

# Note di fisica quantistica

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, aprile 2015.<sup>1</sup>

In queste note sono elencati i principali argomenti trattati a lezione. Lo scopo di questo elenco è solamente quello di aiutare lo studente a orientarsi in un campo della fisica che può apparire ostico a molti. In nessun modo queste note possono sostituire il libro di testo o qualunque altro manuale che tratti gli argomenti qui solo accennati.

## Indice

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Crisi della fisica classica e nascita della fisica quantistica</b> | <b>2</b> |
| 1.1      | Radiazione del corpo nero . . . . .                                   | 3        |
| 1.2      | Effetto fotoelettrico . . . . .                                       | 4        |
| 1.3      | Stabilità degli atomi. L'atomo di idrogeno . . . . .                  | 6        |
| 1.4      | Massa e quantità di moto di un fotone . . . . .                       | 7        |
| 1.5      | Effetto Compton . . . . .   | 7        |

---

<sup>1</sup>Nome file: fisica\_quantistica\_2015.tex

# 1 Crisi della fisica classica e nascita della fisica quantistica

*“La meccanica quantistica è la descrizione della materia e della luce in tutti i suoi dettagli e, in particolare, di ciò che avviene su scala atomica. Gli oggetti su scala molto piccola non si comportano come nessuna cosa di cui si possa avere diretta esperienza. Non si comportano come onde, né come particelle, né come nuvole, né palle da biliardo, né come pesi attaccati a molle, né come nient’altro abbiate mai visto.*

*Newton pensava che la luce fosse composta di particelle, ma fu poi scoperto che essa si comporta come un’onda. In seguito, tuttavia (all’inizio del ventesimo secolo), fu trovato che in effetti la luce talvolta si comporta da particella. Per fare un altro esempio, una volta si pensava che l’elettrone si comportasse come una particella e si scoprì poi che, sotto molti aspetti, si comporta come un’onda. Cosicché, in realtà, non si comporta in nessuno dei due modi. Ora abbiamo lasciato perdere. Diciamo: “Non è nè l’una nè l’altra cosa”.*

*Fortunatamente c’è uno spiraglio: gli elettroni si comportano esattamente come la luce. Il comportamento quantistico degli oggetti atomici (elettroni, protoni, neutroni, fotoni e così via) è lo stesso per tutti, sono “onde particelle” o qualunque altro nome vi piaccia dar loro. Così ciò che apprendiamo sulle proprietà degli elettroni vale anche per tutte le altre “particelle”, compresi i fotoni della luce.*

[...]

*Proprio perché il comportamento atomico è così diverso dalla comune esperienza, è assai difficile abituarvisi, ed esso appare strano e misterioso a chiunque, sia al principiante, che al fisico ormai sperimentato. Perfino gli esperti non lo capiscono nel modo che essi desidererebbero, ed è assai ragionevole che non ci riescano, poiché tutto quanto riguarda la diretta esperienza e l’intuizione umana, si riferisce a oggetti grandi. Sappiamo come si comportano gli oggetti grandi, ma le cose su piccola scala funzionano, semplicemente, in modo diverso. Perciò dobbiamo imparare a conoscerle in modo astratto e concettuale, e non in relazione alla nostra esperienza diretta.”*

Richard P. Feynman, *La Fisica di Feynman*, Addison-Wesley Publishing Company. 1970. Vol III, Introduzione: pg 1-2.

Alcuni dei problemi fisici importanti all’inizio del 1900 sono

1. Radiazione del corpo nero
2. Effetto fotoelettrico
3. Stabilità e dimensioni degli atomi

La teoria classica dell’elettromagnetismo non è in grado di interpretare coerentemente questi fenomeni.

## 1.1 Radiazione del corpo nero

### 1. Radiazione del corpo nero.

Un corpo nero ideale è un corpo in grado di assorbire per intero la radiazione elettromagnetica da cui è investito. Un esempio di corpo nero è rappresentato da una sfera cava di metallo in cui è stato praticato un piccolo foro. Dal foro si introduce nella sfera la radiazione elettromagnetica la quale, dopo essere stata ripetutamente riflessa dalle pareti interne, viene completamente assorbita; ciò provoca un aumento di temperatura della sfera. Il corpo nero (la sfera cava) emette a sua volta radiazione elettromagnetica, detta *radiazione del corpo nero*.

La teoria classica prevedeva che la potenza  $P$  della radiazione elettromagnetica fosse inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda, secondo la legge di *Rayleigh-Jeans*:

$$P(\lambda, T) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \quad (1.1)$$

dove  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura in gradi Kelvin del corpo nero. Secondo la teoria classica, per  $\lambda \rightarrow 0$  la potenza  $P$  tende a  $+\infty$ .

### 2. Catastrofe ultravioletta. Verso la fine del diciannovesimo secolo erano state eseguite misurazioni accurate sulla legge della radiazione del corpo nero. I dati sperimentali raccolti dai fisici dicevano qualcosa di profondamente diverso rispetto a ciò che affermava la fisica classica: il grafico che esprime la potenza della radiazione in funzione della lunghezza d'onda è riportato nella figura qui sotto

per  $\lambda \rightarrow 0$  e per  $\lambda \rightarrow +\infty$  la potenza  $P$  tende a zero. La curva ha un unico massimo in corrispondenza di una certa lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  che dipende dalla temperatura. Inoltre la distribuzione dello spettro di radiazione elettromagnetica emessa da un corpo nero a una determinata temperatura  $T$  è indipendente dalla forma e dalle dimensioni della cavità e dal materiale di cui sono fatte le pareti.

La contraddizione tra la previsione teorica e i risultati sperimentali viene indicata con il nome di *catastrofe ultravioletta*. È da questo drammatico conflitto tra teoria e esperienza che nasce la fisica quantistica.

### 3. Spiegazione della catastrofe ultravioletta. La costante di Planck.

Il 14 dicembre 1900 Max Planck, durante una riunione della Società Tedesca di Fisica di Berlino, presentò una deduzione della legge della radiazione del corpo nero formulando un'ipotesi che si discostava radicalmente dai principi della fisica classica. A questa data si fa simbolicamente risalire la nascita della fisica quantistica.

Planck ipotizzò che sia l'emissione che l'assorbimento della radiazione elettromagnetica all'interno del corpo nero fossero *quantizzate*. Pertanto l'energia termica del corpo cavo doveva essere assorbita e ceduta sempre secondo 'piccoli pacchetti di energia'. In altre parole, secondo Planck gli scambi di energia tra radiazione e materia, osservati a livello microscopico, non avvengono mediante quantità di energia piccole quanto si vuole e variabili con continuità, bensì mediante quantità discrete, dette *quanti*.

Secondo Planck l'energia è quantizzata nel senso che l'energia della radiazione elettromagnetica, alla frequenza  $f$ , è un multiplo intero del prodotto di una costante  $h$  per la frequenza

$$E_n = n h f \quad (1.2)$$

dove

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.3)$$

è la cosiddetta *costante di Planck*, una delle costanti fondamentali della natura (il fisico tedesco riuscì a determinarne il valore della costante con notevole precisione). Il fatto che il valore di  $h$  sia un numero molto piccolo spiega per quale motivo, fino ad allora, l'energia radiante sia sembrata una grandezza variabile con continuità e non per "salti".

Planck, nella sua teoria sulla radiazione di cavità, utilizza l'ipotesi di quantizzazione dell'energia come un artificio in grado di risolvere la contraddizione esistente tra le previsioni della fisica classica e i dati sperimentali; successivamente sarà A. Einstein a nobilitare questa ipotesi facendole assumere il valore di una vera e propria realtà fisica.

Il Sole, la cui temperatura superficiale è circa 6000 K è un altro esempio di corpo nero.

## 1.2 Effetto fotoelettrico

1. **Effetto fotoelettrico.** Nel 1887 Heinrich Hertz scoprì che, in certe circostanze, è possibile estrarre elettroni da una piastra di metallo colpendola con raggi luminosi. L'apparato sperimentale per misurare l'effetto fotoelettrico è quello descritto in figura: è costituito da un anello metallico, detto *anodo*, e una piastra anch'essa di metallo, detta *catodo*.

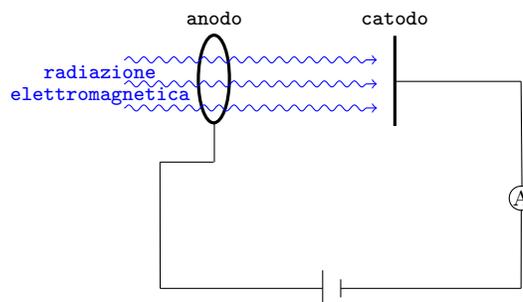


Figura 1

Se si fa incidere una radiazione elettromagnetica sulla piastra e se l'energia della radiazione elettromagnetica supera una certa soglia, detta *lavoro di estrazione*, è possibile strappare elettroni al metallo: questo movimento di cariche genera una corrente che è misurabile mediante l'amperometro. In linea di principio la presenza del generatore non è necessaria; il suo impiego serve unicamente per dirigere dal catodo verso l'anodo gli elettroni estratti, evitando che si disperdano in tutte le direzioni.

Secondo la fisica classica l'energia necessaria per strappare elettroni dal metallo si accumula con il passare del tempo. Si chiama intensità  $I$  della radiazione elettromagnetica la quantità

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S}$$

ossia la quantità di energia che attraversa la superficie  $\Delta S$  nell'unità di tempo  $\Delta t$ . Quindi, secondo la fisica classica, qualunque sia l'intensità  $I$  della radiazione incidente, dovrebbe essere sempre possibile liberare elettroni dal metallo. Infatti, in corrispondenza di un ben determinato intervallo di tempo  $\Delta t$ , si avrà  $\Delta E = I \Delta t \cdot \Delta S$ .

Gli esperimenti però mostrano una situazione sorprendente: se si colpisce una lastra di metallo con luce monocromatica (ossia onde elettromagnetiche con la stessa frequenza), si osservano i seguenti fatti

- (a) Al di sotto di una certa frequenza  $f_0$ , detta *frequenza di soglia*, non si registra passaggio di corrente, cioè non vi è estrazione di elettroni dal metallo, qualunque sia l'intensità della radiazione.
- (b) Per frequenze  $f > f_0$  si ha passaggio di corrente e l'intensità di corrente cresce al crescere dell'intensità della radiazione.
- (c) Per frequenze  $f > f_0$  l'estrazione di elettroni dal metallo avviene istantaneamente anche per valori bassi dell'intensità luminosa, cioè non si registra alcun ritardo rispetto a intensità superiori.

Quindi estrarre elettroni colpendo una piastra metallica con onde elettromagnetiche è possibile soltanto se la frequenza della luce incidente supera un certo valore di soglia e ciò avviene indipendentemente dall'intensità luminosa. L'emissione di elettroni avviene senza alcun ritardo, contraddicendo così un'altra previsione della fisica classica secondo la quale accumulare energia richiede tempo.

## 2. La spiegazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico.

L'effetto fotoelettrico mostra inequivocabilmente che *non è possibile accumulare energia con continuità sugli elettroni*.

Secondo la spiegazione di Einstein l'energia di un fascio di luce si propaga secondo piccoli 'pacchetti di energia' detti *fotoni* o *quanti*. L'energia di un fotone (quanto) di luce è proporzionale alla frequenza secondo l'uguaglianza

$$E = h f \tag{1.4}$$

Il quanto di energia può essere trasferito completamente all'elettrone che si trova sulla lastra metallica. Se  $E$  è maggiore del lavoro  $W$  di estrazione dell'elettrone (la grandezza  $W$  è una costante caratteristica del materiale, indipendente dalla frequenza  $f$ ) allora l'elettrone si allontanerà dal metallo con energia cinetica  $E_k = E - W$ , ovvero

$$E_k = h f - W \tag{1.5}$$

Inoltre, dalla teoria classica dell'elettromagnetismo, è noto che un'onda elettromagnetica si propaga nel vuoto con velocità

$$c = f \lambda \tag{1.6}$$

dove  $f$  e  $\lambda$  sono rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica. Allora, sostituendo in (1.4)  $f = \frac{c}{\lambda}$  si ottiene

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (1.7)$$

Dalle uguaglianze (1.2) e (1.7) segue immediatamente che l'energia di un quanto di luce è direttamente proporzionale alla sua frequenza e inversamente proporzionale alla sua lunghezza d'onda.

### 1.3 Stabilità degli atomi. L'atomo di idrogeno

1. **L'atomo di E. Rutherford. Il modello atomico a sistema solare.** Bombardando un foglio d'oro con particelle  $\alpha$  (particelle cariche positivamente, nuclei di  ${}^4_2\text{He}$  formati da due protoni e due neutroni) si accorse che la maggior parte delle particelle attraversava il foglio senza subire alcuna deflessione, come se gli atomi dell'oro fossero costituiti prevalentemente da spazio vuoto. Inoltre alcune particelle  $\alpha$  venivano respinte indietro. In seguito a questi risultati sorprendenti Rutherford propose per l'atomo un modello simile al sistema solare: gli elettroni, molto leggeri e di carica negativa, orbitano attorno a un piccolissimo "nucleo" positivo nel quale è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo.

2. **Le previsioni della fisica classica.**

L'atomo di idrogeno è il più leggero tra tutti gli elementi: è costituito da un protone in cui è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo e da un elettrone che gli orbita intorno<sup>2</sup>. L'elettrone possiede accelerazione in quanto descrive un'orbita non rettilinea. Poiché una qualunque carica accelerata emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, l'elettrone mentre percorre la sua orbita deve emettere energia. Ciò determina una diminuzione di energia cinetica e di conseguenza di velocità. Pertanto l'elettrone dovrebbe collassare sul suo nucleo in circa  $10^{-9}$  secondi!

La fisica classica, ancora una volta, non riesce a predire i risultati degli esperimenti: l'atomo di idrogeno è stabile mentre la teoria classica deduce il contrario.

3. **Il modello dell'atomo di Bhor.**

- (a) L'elettrone può orbitare solo lungo orbite ben definite, ciò significa che i raggi delle orbite non possono cambiare in modo continuo. Il raggio della prima orbita quantistica dell'elettrone, diciamo l'orbita *I*, è  $0,53 \text{ \AA}$ , il raggio dell'orbita *II* è 4 volte più grande, quello dell'orbita *III* è 9 volte più grande e così via. I raggi crescono come i quadrati dei numeri naturali.
- (b) L'energia cinetica dell'elettrone che si muove su una delle orbite permesse è costante.
- (c) È possibile calcolare l'energia posseduta dall'elettrone in corrispondenza di ogni orbita: esso avrà energia minima sull'orbita *I*, man mano che ci si sposta su orbite più esterne, da *I* a *II* a *III* eccetera, l'energia assume valori via via crescenti. Inoltre la differenza tra due livelli energetici adiacenti diventa sempre minore.
- (d) L'atomo di idrogeno emette radiazione quando il suo elettrone si sposta da un'orbita a quella immediatamente inferiore. Per esempio se l'idrogeno allo stato gassoso viene attraversato da corrente elettrica l'elettrone che si trova sull'orbita *I* sulle orbite superiori, cioè passa dall'orbita *I* alla *II*, *III* eccetera. Dopo alcuni giri

---

<sup>2</sup>la massa del protone è circa 1840 più grande di quella dell'elettrone

stazionari l'elettrone cade di nuovo nell'orbita immediatamente inferiore. Durante questo "trasferimento", da un orbita superiore a una inferiore, l'elettrone perde energia e l'energia perduta diventa radiazione.

## 1.4 Massa e quantità di moto di un fotone

Dalle uguaglianze  $E = h f$  e  $E = m c^2$  si ottiene la *massa dinamica di un fotone*, ossia

$$m = \frac{h f}{c^2} \quad (1.8)$$

La quantità di moto di una particella di massa  $m$  che si muove con velocità  $v$  è  $P = m v$ . Nel caso del fotone si ha

$$P_{\text{fotone}} = \frac{h f}{c^2} c = \frac{h f}{c} \quad (1.9)$$

Infine, ricordando che  $c = f \lambda$ ,

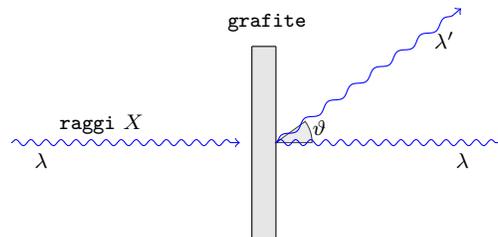
$$P_{\text{fotone}} = \frac{h}{\lambda} \quad (1.10)$$

Quindi la quantità di moto di un fotone è direttamente proporzionale alla frequenza e alla sua energia.

## 1.5 Effetto Compton

### 1. L'esperienza.

Nel 1923 il fisico americano Arthur Compton (1892-1962) fece esperimenti sulla diffusione dei raggi X nella grafite: fece incidere un fascio coerente di raggi X su un blocco di grafite e osservò che la lunghezza d'onda della radiazione diffusa dalla grafite cambiava in funzione dell'angolo di diffusione. La radiazione che attraversa la grafite senza subire deviazione conserva la stessa lunghezza d'onda mentre quella che subisce deviazione possiede una lunghezza d'onda maggiore.



**Figura 2:** Effetto Compton.

### 2. Urto fotone-elettrone.

Gli elettroni del blocco di grafite sono debolmente legati ai loro atomi, l'energia necessaria per strappare gli elettroni dagli atomi è, di solito, pari a qualche eV mentre quella di un fotone è (per una lunghezza d'onda di  $\lambda = 7,11 \cdot 10^{-11}$  m) è circa  $17,4 \cdot 10^3$  eV. Pertanto gli elettroni della grafite si possono pensare liberi; essi inoltre, possiedono

velocità trascurabile rispetto a quella del fotone. Pertanto, se si adotta il modello corpuscolare per la radiazione elettromagnetica si può spiegare l'effetto Compton mediante *urti elastici* tra i fotoni dei raggi  $X$  e gli elettroni della grafite. In termini qualitativi la situazione si può spiegare così: il fotone, che si muove con velocità  $c$ , urta un elettrone dell'atomo di grafite che è approssimativamente fermo e debolmente legato agli atomi del blocco. Durante l'urto tutta l'energia trasmessa dal fotone si trasmette all'elettrone sotto forma di energia cinetica (l'energia necessaria per strappare gli elettroni agli atomi è trascurabile). Durante l'urto vale il *principio di conservazione della quantità di moto* e quello di *conservazione dell'energia*.

### 3. Spiegazione quantitativa dell'effetto Compton.

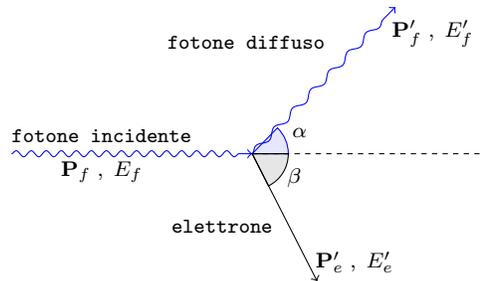
Indicando, prima dell'urto, la quantità di moto e l'energia con le lettere  $\mathbf{P}$ ,  $E$  e dopo l'urto con le medesime lettere accentate si ottiene

Principio di conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{\text{fotone}} + \mathbf{P}_{\text{elettrone}} = \mathbf{P}'_{\text{fotone}} + \mathbf{P}'_{\text{elettrone}}$$

Principio di conservazione dell'energia:

$$E_{\text{fotone}} + E_{\text{elettrone}} = E'_{\text{fotone}} + E'_{\text{elettrone}}$$



**Figura 3:** Un fotone urta contro un elettrone inizialmente in quiete. Energia e quantità di moto si conservano.

Dalle due leggi di conservazione si ricava:

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \alpha) \quad (1.11)$$

dove  $\lambda, \lambda'$  sono le lunghezze d'onda dei fotoni di raggi  $X$  prima e dopo l'urto. Dall'uguaglianza (1.11) si deduce immediatamente che la differenza di lunghezza d'onda dipende unicamente dall'angolo di dispersione  $\alpha$ .