# Modelli epidemiologici

## Indice degli argomenti

# Modello epidemiologico “SIS”

Una popolazione di $N$ individui è suddivisa, in un certo istante di tempo, in individui suscettibili $S$ e individui infetti $I$:

$$N = S + I \tag{1}$$

Se la malattia non prevede immunizzazione, gli individui suscettibili si infettano e viceversa, quelli infetti tornano ad essere suscettibili:

$$\boxed{S} \; \underset{\gamma\, I}{\overset{\frac{\lambda\, S\, I}{N}}{\rightleftarrows}} \; \boxed{I}$$

# Modello epidemiologico "SIS"

- $\lambda =$ numero di contagi per ogni infetto, nell'unità di tempo.
- $\gamma =$ numero di guarigioni per ogni infetto, nell'unità di tempo.
- $\dfrac{\lambda\, S\, I}{N} =$ velocità di trasferimento da suscettibili a infetti (proporzionale al prodotto $S\, I$).
- $\gamma\, I =$ velocità di trasferimento da infetti a suscettibili (proporzionale a $I$).

# Modello epidemiologico "SIS"

La seguente equazione (alle differenze finite) esprime l'aumento (diminuizione) di infetti in una singola giornata:

$$\begin{aligned} I(n+1) - I(n) &= \frac{\lambda\, S\, I}{N} - \gamma\, I \qquad\qquad (S = N - I) \\ &= \frac{\lambda\,(N-I)\,I}{N} - \gamma\, I \\ &= \lambda I \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{I}{N}\right) \end{aligned}$$

# Modello epidemiologico "SIS"

## L'equazione differenziale che traduce il modello "SIS".

Passando dal discreto al continuo, la precedente equazione assume la forma seguente

$$\frac{dI}{dt} = \lambda I(t)\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{I(t)}{N}\right)$$

Infine, assumendo che al tempo $t_0 = 0$ il numero di infetti sia $I_0$, si giunge al seguente problema di Cauchy

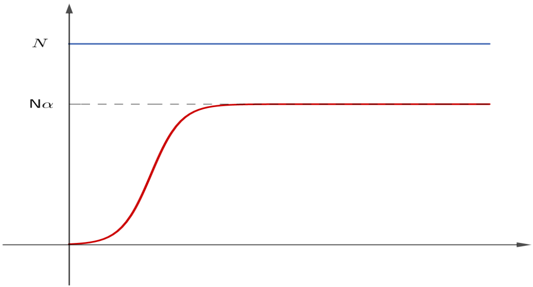
$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} & = & \lambda I(t)\left(\alpha - \dfrac{I(t)}{N}\right) \\ I(0) & = & I_0 \end{cases}$$

(dove si è posto $\alpha = 1 - \frac{\gamma}{\lambda}$)

# Modello epidemiologico “SIS”

La soluzione dell’equazione differenziale (a variabili separabili) è:

$$I(t) = \frac{N\alpha I_0}{I_0 + (N\alpha - I_0)e^{-\lambda\alpha t}}$$



# Modello epidemiologico “SIR”

Se la malattia prevede immunizzazione, la popolazione di $N$ individui è suddivisa in suscettibili $S$, infetti $I$ e rimossi $R$. I rimossi sono individui che, avendo contratto la malattia, hanno sviluppato anticorpi oppure sono deceduti.

$$N = S + I + R$$

$$\boxed{S} \xrightarrow{\frac{\lambda IS}{N}} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

# Modello epidemiologico "SIR"

Il modello "SIR "è descritto da due equazioni (alle differenze finite)

$$\begin{cases} S(n+1) - S(n) & = & -\dfrac{\lambda\, S\, I}{N} \\ \\ I(n+1) - I(n) & = & \dfrac{\lambda\, S\, I}{N} - \gamma I \end{cases}$$

## Il sistema di equazioni differenziali del modello "SIR".

Passando dal discreto al continuo, si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} & = & -\dfrac{\lambda\, S\, I}{N} \\ \\ \dfrac{dI}{dt} & = & \gamma I \left( \dfrac{S}{N} \dfrac{\lambda}{\gamma} - 1 \right) \end{cases}$$

# Modello epidemiologico “SIR”

## Tasso di contagiosità

Il tasso di contagiosità è espresso dal numero (variabile nel tempo)

$$\rho = \frac{S}{N}\frac{\lambda}{\gamma}$$

Esso esprime quante persone vengono contagiate da una sola persona, in media e in un certo arco di tempo. Se $\rho$ è maggiore di 1, l’epidemia è in espansione, se $\rho$ è minore di 1 l’epidemia rallenta.

# Modello epidemiologico “SIR”

## Prima fase dell'epidemia: $\rho = \rho_0 >> 1$

Nella prima fase dell'epidemia, la (quasi) totalità della popolazione è formata da suscettibili, cioè $S \sim N$. Segue che:

$$\rho = \frac{S}{N}\frac{\lambda}{\gamma} \sim \frac{\lambda}{\gamma} = \rho_0$$

In Italia, all'inizio dell'epidemia di COVID-19, l'Istituto Superiore di Sanità (ISS) in collaborazione con la Fondazione Bruno Kessler di Trento ha stimato $\rho_0$ nelle regioni più colpite dal virus:

| **Regione** | $\boldsymbol{\rho_0}$ |
|---|---|
| *Lombardia* | $2,96$ |
| *Veneto* | $2,51$ |
| *EmiliaRomagna* | $2,84$ |

# Modello epidemiologico "SIR"

## Prima fase dell'epidemia: $\rho = \rho_0 > 1$

Nella prima fase dell'epidemia, l'equazione differenziale che descrive come varia il numero di infetti nel tempo è:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} & = & \gamma I \left(\rho_0 - 1\right) \\ \\ I(0) & = & 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è:

$$I(t) = I_0 e^{\gamma(\rho_0 - 1)t}$$

# Modello epidemiologico "SIR"

## Prima fase dell'epidemia: $\rho = \rho_0 >> 1$ (continuazione).

Per $\rho_0 > 1$, la crescita è esponenziale:

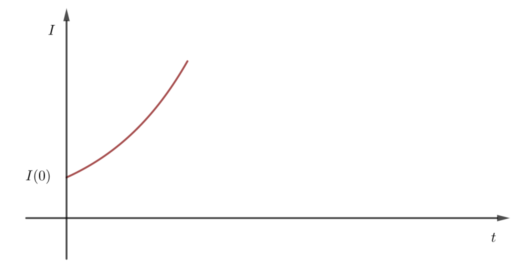



Figure: L'andamento di $I(t)$ nella prima fase dell'epidemia ($\rho_0 >> 1$).

# Modello epidemiologico “SIR”

## Fase di picco: $\rho \sim 1$

Con il trascorrerre del tempo il numero di suscettibili diminuisce e l’indice $\rho$ diventa circa 1. L’equazione diffrenziale che descrive il comportamento degli infetti assume la forma seguente

$$\frac{dI}{dt} = \gamma I \underbrace{\left( \frac{S}{N} \frac{\lambda}{\gamma} - 1 \right)}_{\text{tende a } 0} \sim 0$$

cioè la variazione di $I = I(t)$ è prossima a zero. Questa è la fase di picco.

# Modello epidemiologico "SIR"

## Terza fase dell'epidemia: $\rho < 1$

Nella terza fase dell'epidemia, l'equazione differenziale che coinvolge $I$ assume la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} & = & \gamma I\,(\rho - 1) \\ \\ I(0) & = & 0 \end{cases}$$

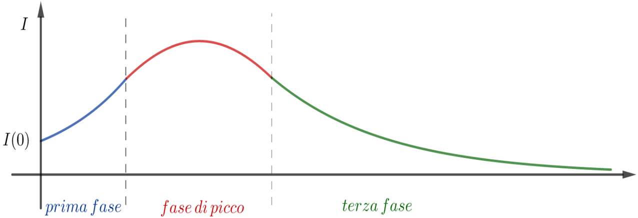
La cui soluzione (diversa da $I = 0$) è:

$$I(t) = I_0 e^{\gamma(\rho-1)t}$$

L'esponente della funzione esponenziale è negativo e $I = I(t)$ decresce fino a alla completa estinzione della pandemia.

# Modello epidemiologico "SIR"

## Grafico di $I(t)$.



# Modello epidemiologico "SIR"

### Come abbassare $\rho$?

Ci sono tre modi per cercare di diminuire $\rho$:

1. Diminuire $\lambda$. Distanziamento sociale (lockdown).
2. Aumentare $\gamma$. Migliorare cure.
3. Diminuire $S$. Equivale ad aumentare i rimossi, cioè vaccinare.

# Immunità di gregge.

Considerazioni preliminari.

1. Da $N = S + I + R$ si ottiene: $N \geq S + R$ e $S \leq N - R$
2. $$\begin{aligned} \rho &= \frac{S}{N}\frac{\lambda}{\gamma} \\ &= \frac{S}{N}\,\rho_0 \\ &\leq \frac{N-R}{N}\,\rho_0 \\ &= \left(1-\frac{R}{N}\right)\rho_0 \end{aligned}$$

.

# Immunità di gregge.

Riassumendo:

$$\rho \leq \left(1 - \frac{R}{N}\right)$$

Quindi per abbassare l'indice $\rho$, si può diminuire il numero $\left(1 - \frac{R}{N}\right)$.

Per farlo occorre che la maggio parte della popolazione contragga la malattia, in modo da poter sviluppare anticorpi. Questa è la cosiddetta immunità di gregge.