Calcolo differenziale
Parte prima

Mauro Saita
maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2014.[1]

Indice

[1] Nome file: 'Calcolo_differenziale_1_2014.tex'

1 Derivate

1.1 Definizione di derivata

Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e sia x_0 un punto di I. Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ si chiama *incremento della variabile indipendente tra* x_0 e x la quantità

$$\Delta x = x - x_0$$

mentre si chiama *incremento della funzione* f *relativo a* Δx la quantità

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Definizione 1.1 (Rapporto incrementale)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*,* $y = f(x)$ *una funzione qualsiasi,* I *un intervallo aperto dell'asse reale e* $x_0 \in I$*. Si chiama* rapporto incrementale di f relativo ad x_0 *la funzione*

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.1}$$

che risulta definita in $I \setminus \{x_0\}$*.*

La quantità $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ rappresenta la *variazione assoluta* di f relativa all'incremento $\Delta x = x - x_0$, mentre il rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ indica il *tasso medio di variazione* di f rispetto all'incremento Δx. Per esempio se per $\Delta x = 0.2$ si ha un incremento di f pari a $\Delta y = 0.05$, il tasso medio di variazione di f (rispetto all'incremento Δx) è $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4}$; in termini percentuali la variazione è stata del 25%.

Definizione 1.2 (Funzione derivabile)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo aperto* I *dell'asse reale e* $x_0 \in I$*. Si dice che* f *è* derivabile *in* x_0 *se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.2}$$

Si osservi che, posto $x - x_0 = h$, tale limite assume la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1.3}$$

Quindi, in modo del tutto equivalente, si dice che la funzione f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite (1.3).

I simboli che più spesso si usano per denotare la derivata di f in x_0 sono:

$$f'(x_0), \quad Df\,(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Esempio. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Il rapporto incrementale di f relativo a $x_0 \in \mathbb{R}$ è la funzione

$$x \longmapsto \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \tag{1.4}$$

La derivata di f in x_0 è

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2 \tag{1.5}$$

Si arriva alla stessa conclusione calcolando il limite (1.3)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0^3 + 3x_0^2\, h + 3x_0\, h^2 + h^3) - x_0^3}{h} = \lim_{h \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\, h + h^2) = 3x_0^2$$

dove si è posto $x = x_0 + h$.

Esempio. La derivata di $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $\quad g(x) = x^2 - 3x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ è

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - x_0^2 + 3x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2 - 3h}{h} = 2x_0 - 3$$

Derivata a destra e derivata a sinistra

La definizione di derivata si può estendere al caso in cui il punto x_0 sia uno dei due estremi di un intervallo. Si supponga che la funzione f, a valori reali, sia definita su un intervallo chiuso $[a, b]$. Si dice che f è *derivabile a destra* nel punto $x_0 = a$, se esiste (finito) il limite del rapporto incrementale quando x tende al punto x_0 da destra, cioè quando esiste finito il

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.6}$$

Se tale limite esiste finito, si chiama *derivata a destra* e lo si indica con

$$f'_+(x_0)$$

In modo analogo, una funzione reale f, definita su un intervallo $[a, b]$, si dice derivabile in $x_0 = b$ se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.7}$$

che si denota (quando esiste finito) con il simbolo

$$f'_-(x_0)$$

e si chiama *derivata a sinistra* nel punto b. A volte si utilizzerà ancora il simbolo f', al posto di f'_+ o f'_-, quando il significato dei simboli è chiaro dal contesto.

1.2 Funzioni differenziabili

Per definizione di derivata, se f è derivabile in x_0, si ha

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h) \tag{1.8}$$

dove $\alpha(h)$ è una funzione infinitesima, cioè una funzione che tende a zero, quando h tende a zero:

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

L'uguaglianza (1.8) si può scrivere così

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h + h\,\alpha(h) \tag{1.9}$$

dove $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Le considerazioni svolte giustificano la seguente definizione

Definizione 1.3 (Funzione differenziabile)**.** *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e $x_0 \in I$. Si dice che f è* differenziabile *in x_0 se, per h che tende a* 0*, esiste un numero reale $A \in \mathbb{R}$ per il quale si ha:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A\cdot h + h\,\alpha(h) \tag{1.10}$$

dove $\alpha(h)$ è una quantità infinitesima, per h che tende a zero.

Per una funzione reale, di variabile reale, il concetto di derivabilità e quello di differenziabilità sono equivalenti

Teorema 1.4 (Derivabilità equivale a differenziabilità)**.** *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto I dell'asse reale e $x_0 \in I$. Allora*

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Dimostrazione.

Derivabilità implica differenziabilità.

Se f è derivabile in x_0 allora si può scrivere, per h in un intorno di 0,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + h\alpha(h) \tag{1.11}$$

dove $f'(x_0)$ è un numero reale e $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Segue che f è differenziabile in x_0.

Differenziabilità implica derivabilità

Se f è differenziabile in x_0 allora, per h che tende a 0, esiste un numero reale A per il quale si ha

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A\cdot h + h\alpha(h) \tag{1.12}$$

dove $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 è dato da:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A + \alpha(h)$$

Quindi il limite del rapporto incrementale esiste ed è uguale al numero A:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \Big[A + \alpha(h)\Big] \\ &= A + \lim_{h\to 0} \alpha(h) \\ &= A \end{aligned}$$

■

1.3 Derivabilità implica continuità

Vale il seguente

Teorema 1.5 (Derivabilità implica continuità)**.** *Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Quando h tende a zero, il secondo membro di (1.9) tende a zero. Allora si ha

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Questo prova che f è continua in x_0. ■

Il viceversa di questo teorema non è vero, nel senso che non tutte le funzioni continue sono derivabili. Per esempio, in $x = 0$, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile, infatti il rapporto incrementale di f in $x = 0$ vale

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

quindi non esiste il limite $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h}$.

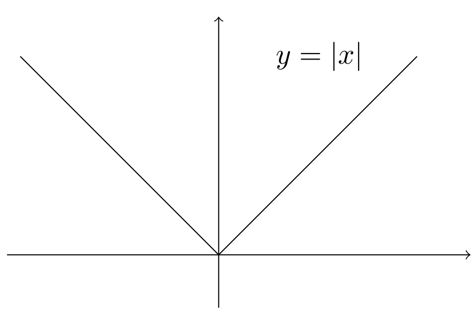

Figura 1: In $x = 0$ la funzione $y = |x|$ non è derivabile sebbene sia continua.

1.4 La derivata secondo Leibniz

Nel mese di ottobre del 1684 G.W. Leibniz pubblicò lo scritto dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.*[2] A questo articolo si fa risalire la nascita ufficiale del calcolo infinitesimale, sebbene gli stessi risultati fossero già stati trovati, qualche decennio prima, da I. Newton con un approccio completamente diverso[3].

L'idea di Leibniz è la seguente: se a un punto x_0 della funzione $y = f(x)$ si dà un incremento infinitesimo dx anche la funzione subisce un incremento infinitesimo

$$dy = f(x_0 + dx) - f(x)$$

Allora la derivata di f in x_0 è *il rapporto tra le quantità infinitesime dy e dx*, ovvero

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x)}{dx}$$

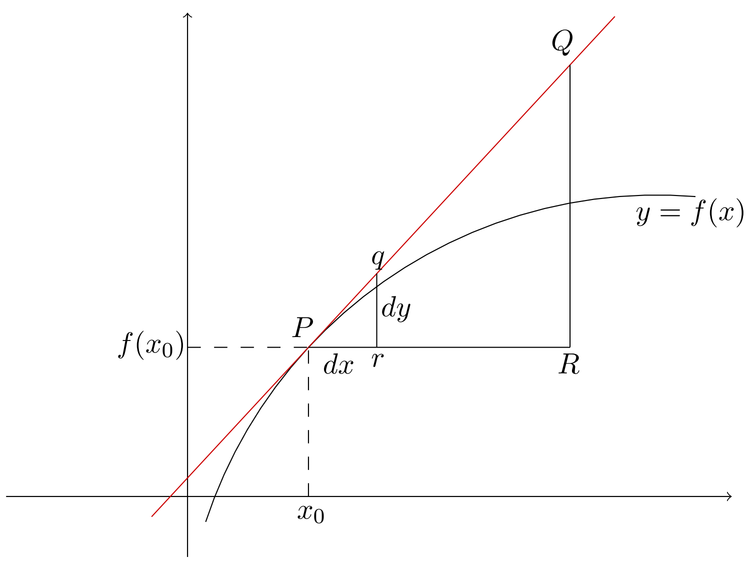

Figura 2

La notazione $\frac{dy}{dx}$ consente di pensare la derivata senza dover ricorrere al concetto di limite: esso è 'nascosto' nel simbolo *differenziale* 'd'; per questa ragione la notazione di Leibniz è molto usata in fisica e nelle scienze applicate.

[2]Nuovo metodo per i massimi e i minimi, nonchè per le tangenti, che non si arresta davanti alle quantità fratte o irrazionali, e per quelli un singolare genere di calcolo.

[3]Le ricerche di I. Newton su questo argomento sono raccolte in tre scritti: 1) *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, scritto nel 1669 e pubblicato nel 1711; 2) *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Metodo delle flussioni e delle serie infinite), scritto nel 1671 e pubblicato nel 1742; 3) *De quadratura curvarum* (Sulla quadratura delle curve) pubblicato nel 1704. Le idee contenute nel De quadratura curvarum vengono utilizzate in *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principi matematici della filosofia naturale), prima opera pubblicata da Newton (1687).

In termini più precisi, per determinare la derivata della funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ in un suo punto x_0, bisogna prima calcolare il rapporto incrementale $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e poi passare al limite, per Δx che tende a zero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Il simbolo 'Δ' che compare nel rapporto incrementale sta a indicare differenze finite: Δx è l'incremento (finito) della variabile indipendente e Δy la corrispondente variazione (finita) della funzione. Quando si passa al limite, per Δx che tende a 0, il simbolo 'Δ' viene sostituito con il simbolo *differenziale* 'd'.

Esempio. Velocità istantanea nel moto rettilineo

Un oggetto si muove lungo una retta. Fissati su di essa il punto origine O, l'unità di misura e il verso di percorrenza sia

$$t \mapsto s(t) = OP$$

la funzione che ad ogni istante di tempo t associa la distanza $s(t)$ dell'oggetto dal punto O.

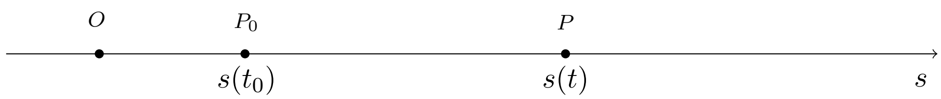

Figura 3

Se all'istante t_0 l'oggetto si trova in P_0 e all'istante t è in P allora la sua velocità media (relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t - t_0$) è

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

mentre la velocità istantanea al tempo t_0 si ottiene facendo tendere t a t_0

$$\texttt{velocità istantanea} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Quindi la *velocità istantanea è la derivata dello "spazio" rispetto al tempo.*

Esempio. Intensità di corrente

In un filo di rame di sezione A, la quantità di carica che attraversa la sezione del filo nel tempo che va da t_0 a t è $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$. L'intensità media di corrente è

$$I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

mentre l'intensità istantanea di corrente al tempo t_0 è

$$\texttt{intensità istantanea di corrente} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Quindi, *l'intensità istantanea di corrente è la derivata della "carica" rispetto al tempo.*

1.5 Interpretazione geometrica di derivata

Dire che la funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è derivabile (differenziabile) nel punto x_0 equivale ad affermare che il grafico di f possiede retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$; tale retta è unica e non può essere verticale.

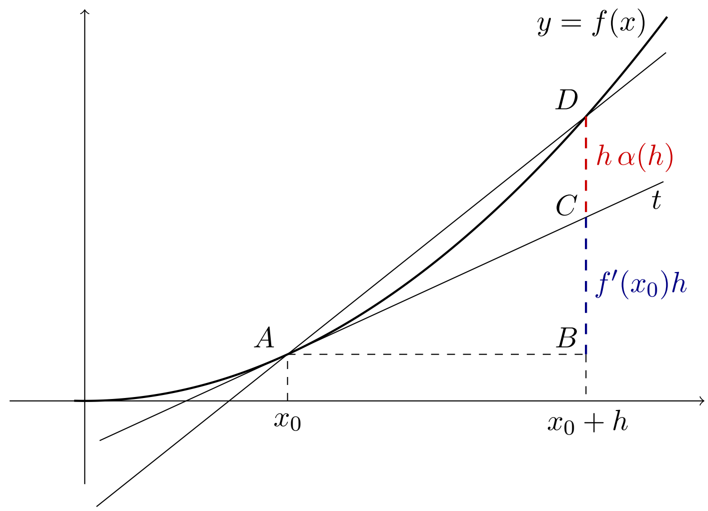

Figura 4: La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente in A al grafico di f.

Con riferimento alla figura, si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Il rapporto incrementale di f relativo a x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

è il coefficiente angolare della retta che interseca il grafico di f nei punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $D = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Per h che tende a 0, la secante AD assume la posizione della retta t, ossia della tangente al grafico di f in A; quindi la derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente t.

Più precisamente, l'*incremento* di f è rappresentato dal segmento $BD = BC + CD$, dove

$$BC = f'(x_0)h$$

è l'incremento della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ mentre

$$CD = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = h\alpha(h)$$

è una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto a h (nel senso che, divisa per h, tende a zero per h che tende a zero).

1.6 Funzioni derivabili in un intervallo

Si dice che la funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (che potrebbe essere chiuso o no, limitato o no) è *derivabile in* I, se ammette derivata in tutti i punti interni di I e inoltre ammette derivata destra nel primo estremo di I e derivata sinistra nel secondo estremo di I, quando questi estremi appartengono a I. Se f è derivabile in tutto I, la nuova funzione

$$I \xrightarrow{f'} \mathbb{R} \tag{1.13}$$

si chiama *funzione derivata* di f, anch'essa è definita su I.

Se anche f' è derivabile su tutto I, la *derivata seconda* f'' non è altro che la derivata prima di f', anch'essa è definita su I e così via. Se esiste la derivata $n-1$-esima, la derivata n-esima (se esiste) verrà indicata con il simbolo $f^{(n)}$.

1.7 Limiti importanti

Alcuni fatti che riguardano il numero di Eulero.

Il numero di Eulero e, detto anche costante di Napier, è il limite della successione $(1+1/n)^n$:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1.14}$$

L'uguaglianza appena scritta *non* è un teorema, ma una *definizione*. Più precisamente, si dimostra che la successione $(1+1/n)^n$ è crescente e limitata; quindi, per la completezza di $\mathbb{R}$, converge a un numero reale. Tale numero reale, per definizione, è chiamato e. Inoltre si dimostra senza difficoltà (ma qui non si riporta la dimostrazione) che si ha anche:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.15}$$

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.16}$$

Ponendo $1/x = y$, nelle uguaglianze (1.15) e (1.16), si ricava un altro limite importante:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \tag{1.17}$$

che sarà fondamentale in seguito.

La ragione per cui si preferisce scegliere il numero e come base per la funzione esponenziale e come base per la funzione logaritmo sta nel fatto che, con tale scelta, si ha, come si vedrà più avanti,

$$De^x = e^x, \qquad D\ln(x) = \frac{1}{x}$$

(In genere, si usa il simbolo ln per denotare il logaritmo "naturale", ossia in base e. Se necessario per evitare equivoci, scriverà anche $\log_e$). Se invece si sceglie una base a qualunque (purché positiva e diversa da 1), valgono le regole di derivazione più complicate, cioè

$$Da^x = a^x \cdot \ln a, \qquad D\log_a(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$$

Si può allora dimostrare che valgono alcuni limiti fondamentali:

Teorema 1.6. *Per ogni base a (positiva e diversa da 1), si ha*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} \tag{1.18}$$

In particolare, se $a = e$,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \tag{1.19}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y} &= \lim_{y\to 0}\log_a\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right] && \text{(Proprietà dei logaritmi: } \log_a b^c = c\log_a b\text{).}\\
&= \log_a \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right] && \text{(Perché la funzione } \log_a \text{ è continua).}\\
&= \log_a e && \text{(Per il limite 1.17).}\\
&= \frac{1}{\log_e a} && \text{(Proprietà dei logaritmi: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\text{).}
\end{aligned}
$$

(L'uguaglianza $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ segue dall'ovvia equivalenza

$$a^w = b \Longleftrightarrow a = b^{1/w}$$

Infatti, per la definizione di logaritmo, tale equivalenza si legge: $w = \log_a b$ se e solo se $\dfrac{1}{w} = \log_b a$). In particolare, se $a = e$, si ha $\log_a e = \log_e e = 1$, e quindi si ricava l'uguaglianza (1.19):

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \tag{1.20}$$

■

Teorema 1.7. *Per ogni base a (positiva e diversa da 1), si ha*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log_e a \tag{1.21}$$

In particolare, se $a = e$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Per ricondursi al precedente limite (1.18), occorre effettuare il cambio di variabili $a^x - 1 = y$, da cui si ricava $x = \log_a(1+y)$. Quando x tende a zero, anche y tende a zero. Allora, tenendo presente il limite (1.18), si ha:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}\\
&= \log_e a
\end{aligned}
$$

■

1.8 Il differenziale. Approssimazione al primo ordine.

Definizione 1.8. *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *(*$I \subset \mathbb{R}$*) una funzione derivabile in un punto* $x_0 \in I$*. Si chiama* differenziale di f in x_0, *e si denota* df_{x_0}, *l'applicazione lineare*[4]

$$\mathbb{R} \xrightarrow{df_{x_0}} \mathbb{R}, \qquad h \longmapsto df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h \tag{1.23}$$

Un problema cruciale è approssimare il valore $f(x_0 + h)$, per h piccolo, vicino a un punto x_0 in cui f sia derivabile. Ci sono (lo si vedrà in seguito) tante possibili approssimazioni di una funzione in un intorno di un punto: approssimazioni al primo ordine, al secondo ordine, al terzo ordine eccetera, a seconda della regolarità della funzione f. Con la derivata prima, si può definire l'approssimazione al primo ordine.

Se f è derivabile in x_0 si può scrivere:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + h\alpha(h) \tag{1.24}$$

Allora la *approssimazione al primo ordine*, o *approssimazione lineare*, di f in x_0 si ottiene *trascurando il termine* $h\alpha(h)$ e prendendo in considerazione, come valore approssimato di $f(x_0 + h)$, soltanto la somma di $f(x_0)$ con il differenziale $df_{x_0}(h) = f'(x_0)\, h$. Dunque:

L'approssimazione al primo ordine di $f(x_0 + h)$ *è*

$$f(x_0) + f'(x_0)\, h \qquad (h \text{ piccolo}) \tag{1.25}$$

ovvero, in modo equivalente, l'approssimazione al primo ordine di $f(x)$*, vicino a* x_0*, è*

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad (x \text{ vicino a } x_0). \tag{1.26}$$

L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{1.27}$$

Dunque, dalla (1.26) segue che *approssimare al primo ordine (o in modo lineare) una funzione* $f(x)$ *in un intorno di* x_0 *significa confondere, vicino a* x_0*, il grafico di* $f(x)$ *con la retta tangente nel punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$*.*

Ad esempio, l'approssimazione lineare di $\sin x$ vicino a $x_0 = 0$ è x. Infatti, è noto che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

[4] Un'applicazione lineare g da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ per la quale valgono le due seguenti proprietà

1. $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (g conserva la somma)
2. $g(kx) = kg(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni fissato $k \in \mathbb{R}$ (g conserva la moltiplicazione per uno scalare)

Le applicazioni lineari $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x) = mx$, cioè tutte e sole le funzioni aventi per grafico una retta per l'origine.

Questo significa che $\dfrac{\sin x}{x} - 1 = \alpha(x)$ è una funzione che tende a zero per $x \to 0$. Dunque

$$\sin x = x + x\,\alpha(x), \qquad \text{con } \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$$

Ricordando che $\sin 0 = 0$, possiamo dedurre che la derivata di $\sin x$ in $x_0 = 0$ è uguale a 1 e che l'approssimazione lineare di $\sin x$ vicino a $x_0 = 0$ è x. Interpretazione geometrica: vicino all'origine, il grafico di $\sin x$ si confonde (al primo ordine) con la retta tangente (che è la bisettrice del primo e del terzo quadrante).

2 Derivate di alcune funzioni

2.1 Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$

Teorema 2.1 (Derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$). *La derivata di $x^n, n \in \mathbb{N}$, è*

$$Dx^n = nx^{n-1} \tag{2.1}$$

Prima dimostrazione.

Sia x un numero reale fissato e h un qualunque incremento. Il rapporto incrementale di $f(x) = x^n$ è dato (per lo sviluppo del binomio di Newton) da:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\cdot\left[(x+h)^n - x^n\right] &= \frac{1}{h}\cdot\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n\right] \\
&= \frac{1}{h}\cdot\left[\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n\right] \\
&= \frac{1}{h}\cdot h\cdot\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] \\
&= \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Quando h tende a zero, l'espressione contenuta nell'ultima parentesi quadra tende a nx^{n-1}. ∎

Seconda dimostrazione.

La derivata di x^n, n intero positivo, si può anche calcolare in un altro modo se si conosce la regola di Leibniz; infatti sapendo che $Dx = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
Dx^2 &= D(x\cdot x) \\
&= (Dx)\cdot x + x\cdot(Dx) \\
&= 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x
\end{aligned}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
Dx^n &= D(x\cdots x) \\
&= (Dx)\cdot x\cdots x + x\cdot(Dx)\cdots x + \cdots + x\cdot x\cdots x\cdot(Dx) \\
&= 1\cdot x\cdots x + x\cdot 1\cdot x\cdots x + \cdots + x\cdot x\cdots 1 = \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

In modo più formale, l'uguaglianza $Dx^n = nx^{n-1}$ si dimostra per induzione su n.

2.2 Derivata di exp e log

Teorema 2.2 (Derivata del logaritmo)**.** *La derivata di* $\ln x$ *(logaritmo naturale, in base* e*) è*

$$D \ln x = \frac{1}{x} \tag{2.2}$$

La derivata del logaritmo $\log_a(x)$ *in base arbitraria è*

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Per mettere meglio in evidenza il ruolo del numero e, conviene prima calcolare la derivata della funzione $\log_a(x)$ rispetto a una base arbitraria ($a \neq 1$, $a > 0$):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\big(x(1+h/x)\big) - \log_a(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x) + \log_a(1+h/x) - \log_a(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+h/x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} && \text{(Si è posto } h/x = y\text{).} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \log_a \left[(1+y)^{1/y}\right] \\
&= \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{1/y}\right] && \text{(Per la continuità di } \log_a\text{).}
\end{aligned}$$

È a questo punto che si impone all'attenzione il numero definito dal limite

$$\lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{1/y}\right]$$

Si è già visto che tale limite esiste ed è chiamato e. Allora, dall'ultima uguaglianza scritta, segue la tesi (2.3)

$$D \log_a(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Se si sceglie come base dei logaritmi il numero e, si ha $\log_a e = \log_e e = 1$, e quindi

$$D \log_e(x) = \frac{1}{x}$$

∎

Teorema 2.3 (Derivata dell'esponenziale)**.** *La derivata dell'esponenziale e^x è*

$$De^x = e^x \tag{2.4}$$

La derivata di a^x è

$$Da^x = a^x \cdot \ln a \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Si tratta di determinare il limite del rapporto incrementale di e^x in un generico punto fissato x in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \cdot 1 \qquad\qquad \text{(Per il limite 1.22)} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Esattamente nello stesso modo, usando il limite (1.21), si dimostra che $Da^x = a^x \cdot log_e a$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^x \cdot \log_e a \qquad\qquad \text{(Per il limite 1.21)}
\end{aligned}$$

Un altro modo per dimostrare che $De^x = e^x$ consiste nel ricordare che la funzione e^x è l'inversa di $\ln(x)$ e poi usare il teorema della derivazione della funzione inversa. Posto $\exp(x) = y$, $x = \ln(y)$, si ha

$$\begin{aligned}
(\exp)'(x) &= \frac{1}{(\ln)'(y)} \\
&= \frac{1}{1/y} \\
&= y \\
&= \exp(x)
\end{aligned}$$

∎

2.3 Derivata di $\sin x$ e $\cos x$

Per calcolare la derivata di $\sin x$ occorre ricordare che vale il seguente limite fondamentale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2.6}$$

Da tale limite si ricava:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \tag{2.7}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} = & = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ & = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ & = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ & = -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \end{aligned}$$

che tende a zero, perché $\frac{\sin h}{h} \to 1$ e $\frac{\sin h}{\cos h + 1} \to 0$.

Teorema 2.4.

$$D \sin x = \cos x \tag{2.8}$$

$$D \cos x = -\sin x \tag{2.9}$$

Dimostrazione dell'uguaglianza (2.8). Si scriva il rapporto incrementale di $y = \sin x$ e poi si utilizzi la formula di addizione del seno:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} & = \frac{1}{h} \cdot \left[\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \right] \\ & = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Quando h tende a zero, $\frac{\cos h - 1}{h}$ tende a 0 e $\frac{\sin h}{h}$ tende a 1. Quindi il rapporto incrementale tende a $\cos x$. ∎

Dimostrazione dell'uguaglianza (2.9). Con un conto analogo al precedente, usando la formula di addizione del coseno, si dimostra che $D \cos x = -\sin x$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} & = \frac{1}{h} \cdot \left[\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x \right] \\ & = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

da cui segue che il limite del rapporto incrementale è $-\sin x$. ∎

Un'altra dimostrazione di questo fatto si ottiene osservando che

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e utilizzando la regola della derivata di funzione composta (che in queste note è presentata più avanti):

$$\begin{aligned} D\cos x &= D\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= (-1)\cdot\cos(\frac{\pi}{2} - x) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

∎

3 Regole sulle derivate

3.1 Derivata della somma

Si ricordi che la somma di due funzioni f e g è la funzione definita da

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Teorema 3.1 (Derivata della somma)**.** *Siano f e g funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0. Allora la funzione $f+g$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale, a partire da x_0, della funzione $f+g$ si scrive:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Quando x tende a x_0 il secondo membro tende a $f'(x_0) + g'(x_0)$. ∎

3.2 Derivata del prodotto

Date due funzioni f e g, a valori reali, il loro prodotto $f \cdot g$ (oppure fg) è la funzione definita da

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Teorema 3.2 (Derivata del prodotto. Regola di Leibniz)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni a valori reali, definite su un intorno del punto x_0 e entrambe derivabili in x_0. Allora la funzione prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{3.2}$$

Prima dimostrazione. Si scriva il rapporto incrementale della funzione prodotto $f \cdot g$. Si noti che vale l'identità

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che si ottiene con il trucco di sommare e sottrarre a secondo membro il termine $f(x)g(x_0)$. Quando x tende a x_0, il termine $f(x)$ tende a $f(x_0)$ (per la continuità di f in x_0), il rapporto $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ tende a $g'(x_0)$ e il rapporto $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tende a $f'(x_0)$. Quindi il limite del secondo membro, quando x tende a x_0, esiste ed è uguale a

$$f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

Dunque la regola (3.2) è dimostrata.

Seconda dimostrazione. Per ipotesi, f e g sono differenziabili in x_0. Questo significa che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\alpha(h), \qquad g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + h\beta(h)$$

dove $\alpha(h)$ e $\beta(h)$ sono quantità infinitesime rispetto a h.

Posto per semplicità $p(x) = f(x)g(x)$, la quantità $p(x_0 + h) = f(x_0 + h)g(x_0 + h)$ si scrive nel modo seguente:

$$\begin{aligned} p(x_0 + h) &= f(x_0 + h)g(x_0 + h) \\ &= \big[f(x_0) + f'(x_0)h + h\alpha(h)\big]\big[g(x_0) + g'(x_0)h + h\beta(h)\big] \\ &= f(x_0)g(x_0) + \big[f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\big]h + R(h) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove

$$R(h) = hf(x_0)\beta(h) + h^2 f'(x_0)g'(x_0) + h^2 f'(x_0)\beta(h) + h^2 g'(x_0)\alpha(h) + h^2\alpha(h)\beta(h)$$

è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a h, cioè $\lim_{h \to 0} \dfrac{R(h)}{h} = 0$. Segue che il prodotto $p(x)$ è differenziabile in x_0 e che la sua derivata in x_0 vale proprio

$$p'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

∎

3.3 Derivata della funzione composta

Teorema 3.3 (Derivata della funzione composta).[5] *Se è definita la funzione composta* $g \circ f$, f *è derivabile in* x_0 *e* g *è derivabile in* $y_0 = f(x_0)$, *allora* $g \circ f$ *è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \tag{3.4}$$

Dimostrazione. L'ipotesi che f sia derivabile in x_0 si può scrivere così

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \alpha(h) \cdot h \tag{3.5}$$

dove $\alpha(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Posto $f'(x_0) \cdot h + \alpha(h) \cdot h = k$, la 3.5 si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + k \tag{3.6}$$

dove la quantità k tende a zero quando h tende a zero. Similmente, l'ipotesi che g sia derivabile in $y_0 = f(x_0)$ si scrive

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot k + \beta(k) \cdot k \tag{3.7}$$

dove $\beta(k) \to 0$ quando $k \to 0$.

Si scriva ora il rapporto incrementale di $g \circ f$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big[g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))\big] &= \frac{1}{h}\big[g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))\big] && \text{(per la 3.6)}\\
&= \frac{1}{h}\big[g(y_0+k) - g(y_0)\big]\\
&= \frac{1}{h}\big[g'(y_0)\cdot k + \beta(k)\cdot k\big] && \text{(per la 3.7)}\\
&= g'(y_0)\cdot\frac{k}{h} + \beta(k)\cdot\frac{k}{h}\\
&= g'(y_0)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \beta(k)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}
\end{aligned}$$

Quando h tende a zero, il termine $g'(y_0) \cdot \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tende a $g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, mentre il termine $\beta(k) \cdot \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (prodotto di una quantità che tende a zero per una che tende a un limite finito) tende a zero. La formula (3.7) è quindi dimostrata. ∎

Derivata della funzione composta. Alcuni casi importanti

Nella seguente tabella sono riportate le applicazioni più frequenti della regola di derivazione della funzione composta.

[5] Questa regola è chiamata *chain rule* (regola della catena) in inglese.

Funzioni	Derivate
$f(x) = (g(x))^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha\,(g(x))^{\alpha-1}\,g'(x)$
$f(x) = \log_a \lvert g(x) \rvert$	$f'(x) = (\log_a e)\,\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \ln \lvert g(x) \rvert$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = \left(\dfrac{1}{\log_a e}\right) g'(x)e^{g(x)}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$
$f(x) = \sin g(x)$	$f'(x) = g'(x)\cos g(x)$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x)\sin g(x)$

3.4 Derivata di $x^{\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$

La funzione x^{α}, con α numero reale arbitrario, è definita per $x > 0$. La sua derivata è $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$:

Teorema 3.4. *La derivata di* $x^{\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ *è*

$$Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Basta scrivere x^{α} come $e^{\ln(x^{\alpha})}$ e usare le regole di derivazione dell'esponenziale e della funzione composta:

$$\begin{aligned} Dx^{\alpha} &= De^{\ln(x^{\alpha})} \\ &= De^{\alpha \ln(x)} \\ &= e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

∎

3.5 Derivata della funzione inversa

Teorema 3.5 (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione reale definita su un intervallo I e invertibile. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Posto $x = f^{-1}(y)$, il rapporto incrementale di f^{-1}, a partire a y_0, è

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)}$$

Ora si ricordi che se una funzione f è continua su un intervallo e continua, anche la sua inversa f^{-1} è continua. Quindi, se y tende a y_0, x tende a x_0, e allora il limite a secondo membro tende a $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. ∎

Esempi

1. **Derivata della radice quadrata.** L'inversa della funzione $[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \quad y = x^2$ è

$$[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \quad x = \sqrt{y}$$

Utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$D(\sqrt{y}) = \left.\frac{1}{D(x^2)}\right|_{x=\sqrt{y}} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

per ogni y in $(0, +\infty)$.

2. **Derivata del logaritmo.** L'inversa della funzione $(-\infty, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty), \quad y = e^x$ è

$$(0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty), \quad x = \ln y$$

Utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa si ha:

$$D(\ln y) = \left.\frac{1}{D(e^x)}\right|_{x=\ln y} = \frac{1}{y}$$

per ogni y in $(0, +\infty)$.

3. **Derivata di arcoseno.** La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1], \quad y = \sin x$ è invertibile e la sua inversa è

$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \quad x = \arcsin y$$

Allora

$$D(\arcsin y) = \left.\frac{1}{D(\sin x)}\right|_{x=\arcsin y} = \left.\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y}$$

Poichè $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$, si ottiene:

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per ogni y in $(-1,+1)$.

4. **Derivata di arcocoseno.** La funzione $[0,+\pi] \longrightarrow [-1,1], \quad y = \cos x$ è invertibile e la sua inversa è

$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi], \quad x = \arccos y$$

Allora

$$D(\arccos y) = \left.\frac{1}{D(\cos x)}\right|_{x=\arccos y} = \left.\frac{1}{-\sin x}\right|_{x=\arccos y}$$

Poichè $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$, si ottiene:

$$D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per ogni y in $(-1,+1)$.

5. **Derivata di arcotangente.** La funzione $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \longrightarrow (-\infty,+\infty), \quad y = \tan x$ è invertibile e la sua inversa è

$$(-\infty,+\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \quad x = \arctan y$$

Allora

$$D(\arctan y) = \left.\frac{1}{D(\tan x)}\right|_{x=\arctan y} = \cos^2 x\Big|_{x=\arctan y}$$

Essendo $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$, si ricava:

$$D(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}$$

oppure

$$D(\arctan y) = \left.\frac{1}{D(\tan x)}\right|_{x=\arctan y} = \left.\frac{1}{1+\tan^2 x}\right|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1+y^2}$$

per ogni y in $\mathbb{R}$.

3.6 Derivata della funzione reciproca $\frac{1}{f}$

Teorema 3.6 (Derivata della funzione reciproca)**.** *Sia f una funzione reale definita in un intorno di un punto x (fissato) in $\mathbb{R}$, derivabile in x e diversa da zero in x. Allora la funzione $1/f$ è derivabile in x e si ha:*

$$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{\big[f(x)\big]^2} \tag{3.10}$$

Anzitutto si osservi che f, per ipotesi derivabile nel punto x, deve essere continua in x. Quindi, essendo $f(x) \neq 0$, la funzione f si mantiene diversa da zero in tutto un intorno di x. (Ad esempio, se $f(x) > 0$, esiste un intorno di x in cui f è positiva). Ne segue che la funzione $1/f$ è definita in un intorno di x, (perché il denominatore in quell'intorno si mantiene diverso da zero).

Dimostrazione. Il rapporto incrementale (rispetto al fissato punto x) si scrive:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}$$

Quando h tende a zero, il termine $\frac{1}{h} \cdot (f(x) - f(x+h))$ tende a $-f'(x)$, mentre il denominatore tende a $f(x)^2$. Quindi il rapporto incrementale tende a $-\frac{f'(x)}{\big[f(x)\big]^2}$. ∎

3.7 Derivata del quoziente

Teorema 3.7 (Derivata del quoziente)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili, con $g(x) \neq 0$. Allora il rapporto $f(x)/g(x)$ è derivabile e si ha:*

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big[g(x)\big]^2} \tag{3.11}$$

Dimostrazione. Basta notare che $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e usare la regola di Leibniz del prodotto e la regola (3.11):

$$\begin{aligned}
D\frac{f(x)}{g(x)} &= D\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot D\frac{1}{g(x)} \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}
\end{aligned}$$