

Corso di preparazione alla seconda prova scritta di matematica.

Lezione n.2

Sessione ordinaria 2017.

Soluzioni dei quesiti

1

Testo della prova e soluzioni sono reperibili, per esempio, nei seguenti siti

- <http://www.matematica.it/tomasi/matls/2015/M557.pdf>
- http://www.matefilia.it/maturita/index_esame_di_stato.shtm
- <http://matematica.unibocconi.it/articoli/esame-di-stato-2015-la-prova-di-matematica>

¹Nome file .tex: “Lezione_02_preparazione_esame_di_stato_2018.tex”

1 Quesiti

Quesito 1.

Integrando per parti:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = |x^2 e^x|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \quad (1.1)$$

Posto $\int_0^1 x e^x dx = E$, da (1.1) si ottiene:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = |x^2 e^x|_0^1 - 2E = e - 2E \quad (1.2)$$

Integrando ancora per parti:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = |x^3 e^x|_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 3(e - 2E) = 6E - 2e \quad (1.3)$$

Quesito 3.

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$ segue $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{ax + 2b} - 6 = 0$. Pertanto $\sqrt{2b} - 6 = 0$, $b = 18$.

Il limite assume la forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 36} - 6}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{36(1 + \frac{a}{36})} - 6}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 6 \cdot \frac{\sqrt{(1 + \frac{a}{36}x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 6 \cdot \frac{a}{36} \left[\frac{(1 + \frac{a}{36}x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{a}{36}x} \right] \\ &= 6 \cdot \frac{a}{36} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Infine, si ottiene:

$$6 \cdot \frac{a}{36} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad a = 12$$

Quesito 4.

Quesito 5.

Posto $P = (x, y, z)$, una equazione parametrica (vettoriale) della retta per A e B è :

$$P = A + (B - A)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ossia

$$\begin{cases} x &= -2 + 5t \\ y &= 3 - 3t \\ z &= 1 - 2t \end{cases} \quad (1.5)$$

Il vettore (a, b, c) di direzione del piano π è un multiplo del vettore di direzione della retta passante per A e B , cioè

$$(a, b, c) = h(5, -3, -2) \quad (1.6)$$

Per $h = 1$, $(a, b, c) = (5, -3, -2)$. Pertanto, l'equazione cartesiana del piano π è

$$5(x - 2) - 3(y - 2) - 2(z + 3) = 0$$

ossia

$$5x - 3y - 2z - 10 = 0 \quad (1.7)$$

Quesito 6.

Il procedimento più rapido consiste nell'utilizzare la formula di McLaurin della funzione $\sin x$. Tuttavia, l'argomento non viene quasi mai proposto in una scuola superiore. In alternativa, utilizzando due volte il teorema di de l'Hôpital si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax^{a-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)}{a(a-1)x^{a-2}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

L'ultimo limite della precedente catena di uguaglianze, esiste finito se $a - 2 = 1$, ossia $a = 3$. Per $a = 3$ il valore del limite proposto è $-\frac{1}{6}$.

Quesito 7.

Equazioni parametriche della retta r ortogonale a π e passante per $P = (1, 0, 2)$ sono

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

I centri C richiesti delle due sfere stanno su r e distano $\sqrt{6}$ dal piano π . Quindi, $C = (1 + t, 2t, 2 - t)$ e

$$\frac{|1+t+2(2t)-2+t+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \sqrt{6} \quad (1.10)$$

Con facili conti si ottiene $|6t| = 6$, $t = \pm 1$. Infine, sostituendo i valori di t appena trovati nelle equazioni parametriche della retta r , si trovano le coordinate dei centri (delle due sfere)

$$C_1 = (0, -2, 3) \quad \text{e} \quad C_2 = (2, 2, 1). \quad (1.11)$$

Quesito 8.

La probabilità che esca la faccia contrassegnata da 3 è p , mentre la probabilità che esca qualunque altro numero, compreso tra 1 e 12, è $\frac{p}{2}$. Si ha:

$$p + 11 \frac{p}{2} = 1 \quad (1.12)$$

Ossia, $p = \frac{2}{13} \left(\frac{p}{2} = \frac{1}{13} \right)$ e la probabilità che *non* esca 3 è $q = 1 - p = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$.

Infine, la probabilità che in 5 lanci il numero 3 esca *almeno* 2 volte è

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 + \binom{5}{3} p^3 q^2 + \binom{5}{4} p^4 q^1 + \binom{5}{0} p^5 \quad (1.13)$$

i conti producono il seguente risultato

$$10 \cdot \left(\frac{2}{13} \right)^2 \cdot \left(\frac{11}{13} \right)^3 + 10 \cdot \left(\frac{2}{13} \right)^3 \cdot \left(\frac{11}{13} \right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{2}{13} \right)^4 \cdot \left(\frac{11}{13} \right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{2}{13} \right)^5 \cdot \sim 0,172 = 17,2\%$$