Liceo Scientifico "L. Cremona". Classe 5E. Febbraio 2016.

Verifica di Matematica. Studio di funzione. Docente: Mauro Saita [1]

1. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 2$ al grafico della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{(x-2)^2}$$

2. Trovare, se esistono, le equazioni degli asintoti della funzione

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty,) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x + 2}$$

3. Classificare i punti di non derivabilità della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$$

4. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x\, e^{-x}$ ha massimo assoluto? ha minimo assoluto? In caso affermativo trovarli.

5. Sia

$$(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x \ln x - 1}{x^2}$$

1. Determinare il numero di zeri.
2. Determinare il numero di punti critici (x_0 è un punto critico di f se $f'(x_0) = 0$).

6. Facoltativo. Trovare gli eventuali valori dei parametri reali a, b per i quali la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{5a \sin x} - b & \text{se} \quad x \leq 0 \\ -x^2 + bx & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

[1] File tex: verifica_03_studio_di_funzioni_5e_2016.tex

Soluzioni.

1. La derivata prima di f valutata in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Si ottiene: $f'(x) = 2(x-2)e^{(x-2)^2}$; $f'(2) = 0$.L'equazione della retta tangente richiesta è $y = 1$.

2. Essendo $\lim_{x\to-2} f(x) = \infty$, la retta di equazione $x = -2$ è asintoto verticale di f. Inoltre, il $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$; pertanto la funzione f potrebbe avere asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$, .
Detta $y = mx + q$ l'equazione di un aventuale asintoto, bisogna ricercare se esistono (finiti) m e q. Si ottiene

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } q = \lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = -3$$

La retta di equazione $y = 2x - 3$ è asintoto obliquo di f sia in un intorno di $+\infty$ che di $-\infty$.

3. La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{(3x-4)(x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}$$

Il dominio di f' è $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$. I punti di non derivabilità sono $x = 1$ e $x = 2$.
$\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$, quindi $x = 1$ è un punto a tangente verticale.
$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$, quindi $x = 2$ è una cuspide.

4. Innanzi tutto occorre ricercare eventuali punti di massimo locale. Siccome la funzione g è definita su tutto l'asse reale ed è derivabile, gli eventuali punti di massimo locale vanno ricercati tra i punti in cui la derivata prima si annulla. La derivata $f'(x) = 3(1-x)e^{-x}$ si annulla solo per $x = 1$; $f'(x) > 0$ quando $x < 1$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 1$. Quindi $x = 1$ è un punto in cui f assume un massimo locale, che vale $f(1) = 3e^{-1}$. Occorre ora vedere i limiti a $\pm\infty$. Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Quindi il massimo assoluto di f coincide con il valore massimo che f assume in $x = 1$, cioè $f(1) = 3e^{-1}$. La funzione non ha minimo assoluto perchè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5.

a) Gli zeri di f sono le soluzioni dell'equazione $x \ln x - 1 = 0$, ossia $\ln x = \frac{1}{x}$. È immediato verificare che i grafici di $y = \ln x$ e di $y = \frac{1}{x}$ hanno un solo punto di intersezione e, di conseguenza uno è il numero di zeri di f.

b) $f'(x) = \dfrac{x + 2 - x\ln x}{x^3}$ e $f'(x) = 0$ se e solo se

$$\ln x = 1 + \frac{2}{x} \tag{0.1}$$

Dai grafici delle funzioni $y = \ln x$ e $y = 1 + \frac{2}{x}$ si ricava che f ha un unico punto critico in $x = \alpha$ (con $\alpha > 1$).

6. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - b$, mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Quindi $f(x)$ è continua in 0 se $1 - b = 0$.

Si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{5a\sin x} 5a\cos x = 5a$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -2x + b = b$.

La funzione $f(x)$ è derivabile in 0 se valgono entrambe le condizioni $1 - b = 0$ e $5a = b$, cioè se $a = \frac{1}{5}$ e $b = 1$.