LEZIONE 11

Teoremi sulle funzioni derivabili

Indice degli argomenti

- Teorema di Fermat.
- Teorema di Rolle.
- Teorema dei valori intermedi (o degli incrementi finiti) di Lagrange.
- Funzioni derivabili monotòne su un intervallo.
- Teorema di Cauchy.
- Regola di de L'Hospital.

Punti di massimo o minimo locale per una funzione

Definizione

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un sottoinsieme* $D \subset \mathbb{R}$.

1. *Un punto* $x_0 \in D$ *è punto di massimo locale per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un massimo locale per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \geq f(x) \tag{1}$$

2. *Un punto* x_0 *in* D *è un punto di minimo locale per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un minimo locale per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \leq f(x) \tag{2}$$

Teorema d Fermat

Definizione

Un punto x_0, appartenente a un insieme $D \subset \mathbb{R}$, si dice interno a D se esiste un intorno $I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, di raggio $r > 0$, incluso in D:

$$I(x_0; r) \subset D$$

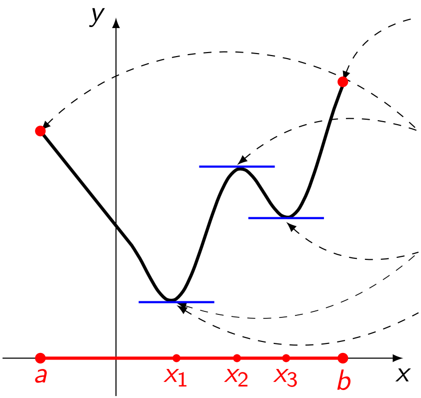
Teorema (Fermat)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su un insieme $D \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. *x_0 sia un punto di massimo (o di minimo) locale per f;*
2. *x_0 sia interno a D;*
3. *f sia derivabile in x_0.*

Allora x_0 è un punto stazionario di f (o critico), cioè $f'(x_0) = 0$.

Punti di massimo o minimo locale interni o di frontiera



il massimo assoluto (globale)

massimo locale

minimi locali

il minimo assoluto (globale)

Punti di massimo o minimo locale interni o di frontiera

$D = [a, b]$; a, b punti di frontiera.

I punti x_1, x_2, x_3 sono punti di minimo o massimo locale, interni, in cui la funzione è derivabile

$$\Downarrow \text{(Fermat)}$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0.$$

I punti a, b sono punti di massimo locale (o globale) sulla frontiera (non interni). Non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Fermat.

Dimostrazione del teorema di Fermat

Sia x_0 un punto di massimo locale per f. Esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti: $I \subset D$ (perchè x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{3}$$

(perchè x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{4}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{5}$$

se $x < x_0$. Passando al limite per x che tende a x_0, si ricava rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$. Q.E.D.

Teorema di Rolle

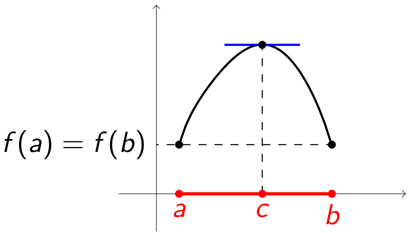
Teorema (Rolle, 1690)

IPOTESI

1. $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su* $[a,b]$, *derivabile su* (a,b).
2. $f(a) = f(b)$

TESI

$\exists c \in (a,b)$ *per il quale:* $\quad f'(c) = 0$



Dimostrazione (teorema di Rolle)

Per il teorema di Weierstrass la funzione f, continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, assume il suo valore massimo M e il suo valore minimo m. Questo significa che esistono (almeno) un punto $x_M \in [a, b]$ e (almeno) un punto $x_m \in [a, b]$ tali che $f(x_M) = M$ e $f(x_m) = m$. Sono possibili due casi.

(1) Sia x_M sia x_m cadono negli estremi di $[a, b]$. In tale caso, per l'ipotesi $f(a) = f(b)$, si ha $M = m$. Allora f è costante, e quindi $f'(x) = 0$ addirittura in ogni punto x di (a, b).

(2) Almeno uno dei due punti x_m, x_M è interno ad $[a, b]$. Allora, per il teorema di Fermat, in un tale punto la derivata si annulla.

Dunque, in ogni caso esiste (almeno) un punto c nell'intervallo aperto (a, b) in cui la derivata si annulla. Q.E.D.

Teorema del Valore Medio (o degli incrementi finiti)

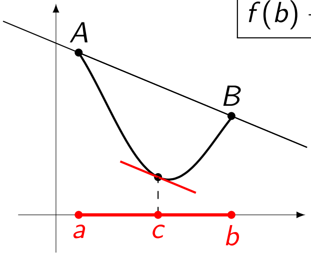
Teorema (del Valore Medio (di Lagrange))

IPOTESI

$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su* $[a, b]$, *derivabile su* (a, b).

TESI

$\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$



$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a)}$$

Dimostrazione del teorema del valore medio (Lagrange)

La funzione, definita sull'intervallo $[a, b]$,

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]}_{\text{retta } AB}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque, esiste un punto c in (a, b) in cui $g'(c) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. Q.E.D.

Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema (Derivata nulla su un intervallo)

IPOTESI

1. *I intervallo.*
2. $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *derivabile.*
3. $\forall x \in I \;\; f'(x) = 0$

TESI

f costante. (Cioè: $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in I) \;\; f(x) = k$.)

Dimostrazione

Prendiamo due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in I$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$
Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. Q.E.D.

Esercizio

La funzione $\mathbb{R} \setminus 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

è costante?

RISPOSTA. $f'(x) = 0$ per ogni x nel dominio di f, ma f non è costante. Perché? La ragione va cercata nella topologia del dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, che non è un intervallo (non è un insieme *connesso* di $\mathbb{R}$). La nostra funzione f è costante su ogni componente connessa del dominio; cioè, f è costante su $(-\infty, 0)$ ed è costante su $(0, +\infty)$, intervalli sui quali assume rispettivamente i valori $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. L'annullarsi della derivata implica che f sia (non costante, ma) localmente costante. Questo significa che per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ esiste un intorno U sul quale f è costante.

Funzioni con derivate uguali su un intervallo

Teorema (Derivate uguali su un intervallo)

IPOTESI

1. *I intervallo.*
2. $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *e* $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *derivabili.*
3. $\forall x \in I \;\; f'(x) = g'(x)$

TESI

f e g differiscono per una costante, cioè:

$$(\exists k \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\;\; f(x) = g(x) + k$$

Funzioni con derivate uguali su un intervallo

Dimostrazione

La funzione $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ è derivabile e la sua derivata è nulla:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Allora la funzione $\varphi(x)$ è costante:

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = k \qquad \text{dove } k \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$f(x) = g(x) + k$$

Q.E.D.

Funzioni monotòne e strettamente monotòne

Definizione (Funzioni monotòne e strettamente monotòne)

Siano D un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$ (non si richiede che sia un intervallo) e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. La funzione f si dice:

1. *monotòna crescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
2. *monotòna decrescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
3. *strettamente crescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
4. *strettamente decrescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
5. *monotòna se è monotòna crescente o monotòna decrescente.*
6. *strettamente monotòna se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Funzioni derivabili strettamente monotòne

Teorema (Funzioni derivabili strettamente monotòne)

Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale derivabile su I.

1. *Se $f'(x) > 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I.*
2. *Se $f'(x) < 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente decrescente su I.*

Funzioni derivabili strettamente monotòne

Dimostrazione. (Affermazione (1))

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} < 0$$

Dunque f è strettamente crescente su I. (La (2) è analoga).
Q.E.D.

Attenzione: nel teorema appena dimostrato, l'ipotesi che I sia un intervallo non si può eliminare:

Esercizio

Poniamo $\mathbb{R} \setminus 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Dimostrare che f è derivabile, $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f, ma f non è strettamente crescente (e nemmeno monotòna crescente).

Esercizio

Sia f una funzione strettamente crescente e derivabile su un intervallo I. Possiamo concludere che si abbia $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$?

RISPOSTA No. Controesempio: la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^3$, è strettamente crescente e derivabile sull'intervallo $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Funzioni derivabili monotòne su un intervallo

Teorema

Sia I un intervallo e sia f una funzione reale derivabile su I. Allora:

1. *f monotòna crescente su I* $\iff$ $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$
2. *f monotòna decrescente su I* $\iff$ $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in I$

Dimostriamo l'affermazione (1) (La dimostrazione dell'affermazione (2) è analoga).

Dimostrazione dell'affermazione (1): $\Longrightarrow$

Fissiamo $x_0 \in I$. Poiché, per ipotesi, f è monotòna crescente, il rapporto incrementale è sempre maggiore o uguale a zero.
Quindi (permanenza del segno), per $x \to x_0$ il limite del rapporto incrementale (la derivata) resta maggiore o uguale a zero:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dimostrazione dell'affermazione (1): $\Longleftarrow$

Siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c, $x_1 < c < x_2$, tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \leq 0$$

(Per ipotesi, $f'(c) \geq 0$.) Dunque f è monotòna crescente in I.

Q.E.D.

Teorema di Cauchy

Teorema (di Cauchy)

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabili sull'intervallo aperto (a, b). Supponiamo $g'(x) \neq 0$ per ogni x in (a, b). Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ per il quale

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regole di de L'Hospital

Teorema (Joh. Bernoulli 1691, de L'Hospital 1696. Caso $\frac{0}{0}$.)

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite* $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Allora esiste anche il limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Dimostrazione di de L'Hospital

Caso L finito.

Applichiamo il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni f,g sull'intervallo $[x_0, x]$. Poiché $f(x_0) = g(x_0) = 0$, il teorema di Cauchy dice che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

per un opportuno c soddisfacente $x_0 < c < x$. Per $x \to x_0^+$, anche il punto c, soddisfacente $x_0 < c < x$, tende a x_0. Quindi, per $x \to x_0^+$, poiché

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ anche $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \to L$. Q.E.D

Teorema (de L'Hospital, caso $\frac{\infty}{\infty}$. (Senza dimostrazione))

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

1. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e:*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Altri casi di de L'Hospital

Infine, le regole di de L'Hospital valgono anche per le forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ quando x tende a $+\infty$ o $-\infty$.
L'enunciato è sempre dello stesso tipo: se esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(finito o infinito) allora esiste anche il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Limiti importanti che si calcolano con l'Hospital.

Esercizio (Confronti tra potenze, esponenziali e logaritmi)

1. $$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0, \qquad \forall a > 0$$

2. *($e^x \to +\infty$ più velocemente di qualsiasi potenza x^n)*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. *($x^a \to +\infty$ più velocemente del logaritmo.)*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$$

4. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$$