Mauro Saita

Grafici qualitativi di funzioni reali di variabile reale

Per commenti o segnalazioni di errori scrivere, per favore, a:

maurosaita@tiscalinet.it

Ottobre 2017[1]

Indice

1 Qual è il grafico della funzione? 2

1.1 Dominio massimale . . . 3

1.2 Simmetrie . . . 3

1.3 Zeri e segno della funzione . . . 4

1.4 Limiti agli estremi del dominio e asintoti . . . 4

1.5 Massimi e minimi . . . 6

1.6 Concavità, convessità e flessi . . . 8

1.7 Esercizi . . . 9

1.8 Soluzioni di alcuni degli esercizi proposti . . . 10

[1] File: "Studio_di_funzione.tex"

1 Qual è il grafico della funzione?

In questa sezione si riportano sinteticamente i passi[2] che bisogna compiere per riuscire tracciare il grafico qualitativo della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dove D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. In molti casi, a seconda del problema specifico che si deve affrontare, non è necessario prendere in esame *tutti* i passi elencati in queste note. Per esempio, capita frequentemente che lo studio della convessità e della concavità di f richieda conti onerosi; in questi casi conviene omettere lo studio della derivata seconda e accontentarsi di argomentazioni di carattere più generale che, sebbene non consentano di individuare esattamente eventuali punti di flesso, ne garantiscono l'esistenza. Situazione analoga vale per lo studio del segno di f. Quando non espressamente richiesto, sta allo studente fare delle scelte, avendo presente che l'obiettivo finale è quello di tracciare il grafico qualitativo della funzione assegnata.

Richiami di alcune definizioni fondamentali.

Definizione 1.1 (Funzione)**.** *Una* funzione f (detta anche *applicazione* o *mappa*) nella categoria degli insiemi consiste in:

1. un insieme D, detto *dominio* della funzione;
2. un insieme C, detto *codominio* della funzione;
3. una regola f che assegna ad *ogni* elemento x in D *uno e un solo* elemento y in C.

L'elemento y, indicato nel punto 3. della definizione, si chiama *immagine* di x tramite f e si denota $f(x)$. Per indicare la funzione f di dominio D e codominio C si scrive $D \xrightarrow{f} C$. Nel caso di funzioni reali di variabile reale D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e C coincide spesso (ma non sempre) con l'asse reale $\mathbb{R}$.

Definizione 1.2 (Grafico)**.** *Si chiama* grafico della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ per ogni } x \in D\ \}$$

Definizione 1.3 (Funzione strettamente crescente)**.** *Una funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* strettamente crescente *se vale la seguente proprietà:*

$$\textit{per ogni } x_1, x_2 \in D, \textit{ se } x_1 < x_2 \textit{ allora } f(x_1) < f(x_2)$$

Definizione 1.4 (Funzione strettamente decrescente)**.** *Una funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* strettamente decrescente *se vale la seguente proprietà:*

$$\textit{per ogni } x_1, x_2 \in D, \textit{ se } x_1 < x_2 \textit{ allora } f(x_1) > f(x_2)$$

[2] Di solito l'insieme di procedimenti che consentono di determinare il grafico qualitativo di una funzione reale di variabile reale prende il nome di "studio di funzione".

1.1 Dominio massimale

In questo contesto si considerano funzioni reali di variabile reale, cioè funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Tuttavia, a seconda di quale sia l'espressione analitica che definisce f, non è sempre possibile assegnare come dominio della funzione l'intero asse reale. Con la frase "determinare il dominio della funzione" si intende: "*trovare il più grande sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *che può essere scelto come dominio per la legge* $y = f(x)$ *che definisce* f". Tale dominio si chiama *dominio massimale di* f.

Le *restrizioni*, o *condizioni di esistenza*, più comuni che bisogna imporre alla variabile indipendente sono riassunte nella seguente tabella

Funzioni	Condizione di esistenza
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$y = \sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log f(x)$	$f(x) > 0$

1.2 Simmetrie

Definizione 1.5.

1. *Una funzione* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *(*$D \subseteq \mathbb{R}$*) si dice* pari *se per ogni* $x \in D$, $f(x) = f(-x)$.

2. *Una* funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ si dice *dispari* se per ogni $x \in D$, si ha: $f(x) = -f(-x)$.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento. Questo fatto semplifica notevolmente lo studio di funzione. (Perché?)

Come fare per scoprire se una certa funzione è pari o dispari?

Le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = 3x^2 + 5$, $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$, $f(x) = \cos x$ sono pari (Esercizio). Tutte le funzioni polinomiali in cui compaiono esclusivamente esponenti pari sono funzioni pari (Esercizio). Le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x^3 + x$, $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 2x$, $f(x) = \sin x$ sono dispari (Esercizio). Tutte le funzioni polinomiali in cui compaiono esclusivamente esponenti dispari sono funzioni dispari (Esercizio).

Inoltre, se si conoscono le simmetrie di due funzioni f e g si può ricavare la simmetria di $h = fg$ (attenzione, $h = fg$ indica il prodotto di funzioni e non la loro composizione!). Basta seguire la seguente tabella

$h = fg$	f *pari*	f *dispari*
g *pari*	fg pari	fg dispari
g *dispari*	fg dispari	fg pari

Esempio. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, $h(x) = x\cos x$ è dispari, perchè prodotto della funzione dispari $f(x) = x$ e della funzione pari $g(x) = \cos x$.

Esempio. La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ $h(x) = \dfrac{-\sqrt{2}x^4 - x^2}{x^2+1}$ è pari, perchè prodotto della funzione pari $f(x) = -\sqrt{2}\,x^4 - x^2$ e della funzione pari $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Si osservi infine che se il dominio di f non è simmetrico rispetto all'origine la funzione non è nè pari nè dispari.

1.3 Zeri e segno della funzione

Per trovare gli zeri di f occorre risolvere l'equazione

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

in D. Le soluzioni di (1.1) forniscono le intersezioni del grafico di f con l'asse delle ascisse. Se non si riesce a risolvere l'equazione (1.1) si può provare a utilizzare il teorema degli zeri: si tratta di scegliere un intervallo $[a, b] \subset D$, verificare la continuità di f in $[a, b]$ e controllare che $f(a)f(b) < 0$, in questo caso il teorema degli zeri assicura l'esistenza di almeno uno zero in $[a, b]$. Per trovare un'approssimazione adeguata dello zero in questione si può utilizzare il metodo di bisezione.

Infine, se $0 \in D$, l'intersezione del grafico di $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ con l'asse y è $(0, f(0))$

Studiare il segno di $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ significa determinare gli intervalli di positività e di negatività della funzione. Bisogna trovare le soluzioni della disequazione

$$f(x) > 0 \tag{1.2}$$

in $x \in D$. Negli intervalli che sono soluzione di (1.2) il grafico di f sta *sopra* l'asse delle ascisse.

1.4 Limiti agli estremi del dominio e asintoti

Si devono trovare i limiti, se esistono, della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ alla *frontiera* del dominio. Per esempio, se $D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ bisogna calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Come fare per determinare gli asintoti della funzione?

1. `Asintoti orizzontali.` Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$ con L valore finito, allora la retta di equazione

$$y = L$$

è un *asintoto orizzontale* di f in un intorno di $+\infty$ $(-\infty)$. La funzione non ha altri asintoti orizzontali oltre a questi.

2. `Asintoti verticali.` Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ allora la retta di equazione

$$x = x_0$$

è *asintoto verticale* di f.

3. `Asintoti obliqui.` La ricerca di eventuali asintoti obliqui è più complicata; qui si espone il caso per $x \to +\infty$ (per $x \to -\infty$ valgono considerazioni analoghe). Anzitutto si ricordi che la retta di equazione $y = mx+q$ è *asintoto obliquo* della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) = 0$$

Se succede che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ allora la funzione *potrebbe* avere asintoto obliquo; per scoprire se l'asintoto esiste veramente si devono calcolare i due limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q,$$

Se m e q sono valori finiti allora la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f. In tutti gli altri casi l'asintoto non esiste.

Il caso di funzioni razionali.

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{A_n(x)}{B_k(x)}$$

dove $A_n(x)$ e $B_k(x)$ sono polinomi nella variabile x, di grado rispettivamente n e k. Allora la funzione f ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ se e solo se il grado del polinomio al numeratore supera di 1 il grado del polinomio a denominatore, ovvero se (e solo se) $k = n - 1$.

In questo caso ($k = n-1$), per trovare l'equazione dell'asintoto si può procedere così: si esegue la divisione di $A_n(x)$ per $B_k(x)$ in modo da ottenere il quoziente $Q(x) = mx+q$ e il resto $R(x)$ (il grado di $R(x)$ è al più $n-2$). Si ottiene: $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B_k(x)}$, ossia

$$f(x) = mx + q + \frac{R(x)}{B_k(x)}$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = mx + q$.

Esempio. Si vuole trovare l'asintoto obliquo (che certamente esiste) della funzione

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

Eseguendo la divisione di $2x^3 + x^2 + x + 1$ per $x^2 - 1$ si ottiene quoziente $Q(x) = 2x+1$ e resto $R(x) = 3x + 2$. Quindi la funzione $f(x)$ si può scrivere così

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - 1}$$

L'equazione dell'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, è

$$y = 2x + 1$$

1.5 Massimi e minimi

Si supponga che una funzione reale sia definita su un intervallo $D = [a, b]$

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad y = f(x)$$

Allora i suoi eventuali punti di massimo e di minimo locale vanno ricercati tra:

1. i punti interni all'intervallo, in cui la funzione è derivabile con derivata nulla (punti stazionari interni);
2. i punti in cui la funzione non è derivabile;
3. gli estremi a e b.

Per quanto riguarda il punto 1. si può procedere così: anzitutto si calcola la derivata prima $y' = f'(x)$ e si determina il suo dominio, diciamo $D' \subseteq [a, b]$; poi si ricercano le soluzioni della disequazione

$$f'(x) \geq 0$$

in D'. Infine si trovano gli intervalli di monotonia della funzione servendosi della seguente tabella:

Derivata prima	Funzione	
$f'(x) > 0$	f strettamente crescente	$\nearrow$
$f'(x) < 0$	f strettamente decrescente	$\searrow$
$f'(x) = 0$	Nel punto di ascissa x il grafico di f ha tangente orizzontale	

Per esempio si supponga che il punto $x_0 \in (a, b)$ sia un punto stazionario per f, cioè $f'(x_0) = 0$ e che la funzione reale sia derivabile in un intorno $I(x_0)$ del punto x_0. Allora, dai teoremi sulle funzioni con derivata positiva o negativa, segue che:

(a) se $f'(x)$ è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0, x_0 è un *punto di minimo locale* per f;

(b) se $f'(x)$ è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra di x_0, x_0 è un *punto di massimo locale* per f.

Infine i punti di non derivabilità e gli estremi a e b del dominio (punti 2. e 3.) devono essere analizzati separatamente, un caso alla volta.

——— ——— ———

Qui sotto si elencano le principali regole di derivazione, utili se si vuole trovare l'espressione analitica della derivata prima.

Regole di derivazione.

Derivata della somma (differenza) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Derivata del prodotto $fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivata del quoziente $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ dove $g(x) \neq 0$

Derivata della funzione composta $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$

Le più frequenti applicazioni della regola di derivazione della funzione composta sono

Funzione	Derivata prima
$y = [f(x)]^\alpha \;\; (\alpha \in \mathbb{R})$	$y' = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$y = a^{f(x)} \;\; (a \in \mathbb{R},\, a > 0,\, a \neq 1)$	$y' = \ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \log_a f(x) \;\; (a \in \mathbb{R},\, a > 0,\, a \neq 1)$	$y' = \log_a e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$

1.6 Concavità, convessità e flessi

Per determinare gli intervalli di convessità e di concavità della funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ bisogna determinare la derivata seconda f'' usando le note regole di derivazione e poi studiarne il segno Gli intervalli della retta reale che sono soluzione della disequazione

$$f''(x) \geq 0$$

forniscono gli intervalli in cui f è convessa.

Derivata seconda	Funzione	
$f''(x) \geq 0$	f è *convessa*	$\bigcup$
$f''(x) < 0$	f è *concava*	$\bigcap$

Sia f una funzione derivabile due volte in un intorno $I(x_0)$ e sia $f''(x_0) = 0$. Se, per esempio, $f''(x)$ è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0, x_0 è un *punto di flesso* per f.

1.7 Esercizi

Esercizio 1.6. *Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni*

Funzioni razionali fratte

1. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+4x-1}{x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-2x}$

Funzioni irrazionali

1. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

1. $f(x) = x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$
2. $f(x) = x \ln x$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$

Funzioni trigonometriche

1. $f(x) = x\cos x - \sin x$

1.8 Soluzioni di alcuni degli esercizi proposti

Esercizio $\left[f(x) = \frac{x+1}{e^x}\right]$.

Dominio di f: $(-\infty, +\infty)$.

Intersezione del grafico di f con l'asse y: $(0, 1)$.

Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(-1, 0)$.

Segno di f: $f(x) > 0$ per $x > -1$.

Limiti alla frontiera del dominio di f: $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.

Derivata prima: $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$.

Dominio di f': $(-\infty, +\infty)$.

Segno di f': $f'(x) > 0$ per $x < 0$.

Massimi e minimi locali: $(0, 1)$ massimo locale.

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{(x-1)}{e^x}$.

Punti di flesso: $(1, \frac{2}{e})$.

Esercizio $\left[f(x) = \frac{x+1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}\right]$.

Dominio di f: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(-1, 0)$

Segno di f: $f(x) > 0$ per $x > -1$.

Limiti agli estremi del dominio di f: $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4} e^{-\frac{2}{x}}$.

Dominio di f': $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Segno di f': $f'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < +\sqrt{2}$.

Massimi e minimi locali: f ha un minimo locale in corrispondenza di $x = -\sqrt{2}$, un massimo locale in corrispondenza di $x = +\sqrt{2}$.

Derivata seconda: $f''(x) = 2\frac{(x^3 - x^2 - 4x + 2)}{x^6} e^{-\frac{2}{x}}$.

Punti di flesso: l'equazione $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$ ha tre radici reali (per convincersene tracciare il grafico di $y = x^3 - x^2 - 4x + 2$), di conseguenza f ha tre punti di flesso.

Esercizio $\left[f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}\right]$

Dominio di f: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intersezione del grafico di f con l'asse x: $(1, 0)$

Segno di f: $f(x) \geq 0$ per $x > 0$.

Limiti agli estremi del dominio di f: $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{3-x}{3x^2\sqrt[3]{x-1}}$.

Dominio di f': $(-\infty, 0) \cup (0, +1) \cup (+1, +\infty)$.

Segno di f': $f'(x) > 0$ per $1 < x < 3$.

Massimi e minimi locali: f ha un minimo locale in $(1, 0)$ e un massimo locale in $(3, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$.

Analisi dei punti di non derivabilità : f non è derivabile in $x = 1$; si ha $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$. Quindi nel punto $(1, 0)$ la funzione presenta una cuspide.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{2(2x^2 - 12x + 9)}{9x^3\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Punti di flesso: la funzione presenta due punti di flesso in corrispondenza di $x = \frac{6-\sqrt{18}}{2}$ e di $x = \frac{6+\sqrt{18}}{2}$.