Liceo Scientifico "L. Cremona". Classe 5E. Marzo 2018.

Verifica di Matematica. Docente: Mauro Saita [1]

Rispondere a ciascun quesito per iscritto sul foglio protocollo.

Quesiti teorici.

Quesito 1. Enunciare e dimostrare uno dei seguenti due teoremi

1. *teorema fondamentale del calcolo integrale*;
2. *teorema di Lagrange.*

Quesito 2. Siano $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni aventi per dominio il medesimo intervallo $I = (a, b)$ e entrambi derivabili in I. Dimostrare che

se $f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in I$ allora $f(x)$ e $g(x)$ differiscono al più per una costante reale.

Quesito 3. Trovare l'area delle regioni piane delimitate dai grafici delle funzioni

$$I \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$I \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = -2x^2 + \frac{7}{2}x$$

Quesito 4.(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione supplettiva, 2003, quesito 8*).

Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive, nell'ordine, di $y = x^2$ e $y = x$. Sapendo che $G(0) - F(0) = 3$, trovare quanto vale $G(1) - F(1)$.

Quesito 5. Si consideri la funzione $(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ e sia t la retta tangente al grafico di f in P. Indicato con A il punto di intersezione di t con l'asse delle ascisse, dimostrare che l'area del triangolo mistilineo PAB è costante al variare di P su f (si veda la figura).

[1] File tex: test05_teoria_e_integrali_2018.tex

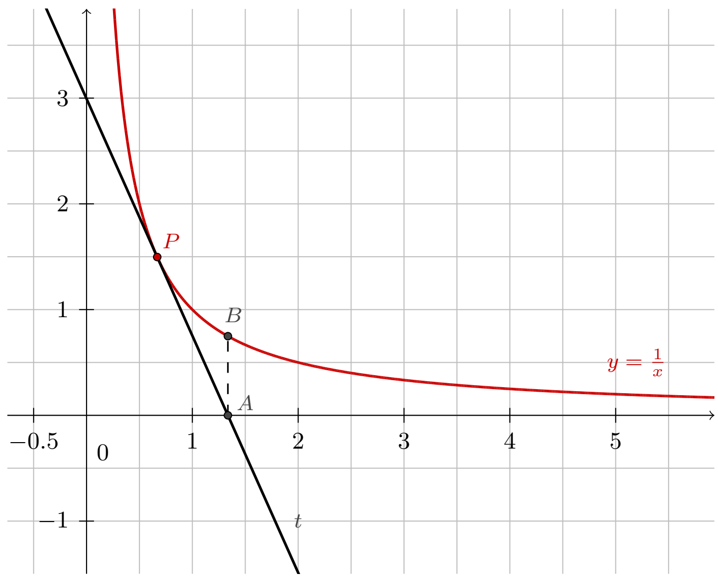

Figura 1: L'area delimitata dal triangolo di vertici P, A, B è costante al variare di P sulla curva.

Quesito 6. Calcolare i seguenti integrali definiti

1. $$\int_0^1 \frac{e^{x+1}}{3+e^x}\,dx$$

2. $$\int_5^{\sqrt{34}} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$$

Risposte

Quesito 1. Vedere la dimostrazione in http://www.maurosaita.it, Home Page, File: 'Calcolo differenziale. Parte seconda.'.

Quesito 2. Vedere la dimostrazione in http://www.maurosaita.it, Home Page, File: 'Calcolo differenziale. Parte seconda.'.

Quesito 3. Ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due parabole: $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$. Area racchusa tra tra i due grafici: $\frac{27}{2}$.

Quesito 4.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ e $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + d$, $d \in \mathbb{R}$.

$G(0) - F(0) = d - c = 3$. Segue: $G(1) - F(1) = \frac{1}{2} + d - \frac{1}{3} - c = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{19}{6}$.

Quesito 5. Il punto P del ramo di iperbole ha coordinate $(c, \frac{1}{c})$, $c > 0$.

La derivata prima f' di f è $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$; l'equazione della retta tangente al grafico di f in P è

$$y - c = -\frac{1}{c^2}(x - c)$$

$A = (2c, 0)$, $B = (2c, \frac{1}{2c})$. L'area del triangolo mistilineo è

$$\int_c^{2c} \frac{1}{x}\, dx \ - \frac{1}{2} = |\ln|x||_c^{2c} \ - \frac{1}{2} = \ln(2c) - \ln(c) \ - \frac{1}{2} = \ln 2 \ - \frac{1}{2}$$

L'area non dipende da c, ossia non dipende dalla posizione di P.

Quesito 6.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x+1}}{3+e^x}\, dx = e \int_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}\, dx = e\,|\ln(3+e^x)|_0^1 = e[\ln(3+e) - \ln 4]$

2. $\displaystyle\int_5^{\sqrt{34}} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\, dx = \frac{1}{2}\int_5^{\sqrt{34}} \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\, dx = \left|\sqrt{x^2-9}\right|_5^{\sqrt{34}} = 1$