# Algoritmo di Erone

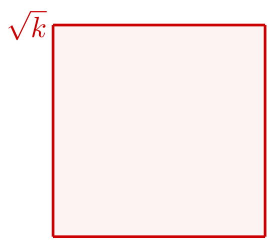
**Mauro Saita**[1]

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

## 1 Come approssimare la radice quadrata di un numero?

**Problema 1.1.**

*Trovare un algoritmo per calcolare, con la precisione desiderata, la radice quadrata del numero $k$ ($k \geq 0$), ossia*
*trovare un algoritmo che consenta di trovare le prime $n$ cifre decimali esatte del lato del quadrato di area $k$.*



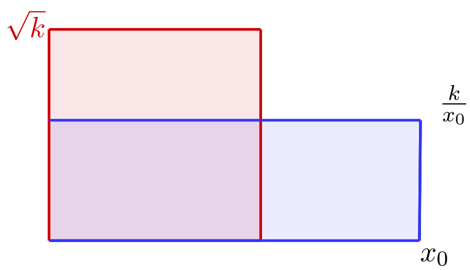

[1]Nome file: algoritmo_di_Erone.tex

## 2 Algoritmo di Erone

L'*algoritmo di Erone* rappresenta una possibile soluzione (efficiente) del problema. È il procedimento usato dalle calcolatrici e dai linguaggi di programmazione.

*Descrizione dell'algoritmo.*

**Passo 0.** Si scelga un numero reale $x_0 > \sqrt{k}$ e si costruisca il rettangolo di (area $k$ e) dimensioni $x_0$ e $\dfrac{k}{x_0}$.

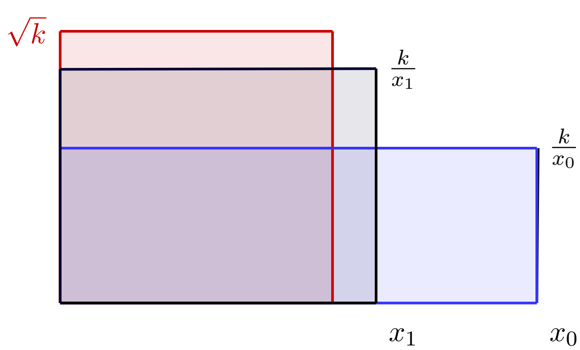



**Passo 1.** Si calcola la media aritmetica di $x_0$, $\frac{k}{x_0}$ (dimensioni del rettangolo):

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{k}{x_0}\right)$$

e si costruisce il nuovo rettangolo di (area $k$ e) dimensioni $x_1$ e $\dfrac{k}{x_1}$. Il numero $x_1$ approssima il numero $\sqrt{k}$ per eccesso, mentre $\dfrac{k}{x_1}$ per difetto. Risulta

$$\sqrt{k} \leq x_1 \leq x_0$$




**Passo 2** Si calcola la media aritmetica di $x_1$ e $\frac{k}{x_1}$:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{k}{x_1}\right)$$

e si costruisce il rettangolo di (area $k$ e) dimensioni: $x_2$ e $\frac{k}{x_2}$. Il numero $x_2$ approssima il numero $\sqrt{k}$ per eccesso, mentre $\frac{k}{x_2}$ per difetto. Risulta

$$\sqrt{k} \leq x_2 \leq x_1$$

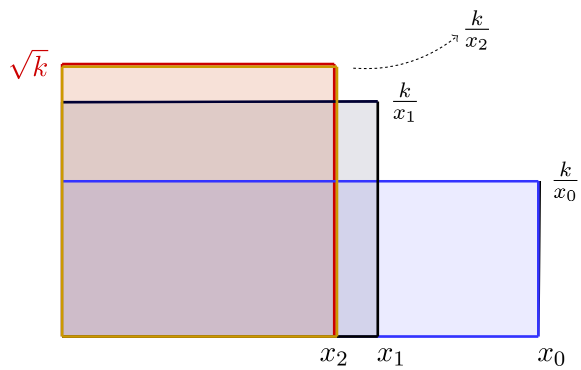
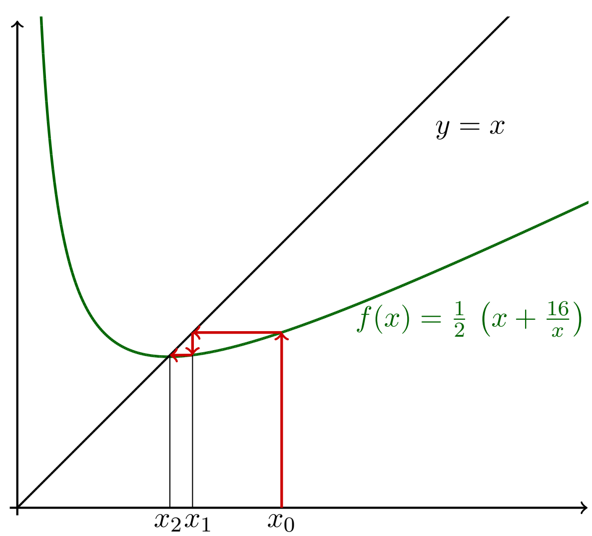



**Figura 1:** La figura mostra che già alla terza iterazione si ottiene una buona approssimazione del valore cercato.

## 3 L'essenza del metodo: la successione per ricorrenza.




**Teorema 3.1.** *Per la successione (definita per ricorrenza)*

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{k}{x_n}\right) \\ \\ x_0 & = & \alpha \qquad\qquad\qquad \textit{dove } (\alpha > 0) \end{cases}$$

*valgono le seguenti proprietà :*

(a) *i termini della successione ($x_n$, per ogni $n$) sono positivi.*

(b) *La successione è strettamente decrescente: $x_n > x_{n+1}$, per ogni $n$.*

(c) $x_n \longrightarrow \sqrt{k}$, *per* $n \longrightarrow +\infty$.

(d) $x_n - \sqrt{k} < \frac{x_0 - \sqrt{k}}{2^n}$.

(e) $x_{n+1} - \sqrt{k} < x_n - x_{n+1}$.

La dimostrazione si trova, per esempio, in:

https://www.mat.uniroma1.it/mat_cms/materiali/2013-2014/finzivita-22736-Erone_LPC.pdf