LEZIONE 5

Il simbolo *o*-piccolo e di equivalenza asintotica

Simbolo *o*-piccolo

Notazioni: f e g funzioni definite in un intorno bucato U di x_0 e diverse da zero in ogni $x \in U$.

Definizione

Si dice che $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)), \ \textit{per } x \to x_0 \tag{1}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{2}$$

(In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.)

Esempi di uso di o-piccolo

Esempi

1. $1 - \cos x = o(x)$, *per* $x \to 0$.
   $1 - \cos x$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* x, *per* $x \to 0$.
2. $1 - \cos x = o(\sin x)$, *per* $x \to 0$.
   $1 - \cos x$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $\sin x$, *per* $x \to 0$.
3. $x^4 = o(e^x)$, *per* $x \to +\infty$.
   x^4 *è un infinito di ordine inferiore rispetto a* e^x, *per* $x \to +\infty$.
4. *Affermare che* $f(x)$ *è* $o(1)$ *per per* $x \to x_0$ *equivale a dire che* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{1} = 0$, *cioè che* $f(x)$ *è infinitesima per* $x \to x_0$.

Relazione di equivalenza asintotica

Notazioni: Consideriamo funzioni $f(x), g(x)$ che, in un opportuno intorno bucato di x_0, non si annullino mai (in modo da poter dividere per $f(x)$ o per $g(x)$ senza problemi).

Definizione

Si dice che la funzione $f(x)$ è asintoticamente equivalente alla funzione $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \tag{3}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{4}$$

Esempi di relazioni asintotiche

Esempi

1. $\sin x \sim x$, *per* $x \to 0$.
2. $\arctan x \sim \pi/2$, *per* $x \to +\infty$.
3. $(x + x^3 + x^4) \sim x^4$, *per* $x \to +\infty$.
4. $(x + x^3 + x^4) \sim x$, *per* $x \to 0$.

Diversi modi di scrivere l'equivalenza asintotica

Esercizio

I seguenti fatti sono equivalenti:

1. $$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0$$

2. $$f(x) = g(x) + g(x) \cdot o(1), \qquad x \to x_0$$

3. $$f(x) = g(x) + o(g(x)), \qquad x \to x_0$$

Due limiti importanti

Teorema

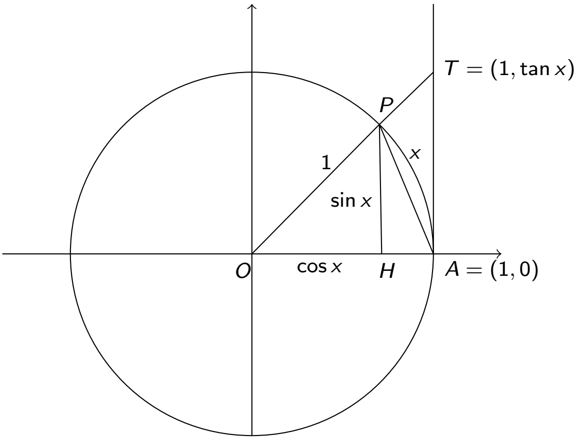
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Più precisamente

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2\,, \quad \textit{per } x \to 0$$

Interpretazione geometrica



$x =$ misura in radianti dell'angolo AOP $=$ lunghezza dell'arco AP

$\widehat{HPA} = \dfrac{x}{2}$ perché l'angolo alla circonferenza $\widehat{HPA}$ è la metà dell'angolo al centro $\widehat{AOP}$.

$$1 - \cos x = \overline{HA} = \left(\sin \frac{x}{2}\right) \overline{AP}$$

Siccome $\overline{AP} \sim x$ e $\sin \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$, per $x \to 0$ si ottiene:

$$1 - \cos x = \overline{HA} = \left(\sin \frac{x}{2}\right) x \sim \frac{1}{2} x^2$$

Esempi di limiti

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$ Più in generale:
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^\beta}{e^x} = 0$ per ogni $\beta > 0$.