LEZIONE 3

Introduzione ai limiti

Indice degli argomenti

Punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$

Definizione

Un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ *si dice* *punto di accumulazione* *di un sottoinsieme* $D \subset \mathbb{R}$ *se in* *ogni* *intorno* $I(x_0)$ *di* x_0 *esiste almeno un elemento* x *diverso da* x_0*, appartenente a* D.
Ossia

$$\forall I(x_0) \quad \exists x \in D \mid [x \neq x_0 \ \wedge \ x \in I(x_0)]$$

Osservazioni

- x_0 non è necessariamente un punto di D.
- Ogni intorno (per quanto piccolo) di x_0 contiene infiniti numeri di D.

Punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$

Esempi

- $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = [0, 1]$.
- $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = (0, 1)$.
- $x_0 = 2$ non è punto di accumulazione di $D = (0, 1)$.

Limite finito

Definizione (in termini di intorni)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$, x_0 *un punto di accumulazione di* D.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R}$$

significa:

per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ *di* L *esiste un intorno* $I(x_0, \delta)$ *di* x_0 *che soddisfa questa condizione:*

$$\forall x \in D \;\; (x \neq x_0 \land x \in I(x_0, \delta)) \implies \quad f(x) \in I(L, \varepsilon)$$

Limite finito

Definizione ($\varepsilon - \delta$ definizione)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di D.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R}$$

significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

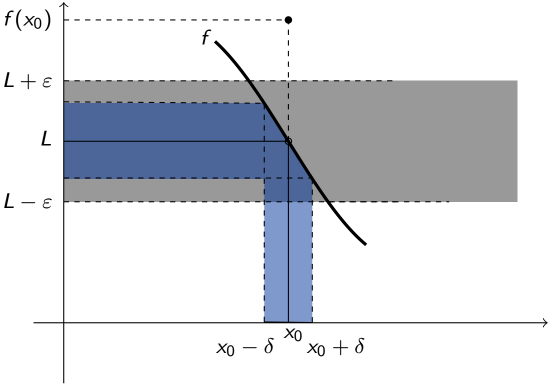


Figure: Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$: *per ogni* intorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ di L è possibile trovare un intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ di x_0 in modo tale che per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, con $x \neq x_0$ succede che $f(x)$ sta in $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Limite finito

In termini euristici $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (x_0 e L possono essere $\pm\infty$) dice quanto segue:

quando la variabile indipendente x approssima x_0,
la funzione $f(x)$ approssima il valore L.

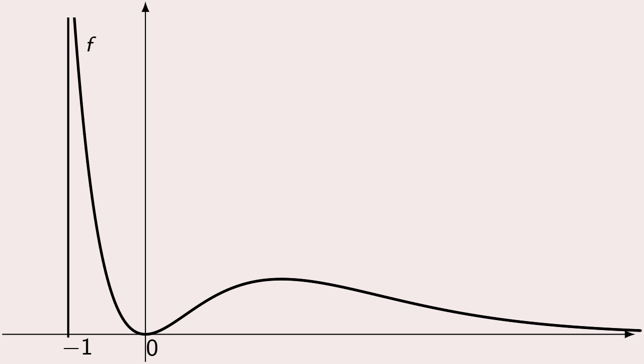
Esercizio. Interpretazione geometrica del limite

Per ognuno dei seguenti limiti tracciare un possibile grafico locale della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2^+$
2. $\lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \to +1^+} f(x) = -3^-$
4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Esercizio

Dal grafico della funzione f riportato in figura, dedurre i limiti alla frontiera del dominio.



Soluzione

Il dominio di f è l'intervallo reale $(-1, +\infty)$ e i punti alla frontiera del dominio sono -1 e $+\infty$.
Dal grafico si deduce che:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

Unicità del limite

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di D. Il limite, per $x \to x_0$, potrebbe non esistere ma, se esiste, è unico.

Teorema (di unicità del limite.)

Se esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *esso è unico.*

La dimostrazione si trova, per esempio, in `www.maurosaita.it` (Home page, Sezione: "Calcolo differenziale e integrale di funzioni", file: "Funzioni reali di variabile reale. Limiti e continuità").

Esempi di funzioni che non ammettono limite

1. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$.

2. La funzione di Dirichlet $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   non ha limite per $x \to x_0$, qualunque sia x_0.

Teorema del confronto (dei due caribinieri)

Teorema

Siano $f(x), g(x), h(x)$ *tre funzioni definite su uno stesso dominio* D*, e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D*. Se*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{1}$$

per ogni x *(appartenenete a* D*) in un intorno bucato di* x_0*, e se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \tag{2}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \tag{3}$$

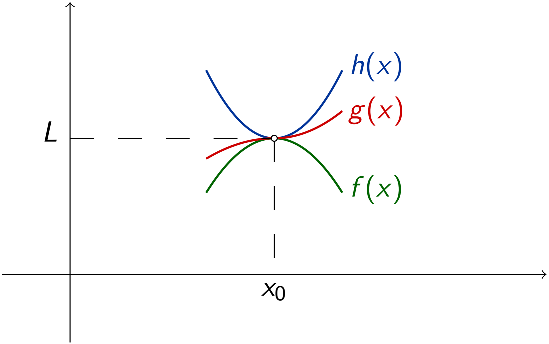


Figure: Il teorema del confronto è chiamato anche "teorema dei due carabinieri".

Dimostrazione

Si fissi un intorno $I(L;\varepsilon)$ di L, di raggio arbitrario $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, vale quindi la seguente condizione:

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_1) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I(L;\varepsilon)$$

Ancora per ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_2) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad h(x) \in I(L;\varepsilon)$$

Dimostrazione

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Per ogni x nell'intorno $I(x_0, \delta) = I(x_0, \delta_1) \cap I(x_0, \delta_2)$ valgono entrambe le condizioni, cioè i valori $f(x)$ e $h(x)$ appartengono entrambi a $I(L; \varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Poichè vale sempre $f \leq g \leq h$, anche per ogni $x \in I(x_0, \delta)$ risulta

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

e quindi anche $g(x)$ cade nell'intorno $I(L; \varepsilon)$. Ciò dimostra (si ricordi la definizione di limite) che $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. $\square$

Una conseguenza del teorema del confronto

Dal teorema del confronto segue il seguente fatto:

Per x che tende a x_0,

$$\text{se } f(x) \longrightarrow 0 \text{ e } g(x) \text{ si mantiene limitata}$$

allora

$$f(x)g(x) \longrightarrow 0$$

A parole:

il prodotto di una funzione infinitesima (per x che tende a x_0) per una funzione che si mantiene limitata in un intorno di x_0 è una funzione infinitesima.

Esempio.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Infatti $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$. Quindi

$$0 \leq \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

Applicando il teorema del confronto, si ottiene la tesi.

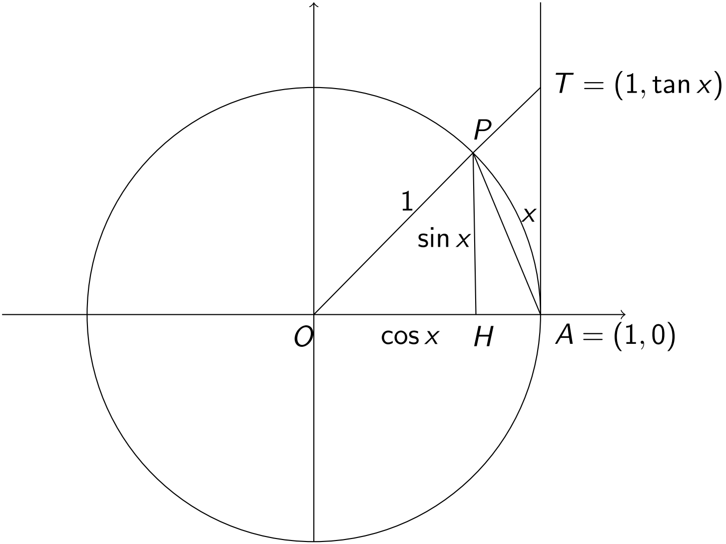
Un limite fondamentale

Quando si misurano gli angoli in radianti,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Interpretazione geometrica:

Quando l'angolo al centro di una circonferenza tende a zero, la lunghezza della corda tende alla lunghezza dell'arco sotteso.



$x =$ misura in radianti di $\angle AOP$
$=$ lunghezza dell'arco AP

Dimostrazione.

Poiché la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è pari, basta considerare il caso $x > 0$.

Valgono le disuguaglianze ($A =:$ area):

A(triangolo OAP) $<$ A(settore circolare OAP) $<$ A(triangolo OAT)

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

Moltiplicando per il numero (positivo) $2/\sin x$, si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Quindi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per $x \to 0$, per il Teorema del Confronto si ha la tesi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$