla traiettoria forma con la retta verticale e K è costante su tutta la traiettoria.

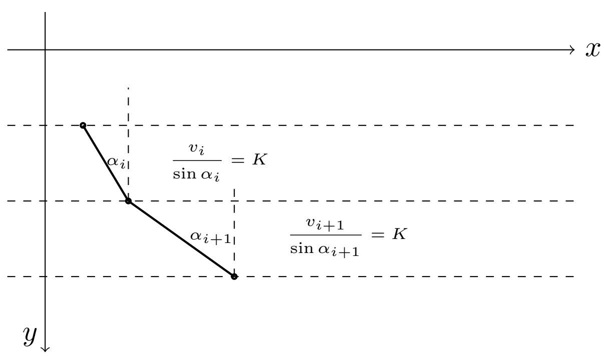


Figura 4: Sul piccolo tratto rettilineo i-esimo, α_i è l'angolo fra la traiettoria e la retta normale e v_i è la velocità. Il rapporto $\frac{v_i}{\sin \alpha_i}$ è costante su ogni piccolo tratto. Al limite, prendendo tratti di curva sempre più piccoli, si conclude che $\frac{v}{\sin \alpha} = K$ è costante su tutta la traiettoria del cammino che realizza il tempo minimo.

Se $y = y(x)$ è la funzione incognita il cui grafico è il cammino C di tempo minimo, si ha

$$y' = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

da cui segue $(y')^2 \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ e quindi

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{1.4}$$

Poiché dalla (1.2) sappiamo che $v = \sqrt{2gy}$, si ha

$$K = \frac{v}{\sin\alpha} = \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1+(y')^2} \tag{1.5}$$

Elevando a quadrato,

$$\frac{K^2}{2g} = y(1+(y')^2)$$

ossia

$$c = y + y(y')^2$$

dove si è posto $c = \dfrac{K^2}{2g}$. Dall'ultima equazione segue

$$\frac{c-y}{y} = (y')^2, \qquad \frac{y}{c-y} = \frac{1}{(y')^2}$$

Chiamiamo $x = x(y)$ la funzione inversa di $y = y(x)$ (tale funzione unversa esiste, perché $y(x)$ è crescente). Per la regola di derivazione della funzione inversa, $\dfrac{1}{y'} = x'$. Dunque,

$$\frac{y}{c-y} = (x')^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2, \qquad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

ossia, alla fine,

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} \cdot dy \tag{1.6}$$

Calcoliamo ora l'integrale

$$\int \sqrt{\frac{y}{c-y}} \cdot dy \tag{1.7}$$

Con la sostituzione

$$y = c\sin^2 u$$

si ha $dy = 2c\,\sin u\,\cos u\,du$ e $c - y = c\cos^2 u$. Sostituendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{c\,\sin^2 u}{c\,\cos^2 u}}\, 2c\,\sin u\,\cos u\,du &= c\int 2\sin^2 u\,du \\
&= c\int (1-\cos 2u)\,du \\
&= c\,(u - \frac{1}{2}\sin 2u) + x_0 \qquad (x_0 \text{ costante})
\end{aligned}$$

In definitiva, da (1.6) segue

$$x(u) = c\,(u - \frac{1}{2}\sin 2u) + x_0 \tag{1.8}$$

Ma $x_0 = 0$, perché all'istante iniziale il punto è nell'origine. Ricordando che si è effettuata la sostituzione $y = c\sin^2 u = c(1-\cos^2 u) = \frac{c}{2}(1-\cos 2u)$, abbiamo

$$\begin{cases} x(u) &= \frac{c}{2}(2u - \sin 2u) \\ y(u) &= \frac{c}{2}(1-\cos 2u) \end{cases} \tag{1.9}$$

Se poniamo $\frac{c}{2} = a$ e $2u = t$, vediamo che le equazioni (1.9) coincidono con le equazioni (1.1) di una cicloide.

1.3 Il problema della tautòcrona

La legge sulla isocronia delle oscillazioni di un pendolo ordinario, scoperta da Galileo, è valida soltanto in modo approssimativo: in realtà il periodo varia, se pur di poco, con l'ampiezza delle oscillazioni[5]. Nelle sue ricerche sulla costruzione di orologi precisi, il matematico (fisico e astronomo) Christian Huygens si pose dunque il problema di determinare una curva lungo la quale il periodo di oscillazione fosse rigorosamente indipendente dalla posizione in cui la particella oscillante iniziasse il suo moto. Huygens stesso scoprì che la cicloide gode di questa proprietà. Scoprì inoltre che per costruire un pendolo la cui massa oscillante descrivesse una cicloide, occorreva che il filo del pendolo si avvolgesse sue due archi di cicloide, come nella figura qui sotto. (In termini matematici: *l'evoluta di una cicloide è ancora una cicloide*).

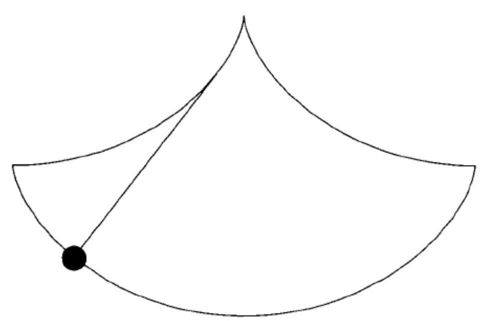


Figura 5: Il pendolo cicloidale di Huygens (1673).

Riscriviamo le equazioni parametriche di una cicloide generata dalla rotazione di una circonferenza di raggio $a > 0$:

$$\begin{cases} x(\vartheta) &= a(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y(\vartheta) &= a(1-\cos\vartheta) \end{cases} \tag{1.10}$$

[5]Per angoli minore di dieci gradi, le oscillazioni hanno la stessa durata a meno di un errore relativo minore dello 0.5%. Quindi, con buona approssimazione, le *piccole* oscillazioni possono ritenersi isocrone.

$\vartheta \in \mathbb{R}$. (Abbiamo chiamato il parametro ϑ, e non t, perché utilizzeremo t per designare il tempo). Calcoliamo l'elemento di lunghezza:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta \\ &= \sqrt{a^2(1-\cos\vartheta)^2 + a^2\sin^2\vartheta}\; d\vartheta \\ &= a\sqrt{1-\cos\vartheta}\, d\vartheta \end{aligned}$$

Per ogni punto che scivola lungo cicloide, partendo dal punto (x_0, y_0) con velocità nulla, il lavoro fatto dalla forza gravitazionale dalla quota y_0 alla quota y, $(y > y_0)$, deve essere uguale alla variazione di energia cinetica:

$$mg(y-y_0) = \frac{1}{2}mv^2$$

Dunque la velocità $v = \dfrac{ds}{dt}$ quando l'ordinata del punto è $y - y_0$ è data da

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2g(y-y_0)} \tag{1.11}$$

e quindi

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}} = \frac{a\sqrt{1-\cos\vartheta}}{\sqrt{2g(y-y_0)}}\, d\vartheta \tag{1.12}$$

Il tempo impiegato dalla pallina posta inizialmente, in quiete, nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ (corrispondente al valore ϑ_0 del parametro) per raggiungere il punto più basso della cicloide (corrispondente al valore $\vartheta = \pi$ del parametro), è allora dato dal seguente integrale:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2a^2(1-\cos\vartheta)}{2ag(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}}\; d\vartheta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}}\; d\vartheta \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(\vartheta/2)}{[2\cos^2(\vartheta_0/2) - 1] - [2\cos^2(\vartheta/2) - 1]}}\; d\vartheta \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\sin(\vartheta/2)}{\sqrt{\cos^2(\vartheta_0/2) - \cos^2(\vartheta/2)}}\; d\vartheta \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile

$$u = \frac{\cos(\vartheta/2)}{\cos(\vartheta_0/2)}, \qquad\qquad du = -\frac{\sin(\vartheta/2)}{2\cos(\vartheta_0/2)}\, d\vartheta$$

l'ultimo integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\sin(\vartheta/2)}{\sqrt{\cos^2(\vartheta_0/2) - \cos^2(\vartheta/2)}}\, d\vartheta &= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{u(\vartheta_0)}^{u(\pi)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\
&= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\, [\arcsin u]_0^1 \\
&= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}
$$

Si vede allora che il risultato $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ non dipende da ϑ_0, ossia è lo stesso per tutti i punti sulla cicloide.

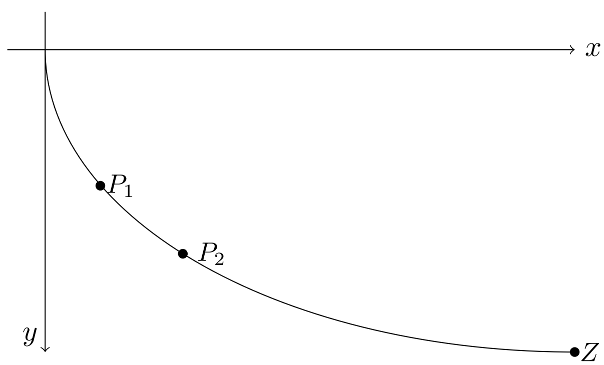


Figura 6: I due punti mobili P_1 e P_2, partendo simultaneamente da fermi, raggiungono il punto più basso Z nello stesso tempo: la cicloide è tautocrona.

Abbiamo dunque dimostrato che *il tempo impiegato da un punto mobile sulla cicloide (e vincolato senza attriti ad essa) per raggiungere il punto più basso della cicloide, partendo con velocità nulla e sotto l'effetto della forza gravitazionale, è sempre lo stesso*. Dunque abbiamo dimostrato che la cicloide (rispetto al potenziale gravitazionale) è *tautòcrona* [6].

[6] Dal greco *tauto* (lo stesso) e *chronos* (tempo).