Funzioni reali di variabile reale
Esercizi su integrali e integrali generalizzati

Mauro Saita

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a: maurosaita@tiscalinet.it

Dicembre 2014 [1]

Indice

1 Integrali

1.1 Primitive e integrali definiti

Esercizio 1.1. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti*

1. $\displaystyle\int 3e^{5x-1}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4+5)^{\frac{7}{2}}}\,dx$

3. $\displaystyle\int x\cos(3x^2+1)\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int e^{7x}\cos e^{7x}\,dx$

6. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

[1] File: es_integrali_2014.tex

7. $\int \frac{2x+3}{2x^2+6x}\,dx$

Esercizio 1.2. *Tra le primitive della funzione* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ *trovare quella il cui grafico passa per* $(4, 2)$.

Esercizio 1.3. *Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali*

1. $\int \ln x\,dx$
2. $\int x \ln x\,dx$
3. $\int x \ln^2 x\,dx$
4. $\int 2x \arctan x\,dx$
5. $\int \arcsin x\,dx$
6. $\int x^2 e^x\,dx$
7. $\int e^x \sin x\,dx$
8. $\int x^2 \cos x\,dx$
9. $\int x^2 \ln x\,dx$

Esercizio 1.4. *Dopo aver dimostrato le due formule*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

determinare $\int \cos^2 x\,dx$ *e* $\int \sin^2 x\,dx$.

Esercizio 1.5. *Utilizzando il metodo di sostituzione per integrali indefiniti, calcolare*

1. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$
2. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$
3. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$
4. $\int \tan x\,dx$

Esercizio 1.6. *Calcolare i seguenti integrali definiti*

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{5x^3}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{4x^2-2x}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2+\sin x\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

5. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{5x^2-10}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}\,dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}+1\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x\,dx$

Esercizio 1.7. *Utilizzando solo considerazioni geometriche calcolare il seguente integrale*

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

dove r è un numero reale non negativo.

Esercizio 1.8. *Usando il metodo di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali*

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{3x+4}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$

Esercizio 1.9. *Usando il metodo di integrazione per sostituzione, calcolare l'integrale*

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

(Utilizzare la sostituzione $\sin\theta = u$).

Esercizio 1.10. *Calcolare l'area della regione R che sta sopra la retta di equazione $y = 2$ e sotto il grafico della curva $y = 3x - x^2$.*

Esercizio 1.11. *Trovare la derivata rispetto a x della funzione $F(x)$ così definita*

$$F(x) = \int_1^x t^2 + t\, dt$$

Esercizio 1.12. *Tracciare il grafico della seguente funzione integrale*

$$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{F} \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1.2 Volumi di solidi di rotazione

1. Sia R la regione di piano delimitata dal grafico di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$. Il volume V del solido ottenuto facendo ruotare la regione piana R attorno all'asse x è

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2. Sia R la regione di piano delimitata dal grafico di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$. Il volume V del solido ottenuto facendo ruotare la regione piana R attorno all'asse y è

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Esercizio 1.13. *Calcolare il volume del solido di rotazione di asse x generato dal grafico, nel piano xy, di $y = \sqrt{2x^3 + 1}$, $\quad 0 \leq x \leq 1$.*

Esercizio 1.14. *Calcolare il volume del solido di rotazione di asse x generato dal grafico, nel piano xy, di $y = \sqrt{3 \ln x}$, $\quad 1 \leq x \leq e$.*

Esercizio 1.15. *Trovare il volume dell'ellissoide che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x la regione di piano racchiusa dall'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esercizio 1.16. *Trovare il volume che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse delle x la regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = -3x^2 + 7x \quad e \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ g(x) = \frac{4}{x}$$

Esercizio 1.17 (Volume del toro)**.** *Si consideri la circonferenza di centro* $(a, 0)$ *e raggio* r*. Determinare il volume del toro che si ottiene facendo ruotare il cerchio attorno all'asse* y*.*

Esercizio 1.18. *Si consideri il cerchio di raggio* 1 *e centro* $(2, 0)$*. Determinare il volume del solido che si ottiene facendo ruotare tale cerchio attorno all'asse* y*.*

Esercizio 1.19. *Determinare il volume del solido che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse* y *l'arco parabolico* $y = x^2$*,* $0 \leq x \leq 1$*.*

1.3 Lunghezza di un arco di curva. Integrali curvilinei di prima specie

1. Sia γ una curva piana continua parametrizzata:

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

(Considerazioni analoghe valgono per curve nello spazio tridimensionale).

Sia $T = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partizione

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$. Il numero

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x(t_k) - x(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y(t_k) - y(t_{k-1})\Big)^2} \tag{1.1}$$

rappresenta la lunghezza di una poligonale P inscritta in γ.

Indicato con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le poligonali inscritte in γ, si definisce *lunghezza* $L(\gamma)$ *di* γ l'estremo superiore, ammesso che esista, di $L(P)$ al variare di P in $\mathcal{P}$, cioè

$$L(\gamma) = \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P)$$

Se tale sup esiste finito la curva si dice *rettificabile*.

2. Se la curva parametrizzata

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

è di classe $C^1[a, b]$ (cioè le funzioni $x(t), y(t)$ sono derivabili su $[a, b]$, con derivata continua), allora γ è rettificabile e la sua lunghezza è

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt \tag{1.2}$$

L'uguaglianza (1.2) si può spiegare così: anzitutto l'integrale che figura a secondo membro di (1.2) esiste, perché la funzione integranda è continua sull'intervallo compatto $[a, b]$. Si consideri allora una partizione dell'intervallo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = b$$

costituita da sotto-intervallini tutti di uguale lunghezza $\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

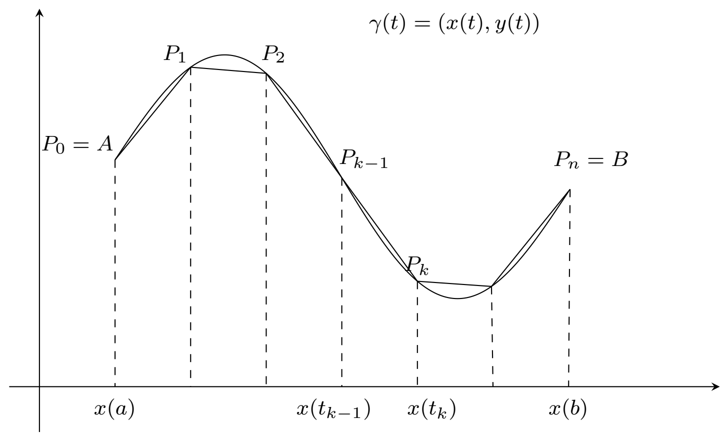

Figura 1: Una poligonale è una spezzata i cui vertici $P_k = \gamma(t_k)$, $k = 0, 1 \ldots, n$ stanno su γ.

Le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ soddisfano su ogni intervallino (t_{k-1}, t_k) le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi gli incrementi $x(t_k) - x(t_{k-1})$ e $y(t_k) - y(t_{k-1})$ si possono approssimare, a meno di resti "molto piccoli" con le espressioni

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) \sim x'(c_k)\,\Delta t, \qquad y(t_k) - y(t_{k-1}) \sim y'(d_k)\,\Delta t$$

dove $c_k, d_k \in (t_{k-1}, t_k)$. La lunghezza del segmentino $\overline{P_{k-1}P_k}$ si può allora approssimare così

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{\Big(x(t_k) - x(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y(t_k) - y(t_{k-1})\Big)^2} \sim \sqrt{x'^2(c_k) + y'^2(d_k)} \;\cdot \Delta t$$

Segue che un valore approssimato della lunghezza totale della curva è

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(c_k) + y'^2(d_k)} \;\cdot \Delta t$$

Posto $m_k = \min\limits_{t_{k-1} \le t \le t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ e $M_k = \max\limits_{t_{k-1} \le t \le t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta t \le L_n \le \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta t$$

Per $n \to +\infty$, le somme $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,\Delta t$ e $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\,\Delta t$ convergono a $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$; per il teorema del confronto di successioni, anche L_n converge a L.

Esercizio 1.20. *Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio* r.

Esercizio 1.21. *Determinare la lunghezza del grafico della funzione* $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

Esercizio 1.22. *Determinare la lunghezza del grafico della funzione* $[0,3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}$.

Esercizio 1.23. *Calcolare la lunghezza della curva parametrizzata* $\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$, $t \in [0,1]$. *Qual è la massa totale del sostegno della curva, se la sua densità lineare di massa è costante e uguale a* δ*?*

Esercizio 1.24. *Calcolare la lunghezza dell'elica cilindrica*

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{1.3}$$

Esercizio 1.25. *Calcolare la lunghezza della curva che è grafico della funzione*

$$y = \sqrt{x^3}, \qquad x \in [0,1]$$

Esercizio 1.26. *Calcolare la lunghezza della* cicloide*:*

$$\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{1.4}$$

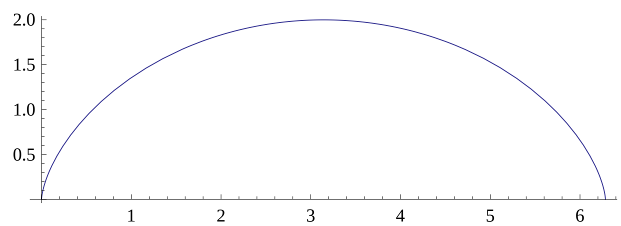

Figura 2: La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza di raggio R (in figura $r = 1$) quando la circonferenza rotola, senza strisciare, sull'asse delle x.

Esercizio 1.27. *Calcolare l'integrale (curvilineo di prima specie)*

$$\int_C (3x - y + z)\, ds$$

dove C *è la curva parametrizzata* $C(t) = (3t, 4t-1, t+5)$, *con* $t \in [0,2]$.

Esercizio 1.28. *Trovare le coordinate del baricentro della semicirconferenza* γ *di equazioni parametriche:*

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \tag{1.5}$$

pensata come un filo di densità lineare costante.

Esercizio 1.29. *Si consideri la curva* $\mathbf{r}$*, nello spazio tridimensionale* $\mathbb{R}^3$*, di equazioni parametriche:*

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi].$$

Si calcoli la massa totale del filo costituito dall'immagine della curva $\mathbf{r}$*, nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia*

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x}.$$

1.4 Area delimitata da una curva

1. Sia γ una curva di equazioni parametriche

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

con $x(t), y(t)$ di classe C^1 sull'intervallo $[a, b]$. Allora l'area A delimitata dalla curva γ e dalle rette $x = x(a)$, $x = x(b)$ e $y = 0$ è data dal seguente integrale:

$$A = \int_a^b y(t)\, x'(t) dt \tag{1.6}$$

Si può dare un'idea della dimostrazione in questo modo: sia $T = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$, con parametro di finezza $|T|$. L'area delimitata dalla curva γ e dalle rette $x = x(a)$, $x = x(b)$ e $y = 0$ si può approssimare con somme del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} y(t_{k-1})[x(t_k) - x(t_{k-1})] \tag{1.7}$$

La variazione $x(t_k) - x(t_{k-1})$ si approssima (a meno di una quantità molto piccola) con

$$x'(t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1})$$

Quindi le somme (1.7) si scrivono:

$$\sum_{k=1}^{n} y(t_{k-1})x'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \tag{1.8}$$

Pertanto è ragionevole (ma andrebbe dimostrato rigorosamente) che l'area A sia data dal limite

$$A = \lim_{|T| \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_{k-1})x'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \tag{1.9}$$

Si arriva alla tesi osservando che le somme che compaiono a secondo membro sono somme di Riemann della funzione $y(t)x'(t)$.

Esercizio 1.30 (Area del cerchio.)**.** *Calcolare l'area del cerchio di raggio* r*.*

Esercizio 1.31 (Area dell'ellisse.)**.** *Utilizzando l'uguaglianza (1.6), trovare l'area delimitata dall'ellisse di semiassi* a *e* b*.*

Esercizio 1.32 (Area delimitata da un arco di cicloide.)**.** *Verificare che l'area delimitata dall'arco di cicloide* OAB *e l'asse* x *è tre volte l'area del cerchio generatore.*

1.5 Integrali di funzioni razionali

Esercizio 1.33. *Calcolare*

1. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$ *(Indicate con x_1 e x_2 le radici del trinomio a denominatore, scrivere la funzione integranda nella forma $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$).*

2. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx$ *(Indicate con x_1, x_2, x_3 le radici del polinomio a denominatore, scrivere la funzione integranda nella forma $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}$).*

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ *(Scrivere la funzione integranda nella forma $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$).*

4. $\displaystyle\int \frac{6x-1}{(x-2)^3}\,dx$ *(Scrivere la funzione integranda nella forma $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$).*

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx$ *(Eseguire la divisione di x^3+2 per x^3-x. Detti $Q(x)$ e $R(x)$ il quoziente e il resto di tale divisione si ottiene $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int Q(x)+\frac{R(x)}{x^3-x}\,dx$)*

6. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\,dx$ *(Scrivere la funzione integranda nella forma $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$).*

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-6x+1}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+12}\,dx$ *(Utilizzare il metodo del completamento del quadrato).*

10. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+2x+3}\,dx$ *(Utilizzare il metodo del completamento del quadrato).*

1.6 Integrali di funzioni irrazionali

Esercizio 1.34. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\sqrt{(5-x^2)^3}}\,dx$$

Suggerimento: porre $x = \sqrt{5}\sin\theta$.

Esercizio 1.35. *Verificare che l'area delimitata dall'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vale πab. *Suggerimento. Bisogna integrare una funzione del tipo* $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, *porre* $x = a\sin t$.

Esercizio 1.36. *Trovare l'area del segmento circolare mostrato in figura (la circonferenza ha raggio* $r = 2$ *e centro in* O*).*

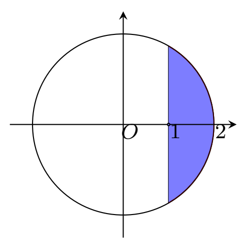

Figura 3:

Esercizio 1.37. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Suggerimento: porre $x = 2\tan\theta$.

2 Integrali generalizzati

Integrali di funzioni non limitate definite su intervalli limitati.

1. Sia $[a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile su ogni intervallo $[a,c]$ con $a < c < b$ (è il caso, per esempio, di funzioni continue su $[a,b)$ per le quali $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$). Si chiama integrale generalizzato di f nell'intervallo $[a,b]$ (e si scrive $\int_a^b f(x)\,dx$) se esiste il limite

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \tag{2.1}$$

   Se il limite (2.1) esiste <u>finito</u> si dice che l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente*, mentre se il limite (2.1) è $+\infty$ o $-\infty$ si dice che l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *divergente*.

2. Per funzioni $[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ non-negative e integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $a < c < b$ vale il seguente *criterio del confronto*

   Siano $[a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $[a,b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $a < c < b$. Se per ogni $x \in [a,b)$ risulta $0 \le f(x) \le g(x)$, valgono le seguenti implicazioni

   (a) $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge* $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*

   (b) $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge* $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge*

   Si ricordi che il criterio enunciato sopra vale per funzioni non negative.

3. *Criterio del confronto asintotico.* Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $a < c < b$. Se per ogni $x \in [a,b)$ risulta $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ e inoltre $f(x) \sim g(x)$, per $x \to b^-$, allora

   (a) $\int_a^b f(x)\,dx$ *convergente* $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *convergente*

   (b) $\int_a^b f(x)\,dx$ *divergente* $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *divergente*

Integrali di funzioni definite su intervalli illimitati.

1. Sia $[a,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile su ogni intervallo $[a,c]$ con $c > a$. Si chiama integrale generalizzato di f nell'intervallo $[a,+\infty]$ (e si scrive $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$) se esiste il limite

$$\lim_{c\to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \tag{2.2}$$

   Se il limite (2.2) esiste <u>finito</u> si dice che l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente*, mentre se il limite (2.2) è $+\infty$ o $-\infty$ si dice che l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *divergente*.

2. Per funzioni $[a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ non-negative e integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $c > a$ vale il seguente *criterio del confronto.*

   Siano $[a,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $[a,+\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ funzioni integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $c > a$. Se per ogni $x \in [a,+\infty)$ risulta $0 \leq f(x) \leq g(x)$, valgono le seguenti implicazioni

   (a) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *convergente* $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ *convergente*

   (b) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *divergente* $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *divergente*

3. *Criterio del confronto asintotico.* Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni integrabili su ogni intervallo $[a,c]$ con $c > a$. Se per ogni $x \in [a,+\infty)$ risulta $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ e inoltre $f(x) \sim g(x)$, per $x \to +\infty$, allora

   (a) $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge*

   (b) $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge*

Esercizio 2.1. *Dire se i seguenti integrali generalizzati sono convergenti o divergenti*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,dx,$ *con* $\beta > 0.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx,$ *con* $\alpha \geq 0.$

Esercizio 2.2. *Si consideri l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{kx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'integrale converge? Per quali $k \in \mathbb{R}$ diverge?

Esercizio 2.3. *Dire se i seguenti integrali generalizzati convergono o divergono.*

1. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{3+\cos x}{x \ln x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x^2+3x}}\,dx$

Esercizio 2.4 (Un paradosso.). *Si consideri la funzione*

$$[1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

Dimostrare che la regione piana A delimitata dal grafico di f, dall'asse delle x e dalla retta di equazione $x = 1$ ha area infinita, mentre il solido che si ottiene ruotando la regione A attorno all'asse delle x ha volume finito.

Esercizio 2.5. *Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ l'integrale generalizzato*

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^n}}\, dx$$

converge. Infine, calcolare il valore di I_n per il più piccolo n per cui tale integrale converge.

Esercizio 2.6. *Dimostrare che l'integrale*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *converge.*

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ *diverge.*

3 Risposte e suggerimenti

Esercizio 1.1

1. $F(x) = \frac{3}{5}e^{5x-1} + c.$
2. $F(x) = -\frac{1}{10}(x^4+5)^{-\frac{5}{2}} + c.$
3. $F(x) = \frac{1}{6}\sin(3x^2+1) + c.$
4. $F(x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$
5. $F(x) = \frac{1}{7}\sin e^{7x} + c.$
6. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$
7. $F(x) = \ln|2x^2+6x| + c.$

Esercizio 1.2 $F(x) = x + 5\ln|x-3| - 2.$

Esercizio 1.3

1. $F(x) = x\ln x - x + c.$
2. $F(x) = \frac{1}{2}(x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2) + c.$
3. $F(x) = \frac{1}{2}(x^2\ln^2 x - x^2\ln x + \frac{1}{2}x^2) + c.$
4. $F(x) = x^2\arctan x - x + \arctan x + c.$
5. $F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$
6. $F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$
7. $F(x) = -\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\sin x + c.$
8. $F(x) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.$
9. $F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

Esercizio 1.4 $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + C,\quad \int\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + C$

Esercizio 1.5

1. $\int\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$. Usare la sostituzione $\sqrt{x} = t$.
2. $\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$. Usare la sostituzione $\sqrt{x} = t$.
3. $\int x^2e^{x^3}\,dx$. Usare la sostituzione $x^3 = t$.
4. $\int\tan x\,dx$. Usare la sostituzione $\cos x = t$.

Esercizio 1.6

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{5x^3}\,dx = \frac{1}{15}(e^5 - 1)$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{4x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln 6$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 + \sin x\,dx = \frac{\pi^3}{8} + 1$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$

5. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{5x^2-10}\,dx = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{5}$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$

8. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} + 1\,dx = \frac{5}{3}$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}$

Esercizio 1.7 Il grafico della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $0 \leq x \leq r$ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio r, contenuto nel primo quadrante degli assi cartesiani (fare una figura). Pertanto:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Esercizio 1.8 1. Posto $3x + 4 = t$, si ha $dx = \frac{1}{3}dt$. Quindi

$$\int_{-1}^0 \sqrt{3x+4}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{9}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^4 = \frac{14}{9}.$$

2. Posto $e^x - 1 = t$, si ha $e^x dx = dt$. Quindi

$$\int_0^1 e^x\sqrt{e^x - 1}\,dx = \int_0^{e-1} \sqrt{t\,dt} = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e-1} = \frac{2}{3}\sqrt{(e-1)^3}.$$

Esercizio 1.9

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta}\,d\theta$$

Posto $\sin\theta = u$, $\cos\theta\,d\theta = du$. Allora

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{du}{1-u^2}$$

L'integranda $\frac{1}{1-u^2}$ si può scrivere nella forma $\frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}$, con $A = B = \frac{1}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int \sec\theta\, d\theta &= \tfrac{1}{2}\left(\ln|1+u| - \ln|1-u|\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|1+\sin\theta| - \ln|1-\sin\theta|\right) + c \\
&= \ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|} + c \\
&= \ln\sqrt{\left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}\right|} + c \\
&= \ln\left|\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}\right| + c \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c
\end{aligned}$$

Esercizio 1.10 `Area di` $R = \int_1^2 3x - x^2 - 2\, dx = \frac{1}{6}$.

Esercizio 1.11 $F'(x) = x^2 + x$.

Esercizio 1.12 La funzione integranda è pari e quindi $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ è dispari (limitare lo studio all'intervallo $[0, +\infty)$. Inoltre, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2} dt = L > 0$, la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale di F. Essendo $F'(x) = e^{-x^2}$, la funzione integrale risulta crescente in $[0, +\infty)$.
$F''(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ in $(0, +\infty)$, $F(x)$ è concava in tale intervallo.

Esercizio 1.13 $\frac{3}{2}\pi$

Esercizio 1.14 $\pi\displaystyle\int_1^e 3\ln x dx = 3\pi[x\ln x - x]_1^e = 3\pi$

Esercizio 1.15 $\frac{4}{3}\pi ab^2$

Esercizio 1.16 Il volume richiesto è espresso dal seguente integrale: $\pi\displaystyle\int_1^2 f^2(x) - g^2(x)\, dx$.

Esercizio 1.17 L'equazione della circonferenza di centro $(a, 0)$ e raggio r è $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, i punti della semicirconferenza situata sopra l'asse delle x sono quelli del grafico di $y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$. Pertanto il volume del toro è dato dal seguente integrale:

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, dx.$$

Posto $t = x - a$ otteniamo

$$V = 4\pi \int_{-r}^{+r} (t+a)\sqrt{r^2 - t^2}\, dt = 4\pi\Big(\int_{-r}^{+r} t\sqrt{r^2 - t^2}\, dt \;+\; \int_{-r}^{+r} a\sqrt{r^2 - t^2}\, dt\Big).$$

Il primo dei due integrali tra parentesi vale zero perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine degli assi, mentre il secondo integrale tra parentesi vale *a volte l'area del semicerchio di raggio r*.

Quindi, il volume del toro è

$$V = 4\pi(0 + a\frac{\pi r^2}{2}) = 2\pi^2 a r^2.$$

Si noti che il volume ottenuto è uguale a quello di un cilindro avente raggio di base r e altezza uguale a $2\pi a$.

Esercizio 1.18 $V = 4\pi^2$.

Esercizio 1.19

Esercizio 1.20 Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio r.

Soluzione. Una parametrizzazione della circonferenza di raggio r è

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Il vettore tangente è $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, il cui modulo è

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$$

Quindi la lunghezza della circonferenza è :

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$

Esercizio 1.21 Una parametrizzazione della funzione $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ è

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$. La lunghezza della curva $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}\sqrt{t^3})$, $t \in [0,1]$ è

$$L = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Esercizio 1.22 La lunghezza della curva è

$$\int_0^3 \sqrt{(1+x^2)^2} dx = \int_0^3 (1+x^2) dx = 12$$

Esercizio 1.23 Calcolare la lunghezza della curva parametrizzata $\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$, $t \in [0,1]$. Qual è la massa totale del sostegno della curva, se la sua densità lineare di massa è costante e uguale a δ?

Soluzione.

La lunghezza della curva è

$$\int_\gamma ds = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{4e^{4t}+4e^{2t}+1}\,dt = \int_0^1 (2e^{2t}+1)\,dt = \left[e^{2t}+t\right]_0^1 = e^2$$

Se la densità lineare di massa δ è costante, la massa totale è data dall'integrale

$$\int_\gamma \delta\,ds = \delta \int_\gamma ds = \delta \cdot \text{Lunghezza} = \delta\, e^2$$

Esercizio 1.24 Calcolare la lunghezza dell'elica cilindrica

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{3.1}$$

Soluzione. Il vettore tangente è

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

e il suo modulo è

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Allora la lunghezza dell'elica è data dall'integrale

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\,\sqrt{a^2+b^2}$$

Può essere suggestivo arrivare a questo risultato anche con considerazioni geometriche, che presentiamo brevemente. L'elica è avvolta su un cilindro, le cui direttrici sono rette parallele all'asse z. Se tagliamo il cilindro lungo la direttrice passante per il punto $(a,0,0)$ e lo srotoliamo su un piano, l'elica diventa la diagonale di un triangolo rettangolo (perché?) i cui cateti sono la circonferenza rettificata - di lunghezza $2\pi a$ - e l'altezza dell'elica, che è uguale a $2\pi b$. Dunque la sua lunghezza è

$$\sqrt{(2\pi a)^2 + (2\pi b)^2} = 2\pi\,\sqrt{a^2+b^2}$$

Esercizio 1.25 Calcolare la lunghezza della curva che è grafico della funzione

$$y = \sqrt{x^3}, \qquad x \in [0,1]$$

Soluzione.

Il grafico può essere visto come il sostegno della curva parametrizzata

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \sqrt{t^3}, \qquad t \in [0,1]$$

Il vettore tangente è

$$\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)$$

la cui lunghezza è

$$\sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

La lunghezza del grafico è

$$\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\,dt = \left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left((\frac{13}{4})^{3/2}-1\right) = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

Esercizio **1.26** Calcolare la lunghezza della *cicloide*:

$$\gamma(t) = (r(t-\sin t), r(1-\cos t)), \qquad t\in[0,2\pi] \tag{3.2}$$

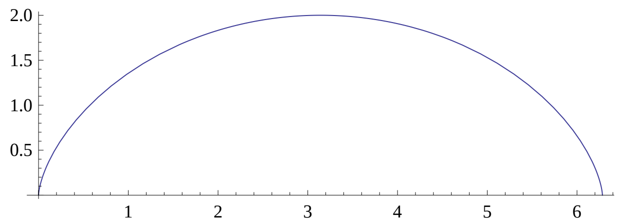

Figura 4: La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza di raggio R (in figura $r=1$) quando la circonferenza rotola, senza strisciare, sull'asse delle x.

Soluzione.

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t} = r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$$

Ricordando la formula di bisezione

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = \sin\frac{t}{2} \qquad\qquad t\in[0,2\pi]$$

si ottiene:

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2r\left|-2\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi} = 8r$$

La lunghezza di un arco di cicloide è quattro volte il diametro del cerchio generatore.

Esercizio **1.27** Calcolare l'integrale (curvilineo di prima specie)

$$\int_C (3x-y+z)\,ds$$

dove C è la curva parametrizzata $C(t) = (3t, 4t-1, t+5)$, con $t\in[0,2]$.

Soluzione.

La curva parametrizzata è un segmento di retta, il cui elemento di linea ds è uguale a

$$ds = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt = \sqrt{3^2+4^2+1^2}\,dt = \sqrt{26}\,dt$$

La funzione $f(x,y,z) = 3x-y+z$, ristretta lungo la curva C, è

$$f(x(t),y(t),z(t)) = (3(3t)-(4t-1)+(t+5)), \qquad t\in[0,2]$$

Quindi l'integrale da calcolare è

$$\int_C (3x - y + z)\, ds = \int_0^2 (3(3t) - (4t-1) + (t+5))\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}\, dt = \int_0^2 (6t+6)\sqrt{26} = 24\sqrt{26}$$

Esercizio 1.28 Trovare le coordinate del baricentro della semicirconferenza γ di equazioni parametriche:

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \tag{3.3}$$

pensata come un filo di densità lineare costante.

Soluzione.

Per motivi di simmetria, il baricentro si deve trovare sull'asse delle y. Le sue coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ sono date, per definizione, da:

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma x\, ds, \qquad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_\gamma y\, ds$$

dove L è la lunghezza della curva. Nel nostro caso $L = \pi R$ e $ds = R\, dt$. Quindi:

$$\overline{x} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, dt = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\sin t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}R$$

Esercizio 1.29 Si consideri la curva $\mathbf{r}$, nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, di equazioni parametriche:

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi].$$

Si calcoli la massa totale del filo costituito dall'immagine della curva $\mathbf{r}$, nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x}.$$

Soluzione.

Si ha

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j} + 2\cos t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi],$$

e quindi:

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{4t^2 + 4} = 2\sqrt{t^2 + 1}, \qquad t \in [0, \pi].$$

La funzione $\delta(x, y, z) = \sqrt{x}$, ristretta alla curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2\cos t, 2\sin t)$, è data da:

$$\delta(x(t), y(t), z(t)) = \sqrt{x(t)} = \sqrt{t^2} = t$$

($\sqrt{t^2} = t$ perché $t \geq 0$). Quindi la massa totale è data dal seguente integrale curvilineo:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \delta(\mathbf{r}(t))\, |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt &= \int_0^\pi \sqrt{x(t)}\, 2\sqrt{t^2+1}\, dt = \int_0^\pi 2t\sqrt{t^2+1}\, dt \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(t^2+1\right)^{3/2}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\left[\left(\pi^2+1\right)^{3/2} - 1\right]\end{aligned}$$

Esercizio 1.30

Le equazioni parametriche della circonferenza di centro O e raggio r sono $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ con $0 \le \theta < 2\pi$.
Pertanto l'area del cerchio è

$$S = -2r^2 \int_\pi^0 \sin^2\theta\, d\theta = -2r^2 \int_\pi^0 \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = -2r^2 \Big[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_\pi^0 = \pi r^2.$$

Esercizio 1.31

Le equazioni parametriche dell'ellisse di semiassi a e b sono $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ con $0 \le \theta < 2\pi$. Pertanto l'area dell'ellisse è

$$S = -2ab \int_\pi^0 \sin^2\theta\, d\theta = -2ab \int_\pi^0 \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = -2ab \Big[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_\pi^0 = \pi ab.$$

Esercizio 1.32

L'area richiesta è data dal seguente integrale:

$$A = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta)d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta$$

Allora l'area delimitata dall'arco di cicloide e dall'asse x è

$$A = r^2 \left| \frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \right|_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

Esercizio 1.33

1. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\, dx$. Le radici del trinomio a denominatore sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. La funzione integranda si può scrivere nella forma $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Si ricava:
$$F(x) = 7\ln|x-3| - 6\ln|x-2| + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-x}\, dx$. Le radici del polinomio a denominatore sono con $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. La funzione integranda si scompone in fratti semplici così: $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$. Si ottiene:
$$F(x) = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2}\, dx$. La funzione integranda si decompone in fratti semplici nel seguente modo: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$. Si ottiene:
$$F(x) = \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{5}{9}\ln|x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{6x-1}{(x-2)^3}\,dx.$ L'integranda si decompone in fratti semplici nel seguente modo: $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$. Si ottiene:

$$F(x) = -\frac{6}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + c$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx.$ Eseguendo la divisione di x^3+2 per x^3-x si ottiene quoziente $Q(x)=1$ e resto $R(x)=x+2$. Allora $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{x^3-x}\,dx$. Si ricava:

$$F(x) = x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\,dx.$ L'integranda si decompone in fratti semplici nel seguente modo: $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$. Le antiderivate richieste sono

$$F(x) = 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctan x + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx.$ $F(x) = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-6x+1}\,dx.$ $F(x) = -\frac{1}{9(x-\frac{1}{3})} + c$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+12}\,dx.$ Utilizzando il metodo del completamento del quadrato si ottiene

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-3}{\sqrt{3}} + c$$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+2x+3}\,dx.$ Utilizzando il metodo del completamento del quadrato si ottiene

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{4x+1}{\sqrt{11}} + c$$

Esercizio 1.34 Ponendo $x = \sqrt{5}\sin\theta$ si ottiene:

$$F(x) = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + c$$

Per trovare le primitive di integrali contenenti $\sqrt{a^2-x^2}$ è spesso utile usare la sostituzione $x = a\sin\theta$.

Esercizio 1.35 La funzione che descrive la semi-ellisse contenuta nel semipiano $y \geq 0$ è $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Quindi si ha:

$$\texttt{Area ellisse} = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \tag{3.4}$$

Posto $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$. L'integrale (3.4) diventa

$$\begin{aligned} 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= 2\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt \\ &= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt \\ &= 2ab\left[\frac{t+\cos t\sin t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Esercizio 1.36 L'area del segmento circolare è espressa dal seguente integrale definito

$$A = 2\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Posto $x = 2\sin\theta$, $dx = 2\cos\theta\,d\theta$. Allora

$$A = 2\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,d\theta = 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = 8\left[\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi

$$A = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

Esercizio 1.37 Posto $x = 2\tan\theta$, con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, si ottiene: $dx = \dfrac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$. Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

L'integrale indefinito della secante (si veda Esercizio 1.9) è

$$\begin{aligned} \int \sec\theta\,d\theta &= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right| + c \\ &= \ln\left(\sqrt{4+x^2}+x\right) + c \end{aligned}$$

su ogni intervallo in cui è definita l'integranda. Il modulo, nell'ultima uguaglianza, è stato tolto perchè $\sqrt{4+x^2}+x \geq 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.1 Dire se i seguenti integrali generalizzati sono convergenti o divergenti

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx.$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx$, con $\beta > 0$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$, con $\alpha \geq 0$.

Soluzione.

1. Per $x \to 0$ $\dfrac{1}{\sin^2 x} \sim \dfrac{1}{x^2}$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$ diverge. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ diverge.

2. Per $x \to +\infty$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$; l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ converge. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ converge.

3. Utilizzando la definizione di integrale generalizzato si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx = \lim_{k \to +\infty} -\frac{1}{\beta} \left[e^{-\beta x}\right]_0^k = \frac{1}{\beta}$. L'integrale è convergente.

4. Per $x \to +\infty$
$$x^\alpha e^{-x} = x^\alpha e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq M e^{-\frac{x}{2}}$$
con M reale positivo fissato. Quindi, per il criterio del confronto, l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ converge per ogni $\alpha \geq 0$.

Esercizio 1.28 Trovare le coordinate del baricentro della semicirconferenza γ di equazioni parametriche:

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \tag{3.5}$$

pensata come un filo di densità lineare costante.

Soluzione.

Per motivi di simmetria, il baricentro si deve trovare sull'asse delle y. Le sue coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ sono date, per definizione, da:

$$\overline{x} = \frac{1}{L} \int_\gamma x\, ds, \qquad \overline{y} = \frac{1}{L} \int_\gamma y\, ds$$

dove L è la lunghezza della curva. In questo caso $L = \pi R$ e $ds = R\, dt$. Quindi:

$$\overline{x} = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R\cos t\, R\, dt = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \cos t\, dt = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R\sin t\, R\, dt = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{\pi} R$$

Esercizio 2.2 Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{kx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'integrale converge? Per quali $k \in \mathbb{R}$ diverge?

Soluzione.

Indicata con $f(x)$ la funzione integranda, per x che tende a $+\infty$, si ha $f(x) = \frac{(2k-1)x^2+kx-1}{(x^2+1)(2x+1)}$. Per $k \neq \frac{1}{2}$, $f(x) \sim \frac{2k-1}{2}\frac{1}{x}$; quindi l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. Invece, per $k = \frac{1}{2}$, $f(x) \sim \frac{1}{4x^2}$: in questo caso l'integrale converge.

Esercizio 2.3 Dire se i seguenti integrali generalizzati convergono o divergono.

1. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{3+\cos x}{x\ln x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x^2+3x}}\,dx$

Soluzione.

1. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_e^{k} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{k\to+\infty}[\ln(\ln x)]_e^k$. Pertanto l'integrale diverge.
2. Per ogni $x \in [3,+\infty)$ si ha $\frac{3+\cos x}{x\ln x} \geq \frac{2}{x\ln x}$ e quindi l'integrale diverge.
3. Il denominatore $2-\sqrt{x^2+3x}$ della funzione integranda si annulla in $x = 1$ e $x = -4$.
   Per $x \to 1$ $f(x) \sim -\frac{8}{5(x-1)}$ e quindi l'integrale diverge.

Esercizio 2.4

Esercizio 2.5 Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ l'integrale generalizzato

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^n}}\,dx$$

converge. Infine, calcolare il valore di I_n per il più piccolo n per cui tale integrale converge.

Soluzione.

L'integranda $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^n}}$ è definita e continua su $(1,+\infty)$. Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{n-1}}$. Pertanto l'integrale converge per $n-1 > 1$, cioè per $n > 2$. Il primo numero naturale per cui si ha la convergenza dell'integrale I_n è 3:

$$I_3 = \lim_{k\to+\infty}\int_1^{k} \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 2.6 Dimostrare che l'integrale

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverge.

Soluzione.

1. Si ponga $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = I_1 + I_2$. Bisogna allora di dimostrare che I_1 e I_2 sono entrambi convergenti.

   I_1 converge perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Per quanto riguarda I_2, integrando per parti si ottiene:

$$I_2 = \lim_{k\to+\infty} \int_{2\pi}^{k} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{2\pi}^{k} + \lim_{k\to+\infty} \int_{2\pi}^{k} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

   Ora, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{2\pi}^{k} = 0$ mentre $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_{2\pi}^{k} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ è convergente perché $\frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$. Quindi, anche I_2 è convergente.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx > \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$

   Poichè $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverge.