Successioni

Mauro Saita
e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Settembre 2014

Indice

1 Successioni

Definizione 1.1. *Si chiama* successione in un insieme A *o* successione di elementi di A *una funzione*

$$\mathbb{N} \xrightarrow{a} A$$

il cui dominio è l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ *dei numeri naturali e il cui codominio è* A*.*

Data una successione $\mathbb{N} \xrightarrow{a} A$, gli elementi $a(0), a(1), ..., a(n)$ di A vengono detti *termini* della successione. Di solito, per denotare i termini di una successione, anziché la notazione funzionale $a(n)$, si usa la scrittura a_n, nella quale n figura come indice. In genere si pensa a una successione in A come a una famiglia di elementi di A parametrizzata (o indiciata) dai numeri naturali.

Si chiama successione anche una funzione il cui dominio è costituito non da tutto $\mathbb{N}$, ma dai numeri naturali maggiori o uguali a un fissato numero naturale n_0. Ad esempio, la successione di numeri reali $a_n = \frac{1}{n}$ è definita sull'insieme dei naturali $n \geq 1$.

Esempio 1. $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$ è una successione in $\mathbb{R}$.

Esempio 2. $\mathbb{N} \xrightarrow{b} (0, 1)$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ è una successione nell'intervallo aperto $(0, 1)$. Questa successione è diversa dalla precedente - anche se, per ogni n, $a_n = b_n$ - in quanto il codominio è diverso.

Esempio 3. Nella definizione di successione, non si richiede che la funzione $\mathbb{N} \longrightarrow A$ sia iniettiva. Quindi può capitare che un termine sia ripetuto più volte, come nella successione in $\mathbb{Z}$

$$+1, -1, +1, -1, +1, -1, ...$$

definita da $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4. $P_n = \left(\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$, è una successione di punti del piano $\mathbb{R}^2$.

Esempio 5. Una successione $\mathbb{N} \xrightarrow{a} A$ si dice *costante* se esiste un elemento c in A tale che, per ogni n in $\mathbb{N}$, $a_n = c$. Per esempio, la successione $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$, per ogni n in $\mathbb{N}$, $a_n = 0$, è costante.

1.1 Limiti di successioni di numeri reali

Definizione 1.2. *Si dice che la successione di numeri reali* a_n tende al numero reale l*, (o* converge *a* l*, o* ha per limite l*) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un numero naturale* r *tale che, per ogni* n *in* $\mathbb{N}$*,*

$$n > r \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

A parole: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ significa che la distanza tra a_n e L diventa arbitrariamente piccola, pur di prendere n sufficientemente grande.

È utile introdurre questo modo di dire: i termini di una successione godono *definitivamente* di una proprietà se la possiedono a partire da un certo indice in poi. Detto altrimenti, i termini di una successione possiedono definitivamente una proprietà se a_n non soddisfa quella proprietà solo per un numero finito di indici n. Ad esempio, la successione $a_n = 10-n$ è definitivamente negativa, perché a_n è negativo da un certo indice in poi. (Ad esempio, $a_n < 0$ per tutti gli n maggiori di 11). Possiamo allora dire che una successione a_n tende a L se, per ogni $\epsilon > 0$, la distanza di a_n da L è definitivamente minore di ϵ.

Esempio. Utilizzando la definizione di limite di una successione, dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Soluzione. Fissato $\epsilon > 0$, occorre determinare per quali interi positivi n vale la disuguaglianza

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon$$

che si scrive

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < \epsilon$$

o anche, poiché $\frac{1}{n+1} > 0$,

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Quest'ultima disuguaglianza è equivalente a

$$n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Sia r un intero maggiore o uguale a $\frac{1}{\epsilon} - 1$; per esempio, sia r il più piccolo intero maggiore o uguale a $\frac{1}{\epsilon} - 1$. Allora per ogni $n > r$ vale la disuguaglianza $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon$. ∎

Una successione può divergere a $+\infty$, oppure a $-\infty$.

Definizione 1.3. *Si dice che la successione di numeri reali a_n* diverge a $+\infty$ *(o* tende a $+\infty$*) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un numero naturale r tale che

$$a_n > M$$

per ogni $n > r$.

La variante da apportare per definire le successioni divergenti a $-\infty$ è ovvia.

Definizione 1.4. *Si dice che la successione di numeri reali* a_n diverge a $-\infty$ *(o* tende *a* $-\infty$*) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

se per ogni $M < 0$ *esiste un numero naturale* r *tale che*

$$a_n < M$$

per ogni $n > r$*.*

Esempio La successione $a_n = n^2$ dei quadrati degli interi naturali, diverge a $+\infty$. Infatti, fissato $M > 0$, la disuguaglianza $n^2 > M$ è soddisfatta da tutti gli interi n maggiori di $\sqrt{M}$.

1.2 Un criterio per l'esistenza del limite di una successione in $\mathbb{R}$

Talvolta può essere importante stabilire che una successione di numeri reali ha un limite, anche se non si è in grado di dire a priori quale esso sia.

Teorema 1.5. *Sia* a_n *una successione in* $\mathbb{R}$ *non decrescente e limitata superiormente. Allora essa tende a un limite, e tale limite coincide con l'estremo superiore dell'insieme* $\{a_n\}$*.*

Anzitutto occorre ricordare la definizione di *successione non decrescente* e quella di *successione limitata superiormente*: una successione a_n si dice non decrescente se

$$\forall r, s \in \mathbb{N} \qquad r > s \Longrightarrow a_r \geq a_s$$

Una successione a_n si dice limitata superiormente se

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$$

Dimostrazione. Sia L l'estremo superiore dell'insieme $\{a_n\}$ dei termini della successione. Tale estremo superiore esiste perché per ipotesi l'insieme $\{a_n\}$ è superiormente limitato e in $\mathbb{R}$ ogni sottoinsieme superiormente limitato (non vuoto) ha estremo superiore (Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$). Sia ϵ un numero positivo arbitrario. Esiste allora un termine a_N della successione tale che

$$a_N \geq L - \epsilon$$

(Altrimenti si avrebbe: $a_n < L - \epsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; ma allora L non sarebbe più la più piccola limitazione superiore). D'altra parte, poiché la successione a_n è non decrescente, per ogni $n > N$ si ha $a_n \geq a_N$. Quindi, per ogni $n \geq N$, si ha

$$L - \epsilon \leq a_n \leq L$$

In base alla definizione di limite, questo significa che $\lim a_n = L$. ∎

1.2.1 Il numero e di Nepero

Come applicazione del precedente teorema 1.5, si consideri la successione in $\mathbb{R}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad n=1,2,....$$

Si dimostra (qui la dimostrazione non viene riportata) che tale successione è non decrescente e superiormente limitata. (Ad esempio, si dimostra che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, per ogni $n \geq 1$). Allora per il teorema 1.5, la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge a un limite, detto costante di Nepero, che si denota con la lettera e. Si pone dunque per definizione:

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si tratta di un numero irrazionale, le cui prime cifre decimali sono date da:

$$e=2.7182818....$$

1.3 Limiti della somma e del prodotto di successioni

Se due successioni convergono, allora anche la loro somma e il loro prodotto converge:

Teorema 1.6 (Il limite della somma è la somma dei limiti)**.** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni reali. Se* $\lim a_n = L_1$ *e* $\lim b_n = L_2$ *allora*

$$\lim(a_n+b_n)=L_1+L_2$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\epsilon>0$, il modulo della differenza

$$\mid(a_n+b_n)-(L_1+L_2)\mid$$

è definitivamnete minore di ϵ. Si noti che, se x,y sono due numeri reali qualunque, vale la disuguaglianza:

$$\mid x+y\mid\leq\mid x\mid+\mid y\mid$$

Allora

$$\mid(a_n+b_n)-(L_1+L_2)\mid=\mid(a_n-L_1)+(b_n-L_2)\mid\leq\mid a_n-L_1\mid+\mid b_n-L_2\mid$$

Ora sia $\epsilon>0$ arbitrario. Poiché per ipotesi la successione a_n tende a L_1, da un certo indice s in poi, si ha $\mid a_n-L_1\mid\leq\epsilon$. Similmente, da un indice t in poi, vale $\mid b_n-L_2\mid\leq\epsilon$. Ne segue che per ogni indice n maggiore del massimo tra s e t, si ha:

$$\mid(a_n+b_n)-(L_1+L_2)\mid\leq\mid a_n-L_1\mid+\mid b_n-L_2\mid\leq\epsilon+\epsilon=2\epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, questo prova che la successione a_n+b_n tende a L_1+L_2. ∎

Teorema 1.7 (Il limite del prodotto è il prodotto dei limiti)**.** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni reali. Se* $\lim a_n = L_1$ *e* $\lim b_n = L_2$ *allora*

$$\lim(a_nb_n)=L_1\,L_2$$

La dimostrazione di quest'ultimo teorema è simile alla precedente. Qui non viene riportata.

1.4 Successioni definite per ricorrenza.

Un modo per definire una successione, consiste nell'assegnare il primo termine a_0 e una regola per passare da un qualunque termine a_n al successivo a_{n+1}. In questo caso si dice che la successione è definita *per ricorrenza* (o *in modo ricorsivo*). Ad esempio, si definisce una successione a_n per ricorrenza, ponendo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2^{a_n} \end{cases}$$

I primi termini della successione sono

$$0, \quad 2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^4 = 16, \quad 2^{16}, ...$$

1.4.1 Progressioni aritmetiche.

Una *progressione aritmetica con valore iniziale* b *e ragione* h è una successione a_n di numeri definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} a_0 = b \\ a_{n+1} = a_n + h \end{cases}$$

dove b e h sono due numeri fissati. Si ha dunque:

$$a_0 = b, \quad a_1 = b + h, \quad a_2 = b + 2h, \quad a_3 = b + 3h, ...$$

Il termine generale di tale progressione aritmetica si scrive dunque come

$$a_n = b + nh \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

Si noti che i valori $a_n = b + nh$, $n \in \mathbb{N}$, sono le ordinate dei punti di ascissa intera non negativa della retta del piano di equazione $y = b + hx$.

1.4.2 Progressioni geometriche.

Una *progressione geometrica* con *valore iniziale* λ e *ragione* b, si definisce per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n b \end{cases}$$

dove λ e b sono due numeri fissati. Il termine generale di tale progressione geometrica è :

$$a_n = \lambda b^n \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

Per esempio, se $\lambda = 1$ e $b = 2$, si ha la progressione geometrica:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2^2 = 4, \quad a_3 = 2^3 = 8, ..., a_n = 2^n, ...$$

I valori $a_n = 2^n$ sono le ordinate dei punti di ascissa intera $n \geq 0$ appartenenti al grafico della funzione esponenziale $y = 2^x$.

1.5 Principio di induzione

Sia n_0 un intero non negativo e P_n una successione di proposizioni che dipendono dall'intero $n \geq n_0$, ciò significa che per ogni intero $n \geq n_0$ l'enunciato P_n assume valore di verità 'vero' oppure 'falso' (i due valori di verità sono mutuamente esclusivi). Per esempio, l'uguaglianza

$$P_n : \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è vera per ogni $n \geq 1$, mentre la disuguaglianza

$$P_n : \qquad 2^n > 2n$$

è vera per ogni $n \geq 3$. In entrambi i casi si tratta di dimostrare *infinite* uguaglianze (disuguaglianze) e l'analisi di casi particolari di P_n, ottenibili sostituendo n con qualche intero prescelto, non è certo una tecnica dimostrativa valida (i casi analizzabili in questo modo sarebbero comunque un numero finito e quelli che resterebbero ancora da verificare sarebbero ancora infiniti!). La tecnica dimostrativa usata spesso in questi casi si basa sul seguente principio

Principio di induzione.

Sia n_0 un intero non negativo e P_n $(n \geq n_0)$ una successione di proposizioni dipendenti dall'indice n. Se si dimostra che

Passo iniziale: P_0 è vera;

Passo induttivo: $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, cioè se per qualunque intero $n \geq n_0$ si dimostra che "*se P_{n-1} è vera allora P_n è vera*"

allora P_n è vera per ogni $n \geq n_0$.

A titolo d'esempio dimostriamo l'uguaglianza relativa alla somma dei primi n interi positivi citata poco sopra.

Esempio. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione.

Per $n = 1$ (passo iniziale) l'enunciato P_1 è vero, infatti $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Per dimostrare il passo induttivo si suppone vero l'enunciato P_{n-1}, cioè $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ e, servendosi di questa ipotesi, si dimostra la validità di P_n.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n &= \tfrac{n(n-1)}{2} + n && \text{(si utilizza l'ipotesi induttiva)} \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} && \text{(si esegue un conto banale.)} \end{aligned}$$

■

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Sia $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$*

$$(1-b)(1+b+b^2+b^3+\cdots+b^n) = 1-b^{n+1}$$

Esercizio 2.2. *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$*

a) $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Esercizio 2.3 (Somma dei primi n numeri dispari)**.** *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:*

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Esercizio 2.4. *Stabilire quali delle seguenti quaterne di numeri sono termini consecutivi di una progressione aritmetica o geometrica e scriverne il termine generale.*

a)	3	8	13	18
b)	5	6.4	7.8	19.2
c)	7	21	63	189
d)	2	2	2	2
e)	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{8}{3}$
f)	0.5	0.05	0.005	0.0005
g)	18	20	21	23
h)	1	4	9	16
i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
j)	4	2	1	0.5

Esercizio 2.5. *Di una progressione geometrica a_n si conoscono i termini $a_1 = 2$ e $a_4 = 54$. Trovare i termini a_2, a_3 e la ragione della progressione geometrica.*

Esercizio 2.6. *Fissato un numero reale $x \geq -1$ si dimostri la seguente disuguaglianza*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Esercizio 2.7. *Dimostrare che definitivamente (cioè, da un certo indice in poi) valgono le seguenti disuguaglianze*

a) $2^n > 2n$ *b)* $3^n > n^3$ *c)* $n! > 3^n$

Esercizio 2.8. *Si consideri il seguente sottoinsieme di numeri reali*

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n-1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\}$$

E ha estremo superiore? Ha estremo inferiore? Ha massimo? Ha minimo?

Esercizio 2.9. *Usando la definizione di limite di una successione, dimostrare che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2.10. *Per ogni numero reale $a > 1$, dimostrare che*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, *con k intero positivo qualsiasi.*

Esercizio 2.11. *Per ogni numero reale $a > 1$, dimostrare che*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Gli esercizi 2.10 e 2.11 descrivono il modo di andare all'infinito di alcune importanti successioni: *qualunque potenza n^k, ($k \in \mathbb{N}$) va all'infinito più lentamente di un qualunque esponenziale a^n ($a \in \mathbb{R}$, $a > 1$). Qualunque esponenziale va all'infinito più lentamente di $n!$ e infine $n!$ va all'infinito più lentamente di n^n.*

Esercizio 2.12. *Dimostrare che, per ogni numero reale $p > 0$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$$

Esercizio 2.13. *Dire se le seguenti successioni in $\mathbb{R}$ sono convergenti (cioè tendono a un numero finito), sono divergenti (cioè tendono a $+\infty$ o a $-\infty$), oppure non sono né convergenti né divergenti:*

a) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ *b)* $a_n = 4 + \dfrac{1}{n^2}$ *c)* $a_n = \dfrac{n+1}{n-2}$

d) $a_n = (-1)^n n^2$ *e)* $a_n = \dfrac{n^2+2n+7}{3n^2-n-11}$ *f)* $a_n = \dfrac{2n^3+n+1}{n^4-n-1}$

f) $a_n = \dfrac{n^3+3n+1}{n^2+n-3}$ *g)* $a_n = \dfrac{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{-5\sqrt{n}+\sqrt[3]{2n}}$

Esercizio 2.14. *Calcolare il limite della successione*

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

Esercizio 2.15. *Calcolare i seguenti limiti :*

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty}\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \qquad b)\quad \lim_{n\to+\infty}\binom{n}{3}\frac{1}{n^3} \qquad c)\quad \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1} \qquad d)\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n!}$$

Esercizio 2.16. *Calcolare i limiti, per $n \to +\infty$, delle seguenti successioni:*

$$a)\quad f_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad b)\quad f_n = (1+\frac{a}{n})^n,\ a \in \mathbb{R} \qquad c)\quad f_n = (1+\frac{3}{n})^{-n}$$

(*Ricordare che, per definizione,* $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$).

Esercizio 2.17. *Sia a_n una successione di numeri positivi, infinitesima, cioè soddisfacente: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Trovare una successione b_n infinitesima, tale che $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = +\infty$. Trovare una successione c_n infinitesima, tale che $\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{a_n} = 0$. (Diremo che b_n tende a zero più lentamente di a_n, mentre c_n tende a zero più velocemente di a_n.)*

Esercizio 2.18 (Unicità del limite)**.** *Dimostrare che una successione non può convergere a due limiti diversi.*

Esercizio 2.19 (Permanenza del segno)**.** *Dimostrare che se una successione a_n in $\mathbb{R}$ converge a un numero positivo, allora i termini della successione sono definitivamente positivi (cioè esiste un numero naturale n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha $a_n > 0$).*

Esercizio 2.20. *Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, motivando la risposta:*

Sia a_n una successione di numeri reali convergente al numero L. Allora

$$\forall\, r, s \in \mathbb{N} \qquad r > s \implies |\, a_r - L \,| \le |\, a_s - L \,|$$

Esercizio 2.21. *Fare delle congetture sui limiti delle seguenti successioni:*

(a) $\lim_{n\to+\infty} a^n \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} \quad (p > 0)$

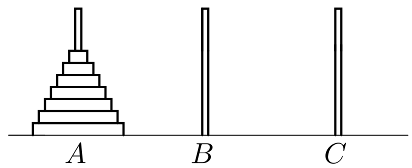
(c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Fornire un'interpretazione geometrica per i limiti di a^n e $\sqrt[n]{p}$.

2.1 La Torre di Hanoi e altri problemi

Problema 2.22 (La torre di Hanoi)**.** *Si hanno tre aste identiche A, B, C disposte perpendicolarmente rispetto ad un piano orizzontale e n dischi di diametro diverso, bucati al centro per poterli infilare sulle aste. Inizialmente gli n dischi sono stati disposti sull'asta A in modo da formare la "torre mostrata in figura.*



Determinare il numero di mosse necessarie per spostare la torre dall'asta A all'asta C sapendo che si può spostare un disco per volta senza mai collocare un disco più grande sopra uno più piccolo.

Esercizio 2.23 (Rette nel piano)**.** *Qual è il numero massimo di regioni in cui si può suddividere un piano "tagliandolo con n rette? (Qui per 'regione di piano' si intende una regione che non contiene al suo interno nessuna delle rette in questione nè parti di esse).*

Esercizio 2.24 (Sfere cariche)**.** *(G. Prodi,* Scoprire la matematica*.) Siano $\mathcal{S}_R$ e $\mathcal{S}_r$ due sfere conduttrici, rispettivamente di raggio R e r. Inizialmente, $\mathcal{S}_R$ ha una quantità di carica $Q_0 = 0$ e $\mathcal{S}_r$ ha una quantità di carica q. Le due sfere vengono messe in contatto; in questo modo, un po' della carica q passa dalla sfera $\mathcal{S}_r$ alla sfera $\mathcal{S}_R$ finché le due sfere raggiungono lo stesso potenziale (che è dato, per ciascuna sfera, dal rapporto fra la quantità di carica e il raggio). Le due sfere vengono allora staccate; la sfera di raggio r viene ricaricata in modo che la sua quantità totale di carica torni ad essere pari a q e poi è rimessa in contatto con la sfera di raggio R. Si iterano i contatti che, ogni volta, avvengono dopo aver riportato la sferetta di raggio r alla stessa quantità di carica q.*

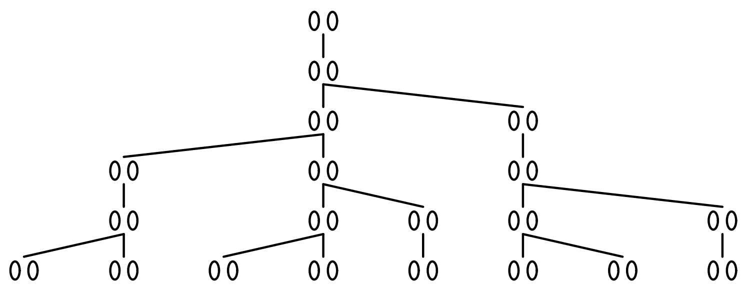
1. *Calcolare la quantità di carica Q_1 presente sulla sfera $\mathcal{S}_R$ dopo il primo contatto.*
2. *Calcolare la quantità di carica Q_n presente sulla sfera $\mathcal{S}_R$ dopo n contatti con la sfera di raggio r.*
3. *A cosa tende la quantità di carica Q_n, presente sulla sfera $\mathcal{S}_R$ dopo n contatti, quando n tende all'infinito?*
4. *Studiare il problema quando la sfera $\mathcal{S}_R$ ha una carica iniziale Q_0 non nulla.*

Esercizio 2.25 (Sistemi dinamici discreti lineari (o affini))**.** *Sia x_n la successione di numeri reali definita per ricorrenza nel modo seguente:*

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_{n+1} = ax_n + b \end{cases} \tag{2.1}$$

Trovare il termine generale della successione e studiarne il comportamento all'infinito.

Problema 2.26 (Numeri di Fibonacci)**.** [1] *Supponiamo che una coppia di conigli, a partire dall'età di due mesi, procrei ogni mese un'altra coppia. Inizialmente c'è solo una coppia di conigli appena nati. Quanti saranno i conigli dopo un anno, ammettendo che nessuno muoia?*



[1]Leonardo Fibonacci nacque a Pisa tra il dodicesimo e il tredicesimo secolo. Il suo lavoro contribuì a diffondere in occidente idee e procedimenti dell'ambiente arabo bizantino, tra cui, in particolare, la numerazione posizionale.

2.2 Suggerimenti e risposte

Esercizio 2.2 b) Dimostrazione per induzione. Per $n = 1$ (passo iniziale) l'enunciato è vero infatti, $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Supposto vero che $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (ipotesi induttiva), si ha $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2$. Con facili calcoli il secondo membro di questa uguaglianza si scrive così : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ■

Esercizio 2.6 Dimostrazione per induzione. Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$. Supposta vera la disuguaglianza per $n - 1$ e cioè, supposto vero che

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x \tag{2.2}$$

occorre dimostrare che

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{2.3}$$

Da (2.2), moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per $1 + x$ (quantità positiva o nulla) si ottiene

$$(1 + x)^{n-1}(1 + x) \geq \big(1 + (n-1)x\big)(1 + x) = 1 + nx + (n-1)x^2$$

Poichè $(n-1)x^2 \geq 0$, risulta $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. ■

Esercizio 2.10 Dimostrazione per induzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha
   $(\sqrt{a})^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$
   $a^n > n^2 x^2$
   $\dfrac{n}{a^n} < \dfrac{1}{nx^2}$
   Per n che tende a $+\infty$, $\dfrac{1}{nx^2}$ tende a zero. Quindi anche $\dfrac{n}{a^n}$ (quantità positiva o nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$) tende a zero. ■

2. Scrivere il termine generale della successione nel seguente modo

$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

   Il numero $\sqrt[k]{a}$ è maggiore di 1 perché $a > 1$,. Pertanto, per n che tende a $+\infty$, $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}$ tende a zero. Ricordando che il limite del prodotto di più successioni è il prodotto dei limiti di tali successioni si ha la tesi. ■

Esercizio 2.12

1^0 CASO: $p > 1$. Posto $\sqrt[n]{p} = 1 + x_n$, $(x_n > 0)$, occorre stimare la quantità x_n, per n che tende a $+\infty$. Si ha

$$p = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$$

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}$$

Per n che tende a $+\infty$, $\frac{p-1}{n} \to 0$ e quindi $x_n \to 0$

2^0 CASO: $0 < p < 1$. Posto $\sqrt[n]{p} = \dfrac{1}{1 + x_n}$, $(x_n > 0)$ si ha

$$p = \frac{1}{(1 + x_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nx_n}$$

Dall'ultima disuguaglianza si ricava

$$0 < x_n \leq \frac{1-p}{np}$$

Per n che tende a $+\infty$, $\frac{1-p}{np} \to 0$ e quindi $x_n \to 0$ ■

Esercizio 2.14 Moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Esercizio 2.16 a) e^{-1}. b) e^{a}. c) e^{-3}.

Esercizio 2.21 (a) Se $a > 1$ allora $a^n \longrightarrow +\infty$, se $0 < a < 1$ allora $a^n \longrightarrow 0$. (b) $\sqrt[n]{p} \longrightarrow 1$. (c) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$. (d) Se $a > 1$ allora $\frac{n}{a^n} \longrightarrow 0$, se $0 < a < 1$ allora $\frac{n}{a^n} \longrightarrow +\infty$.

Esercizio 2.17 Sia, per esempio, $b_n = \sqrt{a_n}$ e $c_n = {a_n}^2$.

Esercizio 2.22 [La torre di Hanoi.] *Suggerimenti e qualche domanda.*

1. Indicare con T_n il numero di mosse necessarie per risolvere il problema con n dischi. Risolvere i casi semplici, corrispondenti a $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ecc. Costruire una tabella indicando nella prima colonna il numero di dischi e nella seconda colonna il numero di mosse necessarie per risolvere il problema.

2. Dedurre dai dati riportati nella precedente tabella la formula ricorsiva $T_n = 2T_{n-1} + 1$ e darne una spiegazione convincente.

3. Dimostrare l'uguaglianza seguente

$$T_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots \cdots + 2 + 1.$$

4. La formula “formula chiusa che risolva il problema è

$$T_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$$

Spiegare.

5. Supposto che ogni singola mossa sia eseguita in 0.1 *sec*, stabilire il tempo necessario per risolvere il problema con 64 dischi. Se un computer esegue 1.000.000 di operazioni al secondo, quanto tempo impiegherà per risolvere il medesimo problema?

Esercizio 2.23 [Rette nel piano] Sia R_n il numero massimo di regioni in cui n rette suddividono il piano. Per $n = 0, 1, 2$ si la seguente situazione: $R_0 = 0$ (nel caso di *zero* rette si ha l'intero piano), $R_1 = 2$ (*una* retta divide il piano in due regioni), $R_2 = 4$ (*due* rette dividono il piano in quattro regioni). Ora, che cosa succede se alle due rette già tracciate ne aggiungiamo un'altra?

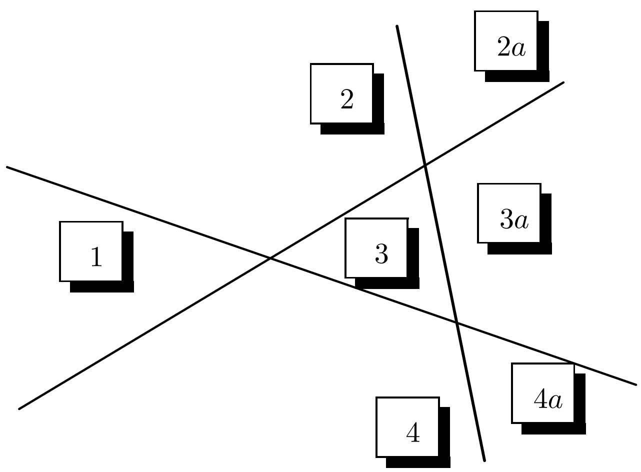


Figura 1. Tre rette suddividono il piano in sette regioni.

Con riferimento alla figura la terza retta (evidenziata in grassetto) ha *due* intersezioni con le precedenti rette e attraversa *tre* diverse regioni di piano, suddividendo ognuna di esse in due parti. Più in generale, la n-esima retta ha $n - 1$ intersezioni con le precedenti rette e attraversa n regioni di piano suddividendo ognuna di esse in due parti. Quindi, passando da $n - 1$ a n rette, le regioni di piano aumentano di n, cioè

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Pertanto la soluzione del problema è è esprimibile mediante la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} R_0 = 0 \\ R_n = R_{n-1} + n \end{cases}$$

La “formula chiusa che esprime la successione appena definita è

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

.

da cui si ricava

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

■

Esercizio 2.24 [Sfere cariche.]

1) Siano Q_1 e q_1 le cariche sulle due sfere di raggio R e r al termine del primo contatto. Si deve avere $Q_1 + q_1 = q$ (conservazione della quantità totale di carica) e $\dfrac{Q_1}{R} = \dfrac{q_1}{r}$ (i due potenziali devono essere uguali). Di qui si ricava $Q_1 = \frac{R}{R+r} q$

2) Se Q_n e q_n indicano le cariche sulle due sfere di raggio R e r al termine del n-esimo contatto si ha, per il principio conservazione della quantità totale di carica

$$Q_n + q_n = q + Q_{n-1} \tag{2.4}$$

inoltre, dovendo essere uguali i potenziali sulle due sfere, deve essere

$$\frac{Q_n}{R} = \frac{q + Q_{n-1} - Q_n}{r} \tag{2.5}$$

Esplicitando l’uguaglianza (2.5) rispetto a Q_n, e posto $Q_0 = 0$ si ottiene la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} Q_0 = 0 \\ Q_n = \frac{R}{R+r} Q_{n-1} + \frac{R}{R+r} q \end{cases} .$$

3) Bisogna trovare una formula chiusa che esprima la quantità di carica Q_n presente sulla sfera di raggio R dopo n contatti. I primi termini della successione Q_n sono:

$$Q_0 = 0$$

$$Q_1 = \tfrac{R}{R+r} q$$

$$Q_2 = (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r} q$$

$$Q_3 = (\tfrac{R}{R+r})^3 q + (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r} q$$

......

......

$$Q_n = (\tfrac{R}{R+r})^n q + (\tfrac{R}{R+r})^{n-1} q + \cdots + (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r} q$$

Si può scrivere il termine generale Q_n nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{Rq}{R+r}\Big((\frac{R}{R+r})^{n-1} + (\frac{R}{R+r})^{n-2} + \cdots + (\frac{R}{R+r}) + 1\Big) \\ &= \frac{Rq}{R+r}\,\frac{1-\left(\frac{R}{R+r}\right)^n}{1-\frac{R}{R+r}} \\ &= \frac{Rq}{r}\Big(1-(\frac{R}{R+r})^n\Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Per n che tende a $+\infty$, la quantità $(\frac{R}{R+r})^n$ tende a zero, perchè $(\frac{R}{R+r}) < 1$. Quindi, Q_n tende a $\dfrac{Rq}{r}$.

4) Si supponga che inizialmente sulla sfera di raggio R sia presente una carica $Q_0 = \lambda$, $\lambda \neq 0$. Allora la successione per ricorrenza, soluzione del problema è

$$\begin{cases} Q_0 = \lambda \\ Q_n = \frac{R}{R+r}Q_{n-1} + \frac{R}{R+r}q \end{cases} .$$

I primi termini della successione sono:

$$\begin{aligned} &Q_0 = \lambda \\ &Q_1 = \tfrac{R}{R+r}\lambda + \tfrac{R}{R+r}q \\ &Q_2 = (\tfrac{R}{R+r})^2\lambda + (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r}q \\ &Q_3 = (\tfrac{R}{R+r})^3\lambda + (\tfrac{R}{R+r})^3 q + (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r}q \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &Q_n = (\tfrac{R}{R+r})^n\lambda + (\tfrac{R}{R+r})^n q + (\tfrac{R}{R+r})^{n-1} q + \cdots + (\tfrac{R}{R+r})^2 q + \tfrac{R}{R+r}q \end{aligned}$$

Il termine generale Q_n si può scrivere nel seguente modo

$$\begin{aligned} Q_n &= (\frac{R}{R+r})^n\lambda + \frac{Rq}{R+r}\Big((\frac{R}{R+r})^{n-1} + (\frac{R}{R+r})^{n-2} + \cdots + (\frac{R}{R+r}) + 1\Big) \\ &= (\frac{R}{R+r})^n\lambda + \frac{Rq}{R+r}\,\frac{1-\left(\frac{R}{R+r}\right)^n}{1-\frac{R}{R+r}} \\ &= (\frac{R}{R+r})^n\Big(\lambda - \frac{Rq}{r}\Big) + \frac{Rq}{r} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pertanto, qualunque sia la carica iniziale Q_0, per n che tende all'infinito, la quantità di carica Q_n tende ancora a $\dfrac{Rq}{r}$. ■

Esercizio 2.25 [Sistemi dinamici lineari (o affini)] Questo esercizio è la generalizzazione di quello precedente (Es. 2.24). Se $a = 1$, i termini della successione sono

$$\lambda, \ \ \lambda + b, \ \ \lambda + 2b, \ \ \lambda + 3b, \ \ \cdots\cdots \lambda + nb, \ \ \cdots\cdots$$

Il termine generale è

$$x_n = \lambda + nb$$

per $n = 0, 1, 2, ...$ Si tratta di una *progressione aritmetica*. Questo è il nome che si dà alle successioni nelle quali è costante la differenza fra ogni termine - a partire dal secondo - e il precedente. Naturalmente si avrà

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

a seconda che sia $b > 0$ oppure $b < 0$ rispettivamente. Se poi $b = 0$, allora la successione è costante, uguale a λ, e quindi converge a λ.

Il caso $a \neq 1$ è più interessante. Vediamo i primi termini:

$$\begin{aligned}
&x_0 = \lambda \\
&x_1 = a\lambda + b \\
&x_2 = a^2\lambda + ab + b \\
&x_3 = a^3\lambda + a^2b + ab + b \\
&\text{.........} \\
&x_n = a^n\lambda + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots\cdots ab + b
\end{aligned}$$

Possiamo scrivere il termine generale x_n nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
x_n &= a^n\lambda + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots\cdots ab + b \\
&= a^n\lambda + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots\cdots a + 1) \\
&= a^n\lambda + b\frac{1-a^n}{1-a} \\
&= a^n\lambda + \frac{b}{1-a} - b\frac{a^n}{1-a} \\
&= a^n(\lambda - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dall'espressione del termine generale

$$x_n = a^n(\lambda - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a} \tag{2.9}$$

leggiamo il comportamento seguente.

1) Se $|a| < 1$, il termine a^n tende a zero, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a}$$

Si noti che nel caso $|a| < 1$, la successione x_n tende sempre a $\dfrac{b}{1-a}$, qualunque sia la condizione iniziale $x_0 = \lambda$. L'interpretazione geometrica del termine $\dfrac{b}{1-a}$ è interessante: si tratta dell'intersezione della retta $y = ax + b$ con la bisettrice $y = x$, ossia è il punto fisso della funzione $y = ax + b$. Qualunque sia il valore iniziale $x_0 = \lambda$, la successsione x_n tende a tale valore limite $\dfrac{b}{1-a}$ (si veda la figura 2, pag.8). In particolare, se il valore iniziale è proprio $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$, allora la successione x_n resta costante, e vale sempre $\dfrac{b}{1-a}$.

2) Supponiamo $a > 1$. Se $\lambda > \dfrac{b}{1-a}$, la successione x_n diverge a $+\infty$. Se $\lambda < \dfrac{b}{1-a}$, la successione x_n diverge a $-\infty$ (si veda la figura 3, pag.8). Se $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$, la successione è costante e vale $\dfrac{b}{1-a}$.

3) Infine se $a < -1$, la successione 2.9 non converge e non diverge, ma ha un andamento oscillante, tendendo a ∞ in valore assoluto (vedere figura 4, pag.8).