Combinatoria, probabilità e matematica discreta
Quesiti proposti all'esame di stato

(A cura di) Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Giugno 2019[1]

1 Esercizi

Esercizio 1.1 (Sessione ordinaria, 2001). *Dimostrare che si ha*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

Esercizio 1.2 (Sessione ordinaria, 2002). *Se a, b sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? Perchè? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?*

Esercizio 1.3 (Sessione ordinaria, 2002). *Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.*

Esercizio 1.4 (PNI, 2002). *Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610-1675), amico di Blaise Pascal: "Giocando a dadi, è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"*

Esercizio 1.5 (Sessione ordinaria, 2003). *Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a* 18 *squadre?*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.6 (PNI, 2003). *Tre scatole A, B, C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene* 2000 *lampade con il* 5% *di esse difettose, B ne contiene* 500 *con il* 20% *difettose e C ne contiene* 1000 *con il* 10% *difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?*

$\boxed{R}$

[1] File tex: esercizi_maturita_combinatoria.tex

Esercizio 1.7 (Sessione ordinaria, 2004). *Considerate gli insiemi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$. *Quante sono le applicazioni (funzioni) da* A *in* B*?*

R

Esercizio 1.8 (Sessione ordinaria, 2005). *Come si definisce* $n!$ *e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?*

Esercizio 1.9 (PNI, 2005). *Qual è la probabilità di ottenere* 10 *lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due* 10 *in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due* 10 *in sei lanci?*

Esercizio 1.10 (PNI, 2005). *Il* 40% *della popolazione di un Paese ha* 60 *anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a* 30 *anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.*

R

Esercizio 1.11 (PNI, 2006). *Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla* 64*-esima casella. Assumendo che* 1000 *chicchi pesino circa* 38 g*, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.*

Esercizio 1.12 (PNI, 2006). *Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di* $(a + b)^n$ *è uguale a* 2^n *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.13 (Sessione ordinaria, 2007). *Si risolva l'equazione*

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$$

Esercizio 1.14 (PNI, 2007). *Si scelga a caso un punto in un triangolo equilatero di lato* 3. *Si determini la probabilità che la distanza di* P *da ogni vertice sia maggiore di* 1.

R

Esercizio 1.15 (PNI, 2007). *A Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: "Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare."*

Esercizio 1.16 (Sessione ordinaria, 2008). *Se* $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, *con* $n > 3$, *sono in progressione aritmetica, qual è il valore di* n?

Esercizio 1.17 (PNI, 2008). *Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.*

Esercizio 1.18 (PNI, 2008). *In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?*

Esercizio 1.19 (Sessione ordinaria, 2009). *Sono dati gli insiemi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$. *Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di* A *in* B, *ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?*

R

Esercizio 1.20 (PNI, 2009). *Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).*

Esercizio 1.21 (PNI, 2009). *Si dimostri l'identità :*

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

con n, k *naturali e* $n > k$.

R

Esercizio 1.22 (Sessione ordinaria, 2010). *Se* $n > 3$ *e* $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ *sono in progressione aritmetica, qual è il valore di* n?

R

Esercizio 1.23 (PNI, 2010). *Il numero delle combinazioni di* n *oggetti a* 4 *a* 4 *è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi* n.

Esercizio 1.24 (PNI, 2010). *Per la ricorrenza della festa della mamma, la signora Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La signora Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la signora Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della signora Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.*

R

Esercizio 1.25 (Sessione ordinaria, 2011)**.** *Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?*

Esercizio 1.26 (Sessione ordinaria, 2012)**.** *Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, ..., P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?*

Esercizio 1.27 (PNI, 2012)**.** *Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?*

Esercizio 1.28 (PNI, 2012)**.** *Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?*

R

Esercizio 1.29 (PNI, 2013)**.** *In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?*

R

Esercizio 1.30 (Sessione ordinaria, 2015)**.** *Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più " due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno " due volte?*

R

Esercizio 1.31 (Sessione ordinaria, 2016)**.** *Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?*

Esercizio 1.32 (Sessione ordinaria, 2018). *Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo* $[0, 2]$ *viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:*

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

(a) Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

(b) Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$*?*

(c) Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1*?*

R

Esercizio 1.33 (Sessione ordinaria, 2018). *Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da* 1 *a* 4*. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca* 1 *è il doppio della probabilità che esca* 2*, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca* 3*, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca* 4*. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?*

R

Esercizio 1.34 (Simulazione MIUR, 20 dicembre 2018). *Se si lancia una moneta* 2 *volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al* 50%*. Se la moneta viene lanciata* 4 *volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al* 50%*? Motivare la risposta.*

R

Esercizio 1.35 (Simulazione MIUR, 28 febbraio 2019). *Una scatola contiene* 16 *palline numerate da* 1 *a* 16*.*

(a) Se ne estraggono 3*, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia* 10 *e gli altri due minori di* 10*?*

(b) Se ne estraggono 5 *contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a* 13*?*

R

Esercizio 1.36 (Simulazione MIUR, 2 aprile 2019). *Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da* 1 *a* 6*; se esce il numero* 3 *guadagna* 3 *punti, altrimenti perde* 1 *punto. Il punteggio iniziale è* 0*.*

(a) Qual è la probabilità che, dopo 4 *lanci, il suo punteggio sia ancora* 0*?*

(b) Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 *lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo* 0*?*

R

2 Soluzioni

Esercizio 1.5

Le partite (andata e ritorno) in un campionato a 18 squadre sono tante quante le funzioni iniettive da un insieme di 2 elementi a un insieme di 18 elementi, cioè

$$18^{\underline{2}} = 18 \cdot 17 = 306$$

Esercizio 1.6

Primo metodo (cenni).

A (B, C) indica l'evento "è stata scelta la scatola A (B, C)' mentre D è l'evento "è stata scelta una lampadina difettosa". Dai dati del problema si ha

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{100}$$
$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{20}{100}$$
$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{10}{100}$$

La probabilità $P(A)$ che venga scelta la scatola A è $\frac{1}{3}$, lo stesso per le altre

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

La probabilità che dopo aver scelto una scatola a caso venga estratta una lampada difettosa è

$$\begin{aligned} P &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(D|A)\,P(A) + P(D|B)\,P(B) + P(D|C)\,P(C) \\ &= \tfrac{5}{100}\,\tfrac{1}{3} + \tfrac{20}{100}\,\tfrac{1}{3} + \tfrac{10}{100}\,\tfrac{1}{3} \\ &\approx 12\% \end{aligned}$$

Secondo metodo.

Il problema si può schematizzare con un diagramma ad albero (disegno e soluzione sono lasciati per esercizio).

Esercizio 1.7

Le funzioni da un insieme (dominio) di 4 elementi a un insieme (codominio) di 3 elementi sono 3^4.

Esercizio 1.10 Si indichi con x l'età media della popolazione con meno di 60 anni ($0 \leq x < 60$) e con y l'età media della popolazione con 60 anni e più . L'età media m della popolazione di quel Paese è la media pesata di x e y ossia

$$m = \frac{px + qy}{p + q} \tag{2.1}$$

In (2.1), posto m=30, $p = \frac{60}{100}$ e $q = \frac{40}{100}$ si ottiene

$$30 = \frac{6}{10}x + \frac{4}{10}y$$

$$x = \frac{150 - 2y}{3}$$

Dalla limitazione su x ($0 \leq x < 60$) si ricava: $0 \leq \frac{150-2y}{3} < 60$ ossia $-15 < y \leq 75$.

Quindi l'età media della popolazione può essere di 30 anni purchè l'età media y delle persone con 60 o più anni sia minore o uguale a 75 e l'età media x delle persone con meno di 60 anni sia $\frac{150-2y}{3}$.

Esercizio 1.14

La probabilità richiesta è il rapporto di due aree

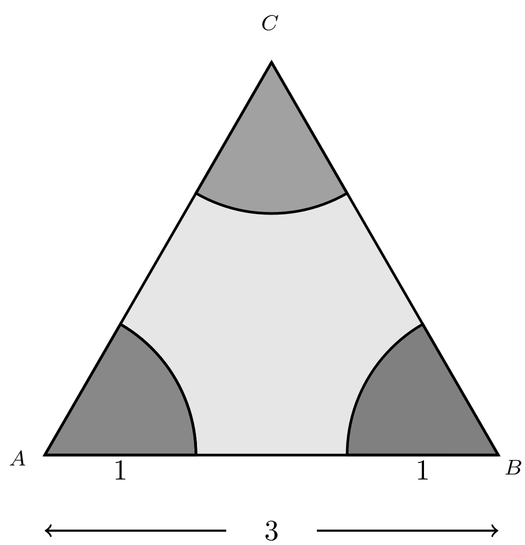

Figura 1

Con riferimento alla figura, è il rapporto tra l'area evidenziata in grigio chiaro e l'area del triangolo equilatero ABC; si ottiene:

$$p = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9}{4}\sqrt{3}} \sim 0.597 = 59.7\,\%$$

Esercizio 1.19

Esistono funzioni suriettive da A a B, per esempio la funzione $A \xrightarrow{f} B$ per la quale $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = a$ è suriettiva mentre non esistono funzioni iniettive (biiettive) da A a B perchè la cardinalità di A è maggiore di quella di B.

Esercizio 1.21

La verifica è semplice: bisogna fare i conti ricordando che $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$, con $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \geq b$.

Esercizio 1.22

$\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono tre termini consecutivi di una progressione aritmetica se e solo se

$$\binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} \qquad \text{con}\, n \geq 3$$

ossia

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} \qquad \text{con}\, n \geq 3$$

Facendo i conti si ottiene:

$$2\,\frac{n!}{(n-2)!\,2!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!}$$

$$n(n-1) - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$n(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

la cui unica soluzione (maggiore di 3) è $n = 7$.

Esercizio 1.24 La signora Anna ha due figli di cui uno è femmina. Le situazioni possibili sono dunque tre:

- il primo figlio è maschio, il secondo femmina;
- il primo figlio è femmina, il secondo maschio;
- entrambi i figli sono femmina.

La probabilità richiesta (rapporto tra casi favorevoli e casi possibili) è $\frac{1}{3}$.

Esercizio 1.28

I dati del quesito sono schematizzati in questo diagramma a albero

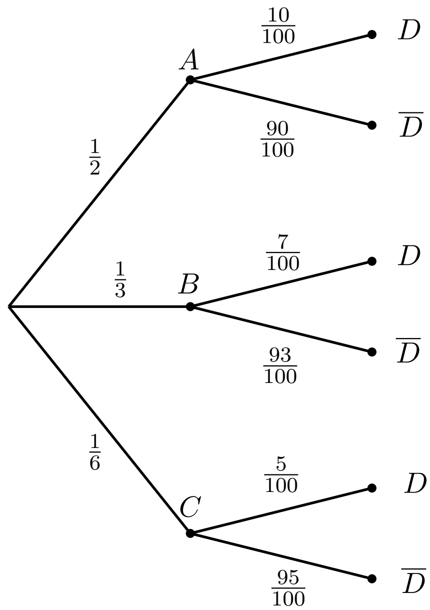

Figura 2

Per determinare la probabilità che un pezzo difettoso provenga dallo stabilimento A bisogna utilizzare il teorema di Bayes

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100}}=\frac{30}{49}=0.612=61.2\%$$

Esercizio 1.29 *Primo metodo.*

Delle dieci persone, sei hanno gli occhi azzurri e quattro no. I casi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di 2 elementi che si possono formare da un insieme di 10, cioè $\binom{10}{2}$ mentre i casi favorevoli sono tanti quanti i sottoinsiemi di 2 elementi che si possono formare da un insieme di 4. La probabilità richiesta è (casi favorevoli diviso casi possibili)

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

Secondo metodo.

Con il seguente diagramma a albero

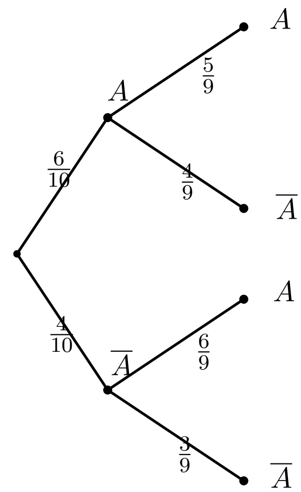

Figura 3

dove A indica l'evento "persona con occhi azzurri" e $\overline{A}$ "persona con occhi NON azzurri". La probabilità richiesta è

$$p = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Esercizio 1.30

Se si lancia un moneta n volte, la probabilità che esca k volte testa è

$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

dove p indica la probabilità che esca testa e q la probabilità che esca croce $(p+q=1)$.

Per $n=6$ e nel caso di una moneta è simmetrica $p=q=\frac{1}{2}$

$$p(6,k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}$$

Allora la probabilità che esca " al più " due volte testa è

$$\begin{aligned} p(6,0)+p(6,1)+p(6,2) &= \tbinom{6}{0} \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \tbinom{6}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \tbinom{6}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \\ &= \tfrac{1}{64} + \tfrac{6}{64} + \tfrac{15}{64} \\ &= \tfrac{22}{64} \\ &\sim 0.344 \\ &= 34.4\% \end{aligned}$$

La probabilità che esca " almeno " due volte testa è

$$\begin{aligned} 1-p(6,0)-p(6,1) &= 1-\binom{6}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^6-\binom{6}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \\ &= 1-\tfrac{1}{64}+\tfrac{6}{64} \\ &= \tfrac{57}{64} \\ &\sim 0.891 \\ &= 89.1\% \end{aligned}$$

Esercizio 1.32

(a) `Valore medio dei numeri generati:`

$$\int_0^2 xf(x)\,dx=\int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)\,dx=\frac{6}{5}$$

(b) `Probabilità che il primo numero estratto sia` $\frac{4}{3}$`:`

zero, perchè x è una variabile aleatoria continua $\left(\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x)\,dx=0\right)$.

(c) `Probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1:`

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)\,dx=\frac{5}{16}$$

Esercizio 1.33 Sia $p(4)=p$ la probabilità che esca il numero 4. Allora la probabilità che esca il numero 3 è $p(3)=2p$, la probabilità che esca 2 è $p(2)=4p$, la probabilità che esca 1 è $p(1)=8p$. Inoltre la somma di tutte le probabilità deve essere uguale a 1: $p+2p+4p+8p=1$, ossia $p=\frac{1}{15}$. In definitiva:

$$p(1)=\frac{8}{15},\;\; p(2)=\frac{4}{15},\;\; p(3)=\frac{2}{15},\;\; p(1)=\frac{1}{15}$$

Quindi la probabilità che escano due numeri uguali è

$$p(1)^2+p(2)^2+p(3)^2+p(4)^2=\left(\frac{8}{15}\right)^2+\left(\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{2}{15}\right)^2+\left(\frac{1}{15}\right)^2=\frac{85}{225}=\frac{17}{45}=0.378=37.8\%$$

Esercizio 1.34

In due lanci gli eventi possibili sono $(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)$. Gli eventi in cui si ottiene esattamente una volta testa (e di conseguenza una volta croce) sono $(T,C),(C,T)$. Quindi la probabilità richiesta è

$$p = \frac{\texttt{Numero eventi favorevoli}}{\texttt{Numero eventi possibili}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Se si lancia n volte una moneta simmetrica e si ottiene k volte testa, gli eventi favorevoli sono rappresentati dalle successioni finite di n simboli con esattamente k testa e $n-k$ croce, in tutto sono $\binom{n}{k}$; la probabilità che si verifichi uno qualunque di questi eventi è $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$. Pertanto la la probabilità che in n lanci si ottenga k volte testa è

$$p = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Ponendo $n = 4$ e $k = 2$ si ottiene

$$p = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Quindi lanciando 4 volte una moneta (simmetrica) la probabilità di ottenere 2 volte testa (e 2 volte croce) NON è del 50%.

Esercizio 1.35

(a) La probabilità che il primo numero estratto sia 10 è $p_1 = \frac{1}{16}$; la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 10 è $p_2 = \frac{9}{16}$; infine la probabilità che il terzo numero estratto sia anche esso minore di 10 è $p_3 = \frac{9}{16}$. Pertanto la probabilità richiesta è

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \sim 0.0198 = 1.98\%$$

(b) Gli eventi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di 5 elementi presi da un insieme di 16, cioè $\binom{16}{5}$. Gli eventi favorevoli sono tanti quanti i sottoinsiemi di 4 elementi presi da un insieme di 12 elementi cioè $\binom{12}{4}$. La probabilità richiesta è

$$p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{495}{4368} \sim 0.113 = 11.3\%$$

Esercizio 1.36

(a) Affinchè dopo quattro lanci il punteggio sia zero occorre che sia uscito il numero 3 esattamente una volta. Quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{4}{1}\left(\cdot\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \sim 0.386 = 38.6\%$$

(b) Innanzi tutto conviene calcolare la probabilità che *il punteggio scenda almeno una volta sotto lo* 0; ciò succede se

- al primo lancio non esce il numero 3: la probabilità è $\dfrac{5}{6}$

oppure se

- al primo lancio esce il numero 3 e nei quattro lanci successivi (secondo, terzo, quarto e quinto lancio) esce sempre un numero diverso da 3: la probabilità è $\left(\dfrac{1}{6}\right) \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$

Quindi la probabilità che *il punteggio scenda almeno una volta sotto lo* 0 è

$$p = \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Quindi la probabilità richiesta è

$$1 - p = 1 - \frac{7105}{7776} \sim 0.086 = 8.6\%$$