LEZIONE 8

Limiti fondamentali

Limiti fondamentali

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   Per $x \to 0$: $\sin x \sim x$, $\quad \sin x = x + o(x)$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

   Per $x \to 0$: $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\quad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Il numero di Nepero: $e = 2{,}718281828459\ldots$

3 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Dimostrazione.
Basta utilizzare il limite precedente e eseguire la sostituzione $x = 1/t$.

5 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. $\displaystyle\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha \longrightarrow e^\alpha$, per $x \to +\infty$.

Limiti fondamentali

6. $\lim_{x\to 0^+} x^a \log_b x = 0 \qquad \forall a > 0,\ \forall b > 0 \text{ e } b \neq 1$

   Dimostrazione.
   Sarà dimostrato in seguito con il teorema di de l'Hôpital.

7. $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

   Dimostrazione.
   Il prodotto di una funzione infinitesima per una funzione limitata, è una funzione infinitesima (corollario del teorema del confronto).

Limiti importanti

8

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}_{>0},\ a \neq 1).$

  Per $x \to 0$: $\log_a(1+x) \sim (\log_a e)x$,

  $\log_a(1+x) = (\log_a e)x + o(x)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

  Per $x \to 0, \quad \ln(1+x) \sim x$

  $\ln(1+x) = x + o(x)$

Limiti importanti

Dimostrazione

- (Per esercizio).
- Posto $x = \dfrac{1}{t}$, per $x \to 0$, t tende a $\pm\infty$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to \pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

Per $t \to \pm\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t \to e$. Per la continuità della funzione logaritmo, segue:

$$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to 1$$

Q.E.D.

Limiti importanti

9

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}_{>0}).$

  Per $x \to 0$: $a^x \sim 1 + (\ln a)x$,

  $a^x = 1 + (\ln a)x + o(x)$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

  Per $x \to 0, \quad e^x \sim 1 + x$

  $e^x = 1 + x + o(x)$

Limiti importanti

Dimostrazione

- (Per esercizio).
- Posto $t = e^x - 1$ $(x = \ln(1+t))$. Per $x \to 0$, t tende a 0. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad = \quad \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \quad = \quad \lim_{t\to 0} \frac{t}{t + o(t)} \quad = \quad 1$$

Q.E.D.

Limiti importanti

10 $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Per $x \to 0$: $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$,

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

Limiti importanti

Dimostrazione

$\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \dfrac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x}$. Per $x \to 0$, $\alpha \ln(1+x) \to 0$, quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \alpha \ln(1+x) + o(x) - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} + \frac{o(x)}{x} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Esercizi

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 3\sin 2x}{5x^2 + 3\sin 4x}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{3x^2 + 2x}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{2x^2 + \sqrt{x}}$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

Esercizi

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-3x}-1}{2^x-1}$$

6. $$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^x-e^x}{2x}$$

7. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3+x^2}+2x^4}{3\sqrt{x}-x^5}$$

8. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(e^x-e^{-x})}{5^x-5^{-x}}$$

Esercizi

9 Sia $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x + \sin x}$$

(a) Trovare eventuali asintoti di f.
(b) È possibile estendere la funzione f per continuità in $x = 0$?

10 Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \\ \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$?

11 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1} - 1)} & \text{se } x > 0 \\ \alpha e^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$?