Limiti di funzioni

Mauro Saita

e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Ottobre 2015

Indice

[1]

[1] Nome file: "Limiti_2015.tex"

1 Limiti

1.1 Definizione di limite

Definizione 1.1 (Limite finito, in termini di intorni). *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$, *e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D. *Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ *di* L *esiste un intorno* $I(x_0, \delta)$ *di* x_0 *che soddisfa questa condizione:*

$$\forall x \quad x \in I(x_0, \delta),\ x \in D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I(L, \varepsilon) \tag{1.2}$$

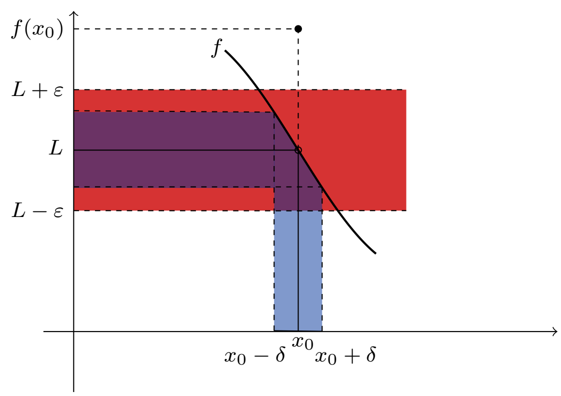


Figura 1: Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$: *per ogni* intorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ di L è possibile trovare un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in modo tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *con*$x \neq x_0$ succede che $f(x)$ sta in $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Osservazioni.

a) Non si richiede che x_0 apppartenga al dominio D della funzione f: il punto x_0 può appartenere al dominio di f, oppure no. L'unica cosa che si richiede è che x_0 sia punto di accumulazione di D, cioè che ogni intorno di x_0 contenga infiniti punti di D.

b) Qualora x_0 appartenga al dominio di f, l'eventuale esistenza del limite e il suo valore (ammesso che il limite esista), sono del tutto indipendenti dal valore $f(x_0)$. Infatti, nella definizione di limite, il valore $f(x_0)$ non compare affatto.

   Per esempio le funzioni $\mathbb{R} \xrightarrow{f_k} \mathbb{R}$, $\quad f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ k, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ tendono a 1, per x che tende a x_0, qualunque sia il valore k.

c) La definizione di limite non è costruttiva, nel senso che non consente di determinare mediante procedure predefinite il valore del limite, qualora esista. Essa permette solamente di verificare se un certo numero L è oppure no il limite di f, per x che tende a x_0.

d) Vale il seguente fatto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) - L = 0 \tag{1.3}$$

per convincersene basta scrivere la definizione di limite nel caso $\lim_{x \to x_0} f(x) - L = 0$ e osservare che è identica a quella della definizione (1.1).

e) I limiti non sempre esistono. Per esempio la funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ non ha limite, per $x \to +\infty$.

La 'funzione di Dirichlet' $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ non ha limite, per $x \to x_0$, qualunque sia x_0.

Se si ricorda la definizione di intorno, si vede subito che la condizione $x \neq x_0$ e $x \in I(x_0; \delta)$ equivale a: $0 < |x - x_0| < \delta$. Analogamente, la condizione $f(x) \in I(L; \varepsilon)$ equivale a: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Quindi, la definizione di limite si può riscrivere nel modo seguente.

Definizione 1.2 (Limite finito, $\varepsilon - \delta$ definizione)**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Le definizioni di limite destro (o da destra) e di limite sinistro (o da sinistra) sono del tutto simili:

Definizione 1.3 (Limite destro)**.** *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.7}$$

Il limite da sinistra si definisce nello stesso modo: basterà richiedere che per tutti gli $x \in D$, soddisfacenti $x_0 - \delta < x < x_0$, si abbia $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esempio. Valgono i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; $\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

Osservazione Segue subito dalle definizioni che vale $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e solo se, il limite sinistro e il limite destro esistono, e sono entrambi uguali a L:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{1.8}$$

Definizione 1.4 (Limite $+\infty$ (o $-\infty$)). *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \tag{1.9}$$

se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > K \qquad (\textit{rispettivamente, } f(x) < K) \tag{1.10}$$

Definizione 1.5 (Limiti a $+\infty$ (oppure a $-\infty$)). *Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$ non limitato superiormente (rispettivamente: non limitato inferiormente). Si dice che*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\right) \tag{1.11}$$

se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste un $s > 0$ tale che, per ogni $x \in D$,

$$x > s \;\; (\textit{rispettivamente, } x < s) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > K \tag{1.12}$$

In modo analogo, diremo che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \qquad \left(\lim_{x\to -\infty} f(x) = L\right) \tag{1.13}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in D$, con $x > r$ (rispettivamente, $x < r$), si abbia $|f(x) - L| < \varepsilon$.

In modo del tutto analogo (con ovvie modifiche), si definiscono altri tipi di limiti, come

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \tag{1.14}$$

eccetera. Se si conviene di chiamare *intorni di* $+\infty$ le semirette del tipo $(a, +\infty)$, e *intorni di* $-\infty$ le semirette del tipo $(-\infty, b)$, si può spiegare in modo più semplice cosa significhi che valga un certo limite. Ad esempio,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \tag{1.15}$$

significherà : per ogni intorno $W = (K, +\infty)$ di $+\infty$ esiste un intorno $U = (-\infty, b)$ di $-\infty$ tali che per ogni x nel dominio di f, con x in U, si abbia $f(x)$ in W.

1.2 Alcuni teoremi sui limiti

1.2.1 Teorema del confronto

Teorema 1.6 (del confronto)**.** *Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni definite su uno stesso dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione di D.*

Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{1.16}$$

per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato[2] *di x_0, e se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \tag{1.17}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \tag{1.18}$$

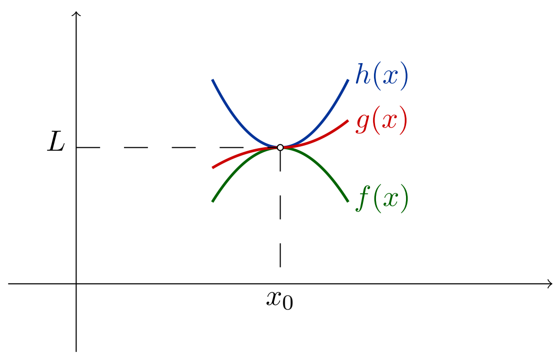


Figura 2: Il teorema del confronto è chiamato anche "teorema dei due carabinieri".

Dimostrazione. Si fissi un intorno $I(L;\varepsilon)$ di L, di raggio arbitrario $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, vale quindi la seguente condizione:

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_1) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I(L;\varepsilon) \tag{1.19}$$

Ancora per ipotesi $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \quad x \in I(x_0, \delta_2) \cap D,\ x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad h(x) \in I(L;\varepsilon) \tag{1.20}$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Per ogni x nell'intorno $I(x_0, \delta) = I(x_0, \delta_1) \cap I(x_0, \delta_2)$ valgono entrambe le condizioni, cioè i valori $f(x)$ e $h(x)$ appartengono entrambi a $I(L;\varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Poichè vale sempre $f \leq g \leq h$, anche per ogni $x \in I(x_0, \delta)$ risulta

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

[2] Per *intorno bucato* di x_0 si intende un intorno $I(x_0; r)$ di x_0, privato del punto x_0.

e quindi anche $g(x)$ cade nell'intorno $I(L;\varepsilon)$. Ciò dimostra (si ricordi la definizione di limite) che $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. ∎

Osservazioni.

1. Un'importante applicazione del teorema del confronto è la seguente:

   Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e la funzione $g(x)$ è limitata vicino a x_0, allora

   $$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0 \tag{1.21}$$

   Infatti: affermare che $g(x)$ è limitata vicino a x_0, equivale a dire che esiste una costante $K \in \mathbb{R}$ per la quale $|g(x)| < K$, per ogni x in un opportuno intorno I di x_0. Allora, per ogni $x \in I$, risulta

   $$0 \le |f(x)g(x)| \le |f(x)|\,|g(x)| \le |f(x)|\,K \tag{1.22}$$

   Poichè $|f(x)|\,K \to 0$, per $x \to x_0$, per il teorema del confronto anche $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

   Quindi, *il prodotto di una funzione infinitesima (per x che tende a x_0) per una funzione che si mantiene limitata in un intorno di x_0 è una funzione infinitesima.*

   Esempio. Si ha:

   $$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \tag{1.23}$$

   Infatti $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$ e quindi

   $$0 \le \left| x \sin\frac{1}{x} \right| \le |x| .1 = |x| \tag{1.24}$$

   Applicando il teorema del confronto, si ha la tesi.

2. Nel teorema del confronto, L designa un numero reale (i limiti sono finiti). Nel caso in cui $L = \pm\infty$ si può riformulare il teorema nel seguente modo

   Teorema 1.7. *Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite su uno stesso dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione di D.*

   (a) *Se $f(x) \ge g(x)$ per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato di x_0, e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*

   (b) *Se $f(x) \le g(x)$ per ogni x (appartenenete a D) in un intorno bucato di x_0, e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*

   In altri termini *la maggiorante di una funzione divergente a $+\infty$ diverge a $+\infty$* e *la minorante di una funzione divergente a $-\infty$ diverge a $-\infty$.*

   La dimostrazione è lasciata per esercizio.

1.2.2 Teorema di permanenza del segno

Come al solito, si supponga che f sia una funzione reale con dominio $D \subset \mathbb{R}$, e che x_0 sia un punto di accumulazione di D. Il teorema seguente è molto semplice, ma può essere utile.

Teorema 1.8 (Permanenza del segno)**.** *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$*, allora esiste un intorno* $I = I(x_0; \delta)$ *tale che per ogni* $x \in I$ *(con* $x \neq x_0$ *e* $x \in D$*),* $f(x)$ *ha lo stesso segno del limite* L*.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, si supponga $L > 0$. Se ε è sufficientemente piccolo (per esempio, minore di $L/2$), l'intorno $I(L; \varepsilon)$ non contiene lo 0, e quindi è costituito interamente da numeri positivi. Fissato un tale ε, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in D$ soddisfacente $0 < |x - x_0| < \delta$, risulta $f(x) \in I(L; \varepsilon)$:

$$0 < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Dunque, per ogni x nell'intorno $I(x_0; \delta)$, $f(x)$ si mantiene maggiore di zero. ∎

1.2.3 Teorema sulla somma, prodotto e quoziente di limiti

Teorema 1.9 (Somma, prodotto e quoziente di limiti)**.** *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \tag{1.25}$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$
3. *Se* $L_2 \neq 0$*, allora* $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2$

Dimostrazione. A titolo d'esempio, si riporta la dimostrazione della prima uguaglianza, sul limite della somma. Si fissi un $\varepsilon > 0$. Poichè $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, esiste un δ_1 tale che per ogni x che soddisfi $0 < |x - x_0| < \delta_1$, risulta $|f(x) - L_1| < \varepsilon$. Analogamente, poichè $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$,esiste un un δ_2 tale che per ogni x, con $0 < |x - x_0| < \delta_2$, risulta $|g(x) - L_2| < \varepsilon$. Se si prende δ uguale al più piccolo di δ_1 e δ_2, per $0 < |x - x_0| < \delta$ si avrà sia $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ sia $|g(x) - L_2| < \varepsilon$. Quindi si ottiene

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < 2\varepsilon$$

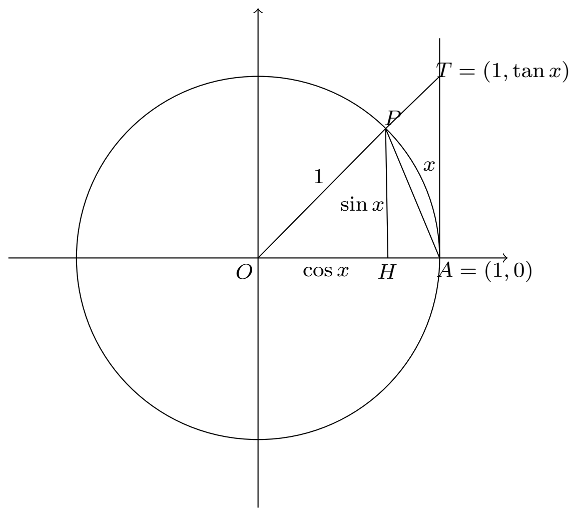
cioè $f(x) + g(x)$ tende a $L_1 + L_2$. ∎

1.3 Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ vicino a zero

In questo paragrafo, si presentano alcuni limiti importanti in cui compaiono le funzioni seno e coseno. Con la lettera x si denota la misura degli archi espressa in radianti.

1. *Quando* $0 < |x| < \pi/2$, *valgono le disuguaglianze*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.26}$$



Dimostrazione. Anzitutto si consideri il caso $0 < x < \pi/2$. Con riferimento alla figura, valgono le ovvie disuguaglianze:

$$\text{area triangolo } OAP \; < \; \text{area settore circolare } OAP \; < \; \text{area triangolo } OAT \tag{1.27}$$

che si scrivono

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \tag{1.28}$$

Moltiplicando per il numero (positivo) $2/\sin x$, si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \tag{1.29}$$

ossia:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.30}$$

per ogni $0 < x < \pi/2$.

La relazione (1.30) è vera anche per $-\pi/2 < x < 0$, infatti i suoi termini restano uguali se si sostituisce $-x$ al posto di x. ∎

2. Dalla disuguaglianza (1.26), poichè $\cos x > -1$, si ha

$$-1 < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.31}$$

per $0 < |x| < \pi/2$. Quindi, se $|x|$ è piccolo,

$$0 < |\sin x| < |x| \tag{1.32}$$

e quindi, per il teorema del confronto, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0} \tag{1.33}$$

3. Poichè

$$0 \le 1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} < \sin^2 x \tag{1.34}$$

per il teorema del confronto, si ha

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0 \tag{1.35}$$

ossia

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \cos x = 1} \tag{1.36}$$

4. Risulta

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{1.37}$$

Infatti, abbiamo visto che (per $|x|$ piccolo e diverso da 0) valgono le disuguaglianze

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1.38}$$

Quando $x \to 0$, dal teorema del confronto segue allora (ricordando che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.39}$$

5. Vale:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \tag{1.40}$$

Infatti:
$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} \tag{1.41}$$
Quando $x \to 0$, il termine $\frac{\sin x}{x}$ tende a 1, mentre $\frac{1}{1+\cos x}$ tende a $1/2$. Quindi,
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \tag{1.42}$$

1.4 Relazione $\sim$ di asintotico e di o-piccolo

Definizione 1.10. *Si dice che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \to x_0$, o in x_0, se*
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1.43}$$

In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.

Si noti che non ha senso affermare soltanto: "$f(x) \sim g(x)$". Bisogna sempre specificare: $f(x) \sim g(x)$, per $x \to x_0$.

Esempi.

1) Si ha:
$$\boxed{\sin x \sim x, \qquad x \to 0} \tag{1.44}$$
Infatti, abbiamo visto che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) Si ha:
$$\boxed{1-\cos x \sim \tfrac{1}{2}x^2, \qquad x \to 0} \tag{1.45}$$
Segue subito da: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

3) Vale la relazione:
$$x^3 + x^2 + x \sim x^3 \qquad x \to +\infty \tag{1.46}$$
Infatti,
$$\frac{x^3+x^2+x}{x^3} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$
tende a 1, per $x \to +\infty$.

Definizione 1.11. *Si dice che una funzione $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive*
$$f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0 \tag{1.47}$$
se
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1.48}$$

In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.

Se $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to x_0$, diremo anche che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$, per $x \to +\infty$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a zero, per $x \to x_0$, e $f(x)$ è $o(g(x))$, diremo che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $g(x)$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a $+\infty$, per $x \to x_0$, e $f(x)$ è $o(g(x))$, diremo che $f(x)$ è un *infinito di ordine inferiore* rispetto a $g(x)$.

Esempi.

1) $f(x) = x^2$ è $o(x)$, per $x \to 0$.

2) $1 - \cos x$ è $o(x)$, per $x \to 0$.

3) $\ln x$ è $o(x)$, per $x \to +\infty$. Infatti, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2 Asintoti

Definizione 2.1 (Asintoto verticale)**.** *La retta $x = x_0$ si chiama* asintoto verticale *del grafico della funzione f, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} f(x) &= +\infty \ (\textit{oppure } -\infty) \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= +\infty \ (\textit{oppure } -\infty) \end{aligned}$$

Definizione 2.2 (Asintoto orizzontale)**.** *La retta $y = L$ si dice* asintoto orizzontale *del grafico della funzione f, per $x \to +\infty$, se è soddisfatta la condizione:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \tag{2.1}$$

Analogamente, la retta $y = K$ si dice asintoto orizzontale *per la funzione f, per $x \to -\infty$, se*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = K \tag{2.2}$$

Definizione 2.3 (Asintoto obliquo)**.** *La retta $y = mx + q$ $(m \neq 0)$ si dice* asintoto obliquo *del grafico della funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$, se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx + q) = 0, \tag{2.3}$$

ossia, in modo equivalente, se

$$f(x) = mx + q + o(1), \qquad \textit{per } x \to +\infty \tag{2.4}$$

dove $o(1)$ designa una funzione infinitesima per $x \to +\infty$.

In modo analogo si definisce un asintoto obliquo per f, per $x \to -\infty$.

La condizione (2.3) – e la condizione equivalente (2.4) – dicono che la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto $(x, mx + q)$ (con la stessa ascissa) sulla retta $y = mx + q$, tende a zero, per $x \to +\infty$.

Osservazione. Se la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto per f a $+\infty$, cioè vale (2.4), allora si ha:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad (m \neq 0)$

(Infatti, da (2.4) segue: $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + \frac{o(1)}{x}$. Ora, è ovvio che $\frac{q}{x} \to 0$; del resto, anche $\frac{o(1)}{x} \to 0$, perchè il numeratore tende a 0 e il denominatore a $+\infty$. Quindi, $f(x)/x$ tende a m, per $x \to +\infty$).

2) Il numero q è uguale al seguente limite: $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$. (Ovvio, vista l'uguaglianza (2.4)).

Si vede subito che il ragionamento si inverte:

Regola per trovare l'asintoto obliquo. Sia $f(x)$ una funzione definita su una semiretta $(a, +\infty)$. Se valgano *entrambe* le condizioni seguenti:
a) Esiste finito, ed è un numero diverso da zero, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad m \neq 0 \tag{2.5}$$

b) Esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q \tag{2.6}$$

allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$.

Si osservi che l'esistenza del limite (2.5) equivale a dire che $f(x) \sim mx$, $m \neq 0$, ($f(x)$ è asintotica a mx), per $x \to +\infty$. Ma questa condizione, da sola, non è sufficiente per concludere che f abbia un asintoto a $+\infty$: occorre anche la condizione (2.6).

Dimostrazione della Regola per l'asintoto.

Infatti, il coefficiente angolare $m(\neq 0)$ dell'asintoto (se questo esiste) non può che essere dato da $m = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, per la precedente osservazione. Inoltre, se anche il limite (2.6) esiste finito, allora $f(x) - mx = q + o(1)$, ossia vale la condizione (2.4) e pertanto $y = mx + q$ è asintoto obliquo di $f(x)$. ∎

Esempio. Sia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$.

Per $x \to +\infty$, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è $o(1)$ (è infinitesima):

$$f(x) = x + o(1)$$

Dunque, leggiamo subito che $y = x$ è asintoto obliquo per $f(x)$, per $x \to +\infty$.

Si noti che il grafico di $f(x)$ non si avvicina alla retta $y = x$ sempre da sopra, nè sempre da sotto, ma oscillando e intersecando l'asintoto infinite volte.

Esempio. Si consideri la funzione $f(x) = x + \ln x$, definita sulla semiretta $(0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Quindi, l'unico candidato coefficiente angolare per l'asintoto è $m = 1$. Ma

$$f(x) - x = \ln x$$

non ha limite finito per $x \to +\infty$. Dunque, non esiste un asintoto obliquo.

Attenzione. Si noti che $x + \ln x \sim x$ ($x + \ln x$ è asintotico a x), per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = 1$$

Però la retta $y = x$ non è asintoto di $x + \ln x$.

3 Alcuni limiti notevoli

1. Ricordiamo che la costante e di Napier (o numero di Eulero) si definisce come il limite della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$, che è convergente in $\mathbb{R}$ in quanto è crescente e superiormente limitata. Ciò premesso, risulta (ne omettiamo la dimostrazione)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{3.1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{3.2}$$

2. Dai precedenti limiti, segue subito:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{3.3}$$

(Quest'ultimo limite si ricava subito dai limiti (3.1) (3.2) con la sostituzione $x = 1/t$).

3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \tag{3.4}$$

Infatti, $\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha$, che tende a e^α per $x \to +\infty$.

4. Per ogni $a > 0$ e per ogni base $b > 0$, $(b \neq 1)$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \log_b x = 0 \tag{3.5}$$

(Questo limite si presenta come una forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$. Si noti che lo stesso limite (3.5) continua a valere 0 anche nel caso $a < 0$, ma in tale caso non è più una forma di indeterminazione). Si dimostrerà la validità del limite (3.5) più avanti, mediante il teorema di De L'Hospital.

5.

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1 \tag{3.6}$$

Infatti, basta scrivere $x^x = e^{x \ln x}$ e osservare che l'esponente $x \ln x$ tende a 0 per $x \to 0^+$.

6. Ricordiamo come si comportano all'infinito le funzioni esponenziali a^x:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

7. Per ogni $\beta > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0 \tag{3.8}$$

Dunque x^β è un infinito di ordine inferiore rispetto a e^x, per $x \to +\infty$. (Dimostrazione pi avanti, con il teorema di De L'Hospital).

8. Pi in generale, per ogni $\beta > 0$ e per ogni base a dell'esponenziale a^x,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \tag{3.9}$$

9. Per ogni $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \tag{3.10}$$

Dunque $\ln x$ (o una sua qualunque potenza $(\ln x)^\alpha$, $\alpha > 0$) è un infinito di ordine inferiore rispetto a x (o a una sua qualunque potenza x^β), quando $x \to +\infty$. Per dimostrare che vale il limite (3.10), basta operare la sostituzione $\ln x = t$ e utilizzare il limite (3.9)

4 Esercizi

4.1 Funzioni

Esercizio 4.1. *Tracciare i grafici delle seguenti funzioni*

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$

3) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

4) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

5) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

6) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$

7) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0},\ f(x) = a^x$ *con* $a > 0$,

8) $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$ *con* $a > 0$,

Esercizio 4.2. *Scegliere dominio e codominio in modo tale che* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ *risultino funzioni invertibili. Tracciare i grafici di tali funzioni e delle relative inverse.*

Esercizio 4.3. *Una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* pari *se per ogni* $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$, *mentre* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* dispari *se per ogni* $x \in \mathbb{R}$ $-f(x) = f(-x)$. *Dimostrare che*

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è pari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è pari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è pari.*
2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è pari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è dispari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è dispari.*
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è dispari e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *è dispari allora* $\mathbb{R} \xrightarrow{fg} \mathbb{R}$ *è pari.*

(Qui, con fg *si intende la funzione prodotto di* f *per* g*.)*

Esercizio 4.4. *Si considerino le funzioni*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = |1 - x|$$
$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ g(x) = 1 - |x|$$

a) Disegnare i grafici di f *e* g.

b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $|1 - x| = 1 - |x|$

Esercizio 4.5. *Se è noto il grafico di* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *qual è il grafico di* $y = |f(x)|$ *e di* $y = f(|x|)$*?*

Esercizio 4.6. *Decidere se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, invertibili. Se sono invertibili, si scriva la funzione inversa. Di ognuna delle funzioni, si disegni il grafico.*

$$\begin{array}{lll}
1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f(x) = 2x - 3 \\
2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} & g(x) = x^2 \\
3) & \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{h} \mathbb{R}_{\geq 0} & h(x) = x^2 \\
4) & \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{k} \mathbb{R}_{>0} & k(x) = \dfrac{1}{x} \\
5) & \mathbb{R} \xrightarrow{l} \mathbb{R} & l(x) = x^3 \\
6) & \mathbb{R} \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{R}_{>0} & \exp_2(x) = 2^x \\
7) & \mathbb{R} \xrightarrow{\exp_2} \mathbb{R} & \exp_2(x) = 2^x \\
8) & \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} & \ln x = \text{logaritmo in base } e \text{ di } x
\end{array}$$

Esercizio 4.7. *Trovare il dominio massimale della funzione* $f(x) = \log_7(2x - \sqrt{x^2 - 1})$.

Esercizio 4.8. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 1}$$

(a) *Determinare il dominio* $D(f)$ *di* f.

(b) f *è pari? è dispari? Spiegare.*

(c) f *è iniettiva?* f *è invertibile?*

Esercizio 4.9. *Si consideri la funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$ *con* m *e* q *numeri reali fissati a piacere.*

1. *Trovare per quali valori di* m *e* q *la funzione* f *è iniettiva (suriettiva).*
2. *Trovare, al variare di* m *e* q *,i punti fissi della funzione* f.

Esercizio 4.10. *Si considerino le funzioni*

$$\begin{array}{lll}
1) & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f(x) = 2x - 3 \\
2) & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} & g(x) = 2^x
\end{array}$$

Trovare $g \circ f$, $f \circ g$, $\mathrm{Im}\ (g \circ f)$, $\mathrm{Im}\ (f \circ g)$.

Esercizio 4.11. *Si consideri la funzione* $h(x) = 2^{2x} - 2^x - 2$

(a) *Esprimere la funzione h come composizione di due altre funzioni f e g, una delle quali è $f(x) = 2^x$. In altre parole, posto $f(x) = 2^x$, determinare una funzione $g(x)$ in modo che risulti $h(x) = (g \circ f)(x)$.*

(b) *Determinare il dominio $D(h)$ di h e l'immagine $\operatorname{Im} h$.*

Esercizio 4.12. *Siano $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$ funzioni invertibili. Allora $A \xrightarrow{g \circ f} C$ è invertibile e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Esercizio 4.13. *Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ per ogni x in $\mathbb{R}$.*

1. *Determinare i valori di a e b per i quali $f \circ f = f$.*
2. *Determinare i valori di a e b per i quali $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ (l'identità di $\mathbb{R}$).*
3. *Determinare i valori di a e b per i quali f è invertibile.*
4. *Studiare, al variare di a e b, l'esistenza di punti fissi di f, cioè di $x \in \mathbb{R}$ per i quali $f(x) = x$. (Dare anche un'interpretazione geometrica).*

Esercizio 4.14. *Rispondere ai seguenti quesiti:*

1. *Trovare gli eventuali valori di m, q per i quali la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$ è pari.*
2. *Trovare gli eventuali valori di m, q per i quali la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$ è dispari.*
3. *Supponiamo che $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ sia pari e che $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sia dispari. Cosa si può dire delle funzioni composte $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$? Sono pari, dispari, né pari né dispari? Motivare le risposte.*

4.2 Limiti

Esercizio 4.15. *Trovare - se esistono - i seguenti limiti:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{3x^2-x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+100}{x^2+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sin x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{7x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x}$ 11) $\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{|x-2|}{(x^2+1)(x-2)}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-3x}{x^4+5x}$

Esercizio 4.16. *Tracciare i grafici locali della funzione*

$$\mathbb{R}\setminus\{1,4\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x-4}{x^2-5x+4}$$

in un intorno di $x=1$ e in un intorno di $x=4$.

Esercizio 4.17. *Trovare i limiti della funzione*

$$\mathbb{R}\setminus\{1\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$$

agli estremi del proprio dominio, vale a dire, per $x\to-\infty, x\to 1^-, x\to 1^+, x\to+\infty$.

Esercizio 4.18 (Limiti notevoli)**.** *Dimostrare i seguenti limiti*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ *($e = 2,718\ldots =$ numero di Nepero).*
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{c}{x})^x = e^c$ *($c\in\mathbb{R}$).*
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ *($a\in\mathbb{R}_{>0},\ a\neq 1$).*
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a\in\mathbb{R}_{>0})$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$.

4.3 Suggerimenti e risposte.

Esercizio 4.7 Il dominio di f coincide con le soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x^2 - 1} & > 0 \\ x^2 - 1 & \geq 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$. Quindi il dominio di f è $D(f) = [1, +\infty)$.

Esercizio 4.8

(a) $D(f) = [-1, 1]$

(b) È facile verificare che $f(-x) = f(x)$, per ogni $x \in D(f)$. Quindi f è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

(c) f non è iniettiva perchè f è pari. Pertanto, f non è invertibile.

Esercizio 4.11

(a) La funzione richiesta è $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 2$

(b) I domini di f e di g sono $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ mentre Im $f = (0, +\infty)$ e Im $g = [-\frac{9}{4}, +\infty)$. Segue che il dominio $D(h)$ di h è $\mathbb{R}$ e Im $h = [-\frac{9}{4}, +\infty)$.

Esercizio 4.10 $(g \circ f)(x) = 2^{2x-3}$; $(f \circ g)(x) = 2 \cdot 2^x - 3$; Im $(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$; Im $(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -3\}$.

Esercizio 4.12 Per definizione di inversa, per dimostrare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ si deve provare che

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_C$$

e

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_A.$$

Ora

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_C. \end{aligned}$$

Analogamente si prova $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$.

Esercizio 4.13 1) $(a = 0, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$. 2) $(a = -1, \forall b \in \mathbb{R})$ o $(a = 1, b = 0)$. 3) $a \neq 0$, 4)$a \neq 1$.

Esercizio 4.14 1) $m = 0$, 2) $q = 0$, 3) $f \circ g$ è pari, $g \circ f$ è pari, $f \circ f$ è pari, $g \circ g$ è dispari.

Esercizio 4.15 1) $-1/3$. 2) 0. 3) 0. 4) $+\infty$. 5) 0. 6) $1/3$. 7) $3/7$. 8) $\frac{1}{2}$. 9) 2. 10) 1. 11) Non ha limite. 12) $-\frac{3}{5}$.

Esercizio 4.16 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^\pm} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

Esercizio 4.17 $\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$