LEZIONE 10

Introduzione alle funzioni derivabili

Indice degli argomenti

- Derivata.
- Interpretazione geometrica di derivata.
- Approssimazioni lineari di funzioni.
- Derivabilità implica continuità.
- Derivata della somma, del prodotto e del quoziente.
- Derivata della funzione composta.
- Derivata della funzione inversa.

Funzione derivabile. La derivata.

Dati:

$I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funzione; $\quad I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto ; $\quad x_0 \in I$.

Definizioni

1. *Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, si chiama incremento della variabile indipendente tra x_0 e x la quantità:* $\Delta x = x - x_0$.
2. *Si chiama incremento della funzione f relativo a Δx la quantità:* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.
3. *Si chiama rapporto incrementale di f relativo ad x_0 la quantità:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Funzione derivabile. La derivata.

Rapporto incrementale = tasso medio.

La quantità $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ rappresenta la variazione assoluta di f relativa all'incremento $\Delta x = x - x_0$, mentre il rapporto incrementale $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ indica il tasso medio di variazione di f rispetto all'incremento Δx.

Esempio

Se per $\Delta x = 0.2$ si ha un incremento di f pari a $\Delta y = 0.05$, il tasso medio di variazione di f (rispetto all'incremento Δx) è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Funzione derivabile. La derivata.

Definizione (Derivata come limite del rapporto incrementale)

Se esiste finito (cioè, non $+\infty$ o $-\infty$) il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

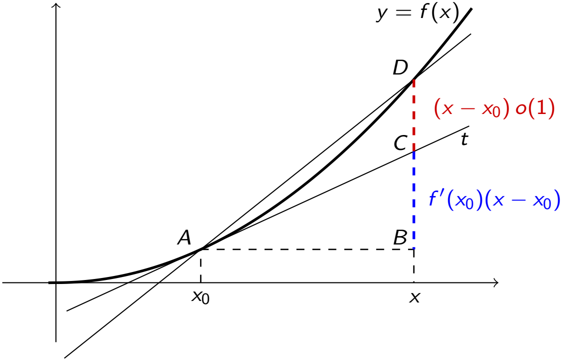
f si dice derivabile in x_0 e tale limite si chama la derivata di f nel punto x_0.

Alcune notazioni per la derivata

$f'(x_0)$ $\qquad \dfrac{df}{dx}(x_0)$ (Leibniz) $\qquad Df(x_0)$ $\qquad \dot{f}(x_0)$ (Newton)

Interpretazione geometrica di derivata.

Nella figura qui sotto è riportato il grafico di una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, derivabile nel punto x_0.



Interpretazione geometrica di derivata.

Se la funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è derivabile nel punto x_0, valgono i seguenti fatti:

1. il grafico di f possiede retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ (tale retta è unica e non può essere verticale).
2. La derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente in A al grafico di f.

Interpretazione geometrica di derivata.

3 (Proprietà di differenziabilità)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= f'(x_0)+o(1)\\ f(x)-f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0)\\ f(x) &= f(x_0)+{\color{blue}f'(x_0)(x-x_0)}+{\color{red}o(x-x_0)}\end{aligned}$$

Teoremi sulle derivate (1)

Teorema (Derivabilità implica continuità)

Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.

Dimostrazione

Per ipotesi f è derivabile in x_0, segue (per $x \to x_0$)

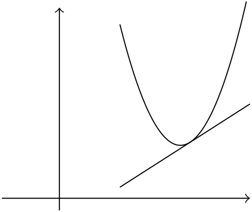
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

ossia,

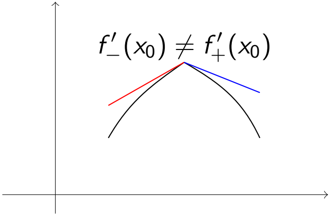
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Q.E.D.

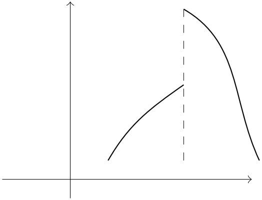
Funzioni derivabili e non derivabili



Derivabile:
esistono le rette tangenti

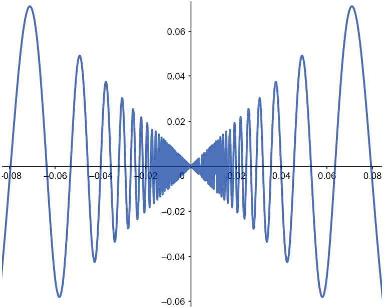


Continua non derivabile



Non continua (Salto)

Funzioni derivabili e non derivabili



$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \ \ f(0) = 0$$

(Il grafico di f vicino all'origine oscilla tra le rette $y = x$ e $y = -x$).

Continua non derivabile

Alcune derivate importanti (Da dimostrare)

1. $Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $De^{x} = e^{x}$
3. $D \ln x = \dfrac{1}{x}$
4. $D \sin x = \cos x$
5. $D \cos x = -\sin x$
6. $D \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $D \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Regole di derivazione

Teorema (della somma.)

Se f, g sono derivabili in x, allora: $f+g$ è derivabile in x, e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Teorema (del prodotto.)

Se f, g sono derivabili in x, allora: $f \cdot g$ è derivabile in x, e vale la Regola di Leibniz:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Regole di derivazione

Teorema (del quoziente.)

Se f, g sono derivabili in x e $g(x) \neq 0$, allora: il rapporto f/g è derivabile in x e si ha:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}$$

Derivata della funzione composta.

Teorema (Derivata della funzione composta. "Chain Rule")

Se è definita la funzione composta $g \circ f$, f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Derivata della funzione composta. Casi più frequenti

Funzioni	Derivate
$f(x) = [g(x)]^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha\,[g(x)]^{\alpha-1}\,g'(x)$
$f(x) = \log_a \lvert g(x) \rvert$	$f'(x) = (\log_a e)\,\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \ln \lvert g(x) \rvert$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = \left(\dfrac{1}{\log_a e}\right)\,g'(x)a^{g(x)}$

Derivata della funzione composta. Casi più frequenti

Funzioni	Derivate
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$
$f(x) = \sin g(x)$	$f'(x) = g'(x) \cos g(x)$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x) \sin g(x)$

Derivata della funzione inversa

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Sia f una funzione reale definita su un intervallo I e invertibile. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esercizi sulla derivabilità

Vero o Falso?

(a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \sin x$ è derivabile in $x_0 = 0$.

(b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos |x|$ è derivabile in $x_0 = 0$.

(c) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La retta tangente in $(0, 0)$ al grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^4(x - 1)$, è l'asse delle x.

Retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto

Esercizio

Si consideri la funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{5}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{5x-4}$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x = 2$.

Esercizio

Determinare eventuali punti di non derivabilità delle funzioni

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = |1 - x^2|$
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{se } x \geq 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = e^{|x|}$
5. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = e^{-|x|}$

Esercizio

Sia

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^5 + x$$

(a) Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$.

(b) Verificare che la funzione inversa $\mathbb{R} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}$ è derivabile su $\mathbb{R}$.

(c) Calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$.

Esercizio

Utilizzando il teorema di derivabilità della funzione inversa, determinare la derivata di

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right),\ f(x) = \arctan x$$