Liceo Scientifico "L. Cremona" - Milano. **Verifica di matematica. Limiti, asintoti e continuità .**		**Classe:** ______ **Docente: M. Saita**
Cognome:	**Nome:**	**Ottobre 2018**

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.[1]

Esercizio 1. Utilizzando l'algoritmo della divisione dei polinomi determinare, se esistono, gli asintoti obliqui della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Esercizio 2. La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \arctan x$$

ha asintoto per $x \to -\infty$? ha asintoto per $x \to +\infty$? In caso affermativo, determinarne le equazioni.

Esercizio 3. Determinare i limiti alla frontiera del dominio massimale in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x + 4}{\ln x - 1}$$

Esercizio 4. Determinare, se esistono, i seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 1}{\ln(1 + 2x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(e^{x-2} - 1) \cdot \ln(x - 1)}{x^2 - x - 2}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

[1] File tex: verifica02_limiti_asintoti_continuo.tex

Esercizio 5. Trovare per quali valori del parametro reale k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x \ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ \\ k\, e^{2x} + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. Stabilire se la funzione

$$g(x) = \ln(1+x) + (x^2+1)^2 + 2x - 7$$

ha almeno un punto fisso in $[1, e]$.

Risposte.

Esercizio 1.

Per $x \to \pm\infty$ l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.

Esercizio 2. La funzione f ha asintoto obliquo sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $-\infty$ e i due asintoti sono distinti. Per $x \to +\infty$, $y = x + \frac{\pi}{2}$, mentre per $x \to -\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 3. Il dominio $D(f)$ di f è $D(f) = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Esercizio 4.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-1}{\ln(1+2x)}$. Non esiste. In particolare $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-1}{\ln(1+2x)} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-1}{\ln(1+2x)} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(e^{x-2}-1)\cdot \ln(x-1)}{x^2-x-2} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 2$

Esercizio 5. Per ogni $x > 0$, f è continua perchè quoziente di funzioni continue; per ogni $x < 0$ f è continua perchè prodotto di funzioni continue. In $x = 0$: $f(0) = k + 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = k + 2$. Quindi f è continua in $x = 0$ per $k + 2 = 1$, cioè $k = -1$.
Riassumendo, f è continua su $\mathbb{R}$ per $k = -1$.

Esercizio 6. Ricercare i punti fissi di $g(x)$ equivale a ricercare gli zeri di

$$h(x) = g(x) - x$$

La funzione $h(x) = g(x) - x = \ln(1+x) + (x^2+1)^2 + x - 7$ è continua in $[1, e]$ perchè somma di funzioni continue e $h(1) = \ln 2 - 2 \sim -1,3 < 0$ e $h(e) = \ln(1+e) + (e^2+1)^2 + e - 7 \sim +67,4 > 0$. Allora, per il teorema degli zeri, esiste almeno un numero $\alpha \in (1, e)$ per il quale risulta $h(\alpha) = 0$. Tale α è un punto fisso di g.