Elenco dei teoremi dimostrati a lezione

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

In queste pagine si riporta l'elenco dei teoremi dimostrati a lezione.[1]

1 Principio di induzione.

1. Utilizzando il principio di induzione dimostrare che ogni $n \geq 1$ valgono le seguenti uguaglianze

   a) $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   b) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   c) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Fissato il numero reale $x \geq -1$ vale la seguente disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

2 Funzioni

3. **Funzioni pari e funzioni dispari.** Dimostrare che

   (a) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è pari allora $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ è pari.

   (b) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è dispari allora $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ è dispari.

   (c) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è dispari e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è dispari allora $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ è pari.

   (Qui, con fg si intende la funzione prodotto di f per g.)

3 Limiti di funzioni

4. **Teorema del confronto.** Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni definite su uno stesso dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione di D.

   Se
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{3.1}$$

[1] Nome file: 'Elenco_teoremi_dimostrati_2016.tex'

per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato[2] di x_0, e se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \tag{3.2}$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \tag{3.3}$$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7. **Teorema di permanenza del segno.** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, allora esiste un intorno $I = I(x_0;\delta)$ tale che per ogni $x \in I$ (con $x \neq x_0$ e $x \in D$), $f(x)$ ha lo stesso segno del limite L.

4 Funzioni continue

8. **Teorema degli zeri.** Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ e continua. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti. (Vale a dire, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.

9. **Teorema dei valori intermedi.** Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

5 Derivate

10. **Derivabilità implica continuità.**

    Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

11. **Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$.** La derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$, è

$$Dx^n = nx^{n-1} \tag{5.1}$$

12. **Derivata del logaritmo.** La derivata di $\ln x$ (logaritmo naturale, in base e) è

$$D \ln x = \frac{1}{x} \tag{5.2}$$

La derivata del logaritmo $\log_a(x)$ in base arbitraria è

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \tag{5.3}$$

[2] Per *intorno bucato* di x_0 si intende un intorno $I(x_0; r)$ di x_0, privato del punto x_0.

13. **Derivata dell'esponenziale.**

    La derivata dell'esponenziale e^x è : $De^x = e^x$

    La derivata di a^x è $Da^x = a^x \cdot \ln a$

14. **$\sin x \sim x$, per x che tende a zero.** Vale il seguente limite fondamentale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{5.4}$$

15. **Derivata del seno.** La derivata di $\sin x$ è : $D \sin x = \cos x$

16. **Derivata del coseno.** La derivata di $\cos x$ è : $D \cos x = -\sin x$

17. **Derivata della somma.** Siano f e g funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0. Allora la funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) \tag{5.5}$$

18. **Derivata del prodotto. Regola di Leibniz.** Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0. Allora la funzione prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0) \tag{5.6}$$

19. **Derivata della funzione composta.** Se è definita la funzione composta $g \circ f$, f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \tag{5.7}$$

20. **Derivata di $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$.** La funzione x^α, con α numero reale arbitrario, è definita per $x > 0$. La derivata di $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ è : $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$

21. **Teorema di Fermat.** Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su un insieme $D \subset \mathbb{R}$. Si supponga che:

    (1) x_0 sia un punto di massimo (o di minimo) locale per f;

    (2) x_0 sia interno a D;

    (3) f sia derivabile in x_0.

    Allora x_0 è un punto stazionario di f, cioè $f'(x_0) = 0$.

22. **Teorema di Rolle.** Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio è l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se

    (1) f è continua su $[a, b]$

    (2) f è derivabile sull'intervallo aperto (a, b)

    (3) $f(a) = f(b)$

allora esiste (almeno) un punto $\gamma \in (a, b)$ in cui la derivata di f si annulla:

$$f'(\gamma) = 0$$

23. **Teorema di Lagrange.** Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabile sull'intervallo aperto (a, b). Allora esiste un punto $\gamma \in (a, b)$ per il quale si ha
$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$$

24. **Funzioni con derivata nulla su un intervallo.** Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.

25. **Funzioni con derivate uguali su un intervallo.** Siano f e g due funzioni reali, definite su un intervallo aperto $I = (a, b)$, con uguale derivata in ogni punto di $I = (a, b)$:
$$\forall x \in I \qquad f'(x) = g'(x)$$
Allora f e g differiscono per una costante.

26. **Funzioni derivabili strettamente monotòne.** Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale derivabile su I.
    (a) Se $f'(x) > 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I.
    (b) Se $f'(x) < 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente decrescente su I.

27. **Test della derivata seconda.** Se x_0 è un punto critico per f (punto interno in cui $f'(x_0) = 0$), allora:
    (a) se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo locale.
    (b) se $f''(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo locale.

6 Integrali

28. **Teorema della media integrale.**

    Se la funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$ ed è limitata tra due costanti m ed M, nel senso che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni x in $[a, b]$, allora l'integrale definito di f soddisfa le disuguaglianze
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \tag{6.1}$$
    Se inoltre f è continua in $[a, b]$, esiste un punto ξ in $[a, b]$ tale che
$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi) \tag{6.2}$$

29. **Teorema fondamentale del calcolo integrale.**

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$. Allora la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{6.3}$$

è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni x in $[a, b]$.

Se poi $G(x)$ è una qualunque funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$, allora

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) \tag{6.4}$$