Note di relatività speciale

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, marzo 2015.[1]

Indice

1 Tempo e simultaneità **2**

1.1 Definizione di simultaneità . . . 2

1.2 Definizione di tempo . . . 2

1.2.1 Che cosa significa "il treno arriva alle sette"? . . . 3

1.3 La relatività della simultaneità. Il futuro può precedere il passato . . . 3

2 Gli assiomi della teoria della relatività speciale **5**

3 Trasformazioni di Lorentz **6**

3.1 Osservazioni . . . 9

3.2 Come si comportano regoli e orologi in movimento . . . 10

3.3 Contrazione delle lunghezze. . . . 11

3.4 Dilatazione dei tempi. . . . 12

3.5 Teorema di addizione delle velocità: $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$ . . . 13

4 Definizioni e risultati generali della meccanica relativistica **14**

5 Esercizi **16**

5.1 Risposte . . . 18

Lo scopo principale di queste note è un invito alla lettura dei seguenti due scritti:

[1] A. Einstein, *Elettrodinamica dei corpi in movimento.* 1905. (Reperibile in rete).

[2] A. Einstein, *Relatività.* Dicembre 1916. Lo scritto è integralmente riportato nel libro A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa.* Universale Scientifica Boringhieri, 1980.

Le parti scritte in carattere enfatizzato sono citazioni tratte da questi due lavori di Einstein. Per indispensabili integrazioni e approfondimenti si consiglia:

[3] Il libro di testo.

[4] A. Carati, L. Galgani, *Teoria della relatività (ristretta o speciale).* Appunti reperibili in rete nel sito del Prof. L. Galgani.

[4] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Fisica dello spazio tempo.* Zanichelli, 1996.

[1]Nome file: Elettrodinamica_dei_corpi_in_movimento_note_2015.tex

1 Tempo e simultaneità

Chi si avvicina per la prima volta alla relatività (speciale) dovrebbe, come prima cosa, domandarsi cosa sia il ‘tempo’Ȧvviare una profonda riflessione sul concetto di tempo è indispensabile: occorre liberarsi di tutte quelle convinzioni, a volte inconsce, che ....

1.1 Definizione di simultaneità

Einstein afferma[2]: *“tutte le affermazioni riguardanti il tempo sono sempre asserzioni su eventi simultanei”*. Pertanto, come prima cosa, occorre dare una definizione adeguata di “simultaneità”.

L’esempio dei fulmini.[3]

Si pensi a una linea ferroviaria rettilinea e a due fulmini che colpiscono le rotaie in due punti A e B, molto distanti tra loro.

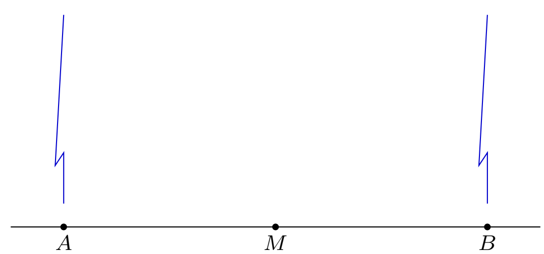

Figura 1

L’affermazione

“*i fulmini sono caduti simultaneamente*”

che cosa significa veramente? Da un’attenta analisi della situazione ci si rende conto che è necessaria una definizione precisa di *simultaneità*, cioè occorre fornire un metodo sperimentale per mezzo del quale decidere se i due fulmini si sono abbattuti simultaneamente oppure no. Un modo per farlo è questo: si misura la lunghezza del segmento AB; si pone un osservatore nel punto medio M di tale intervallo e lo si munisce di due specchi inclinati di 90°. Si dice, infine, che i due fulmini si sono abbattuti simultaneamente se l’osservatore posto in M percepisce i bagliori dei fulmini nel medesimo istante.

Questa definizione può essere ritenuta soddisfacente se si accetta l’idea che la luce viaggi lungo l’intervallo da A a M con la stessa velocità con cui viaggia lungo l’intervallo che va da B a M.

1.2 Definizione di tempo

Una definizione precisa di simultaneità permette un’adeguata definizione di “tempo”.

[2] [1], pag 4.
[3] [2], pg 58-61

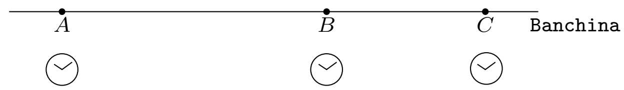

Figura 2

In tre punti distinti della linea ferroviaria, diciamo A, B, C , si pongono tre orologi identici (di medesima costruzione) e si regolano le lancette in modo tale che i tre orologi risultino sincroni (ciò può essere fatto ricorrendo alla precedente definizione di simultaneità). Per "tempo" di un evento si deve intendere la posizione delle lancette dell'orologio che si trova nelle immediate vicinanze dell'evento.

1.2.1 Che cosa significa "il treno arriva alle sette"?

La frase: "il treno arriva in stazione alle sette" ha questo significato: un osservatore, dotato di orologio, si trova sulla banchina della stazione. Egli verifica che il porsi della lancetta piccola del suo orologio sulle 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei.

Più in generale[4], *"se nel punto A dello spazio si trova un orologio, un osservatore che si trovi in A può valutare temporalmente gli eventi nell'intorno immediato di A osservando le posizioni delle lancette dell'orologio simultanee con questi eventi. Se anche nel punto B dello spazio si trova un orologio - aggiungeremo, "un orologio esattamente con le stesse proprietà di quello che si trova in A" - allora una valutazione temporale degli eventi nell'intorno immediato di B da parte di un osservatore che si trovi in B è pure possibile."*

1.3 La relatività della simultaneità. Il futuro può precedere il passato

Le considerazioni sulla simultaneità di due eventi (per esempio la caduta di due fulmini in punti distinti della linea ferroviaria) sono state riferite a un sistema di riferimento solidale con le rotaie. Cosa succede rispetto a un altro sistema di riferimento? Si supponga che un treno molto lungo si muova con velocità costante v nella direzione indicata in figura. Ovviamente gli eventi che accadono lungo la banchina possono essere valutati anche dalle persone che si trovano sul treno; il fatto notevole è che i due fulmini, simultanei rispetto alla banchina, *non* lo sono più rispetto al sistema di riferimento solidale con il treno.

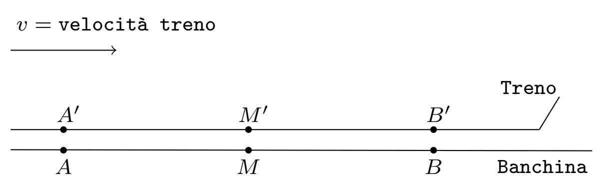

Figura 3

[5]*Allorchè diciamo che i colpi di fulmine* [caduti in] *A e B sono simultanei rispetto alla banchina intendiamo: i raggi di luce provenienti dai punti A e B dove cade il fulmine si incontrano l'uno con l'altro nel punto medio M dell'intervallo AB della banchina. Ma gli eventi A e B corrispondono anche alle posizioni A' e B' del treno. Sia M' il punto medio dell'intervallo*

[4][1], pag 4.
[5][2], pg 61,62.

$A'B'$ del treno in moto. Propprio quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto M' coincide naturalmente con il punto M, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità v del treno. Se un osservatore seduto in treno nella posizione M' non possedesse questa velocità, allora egli rimarrebbe permanentemente in M e i raggi di luce emessi dai bagliori del fulmine A e B lo raggiungerebbero simultaneamente, vale a dire s'incontrerebbero proprio dove egli è situato. Tuttavia nella realtà (considerata con riferimento alla banchina ferroviaria), egli si muove rapidamente verso il raggio di luce che proviene da B, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da A. Pertanto l'osservatore vedrà il raggio di luce emesso da B prima di vedere quello emesso da A. Gli osservatori che assumono il treno come loro corpo di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce B ha avuto luogo prima del lampo di luce A. Perveniamo così al seguente importante risultato:

> *gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (relatività della simultaneità); ogni corpo di riferimento (sistema di coordinate) ha il suo proprio tempo particolare: un'attribuzione di tempo è fornita di significato solo quando ci venga detto a quale corpo di riferimento tale attribuzione si riferisce.*

2 Gli assiomi della teoria della relatività speciale

L'elemento di novità introdotto dalla teoria della relatività ristretta (speciale) rispetto alla meccanica classica, è l'introduzione di un nuovo assioma: il principio di costanza della velocità della luce; gli altri assiomi coincidono con quelli galileiani. I sistemi di riferimento sono pensati come sistemi di coordinate dotati di regoli e orologi mediante i quali è possibile misurare le coordinate spaziali e temporali di un *evento*. Un evento è un avvenimento fisico che avviene in una precisa posizione dello spazio, in un preciso istante di tempo; è caratterizzato da tre coordinate spaziali (x, y, z) e una coordinata di tempo t.

Assioma 1. Esistenza di sistemi di riferimento inerziali.

Esistono sistemi di riferimento, detti inerziali, rispetto ai quali i corpi non soggetti a forze si muovono di moto rettilineo uniforme.

Assioma 2. Principio di relatività ristretta.

Se K e K' sono due sistemi di riferimento inerziali (cioè K' si muove, rispetto a K, con velocità uniforme v e senza rotazione) allora un qualunque fenomeno naturale è descritto nel sistema K' dalle stesse precise regole generali che descrivono il fenomeno nel sistema K.

In altre parole, tutti i sistemi inerziali sono equivalenti, nessuno di essi è privilegiato.

Assioma 3. Principio di costanza della velocità della luce.

Ogni raggio di luce si muove in un qualsiasi sistema inerziale con la stessa velocità c, indipendentemente dal fatto che il raggio di luce sia emesso da un corpo a riposo o in moto.

$$c = \frac{\texttt{cammino della luce}}{\texttt{durata}}$$

3 Trasformazioni di Lorentz

Siano K e K' sono due sistemi di riferimento inerziali. K indica convenzionalmente l'*osservatore stazionario* e K' l'*osservatore mobile*, v è la velocità (costante) di K' rispetto a K.

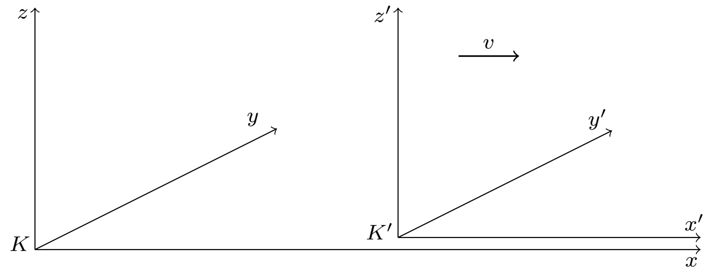

Figura 4: Il sistema di riferimento K' si muove, rispetto a K, con velocità v costante.

Nell'ipotesi che la velocità v abbia la stessa direzione e il medesimo verso dell'asse x le trasformazioni di Lorentz sono date da

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3.1}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3.2}$$

Per ottenere le trasformazioni inverse che esprimono le coordinate spazio-temporali misurate rispetto al sistema di riferimento K in funzione di quelle misurate rispetto a K' bisogna sostituire, nelle uguaglianze scritte sopra, i simboli con apice con quelli senza apice e viceversa e la velocità v con $-v$ (che fornisce la velocità di K rispetto a K')

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3.3}$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}\,x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3.4}$$

In *Relatività. Esposizione divulgativa*, A. Einstein deduce le trasformazioni di Lorentz (uguaglianze (3.1), (3.2)) secondo lo schema qui sotto riportato:

1. Si consideri un raggio di luce che si propaga con direzione e verso coincidente con quello dell'asse x. Rispetto al sistema di riferimento K, la sua posizione all'istante t è $x = ct$, dove c è la velocità della luce nel vuoto; quindi il raggio di luce si propaga, rispetto a K, secondo l'uguaglianza

$$x - ct = 0 \tag{3.5}$$

Per il principio di costanza della velocità della luce, il raggio luminoso si propaga rispetto al sistema di riferimento K' con la medesima velocità c, cioè si propaga rispetto a K' secondo l'uguaglianza

$$x' - ct' = 0 \tag{3.6}$$

Quindi, ammessa la validità del principio di costanza della velocità della luce, da (3.5) segue (3.6) e ovviamente, per questioni di simmetria, da (3.6) segue (3.5).

Se si ripete lo stesso ragionamento per un raggio luminoso che si propaga nella direzione dell'asse x con verso opposto si ottiene l'uguaglianza $x+ct = 0$ nel sistema di rifermento K e l'uguaglianza $x' + ct' = 0$ nel sistema K'.

Riassumendo, rispetto ai sistemi di riferimento K e K', si ha

$$x - ct = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - ct' = 0 \tag{3.7}$$
$$x + ct = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' + ct' = 0 \tag{3.8}$$

2. Si dimostra che (3.7) e (3.8) sono equivalenti, nell'ordine, a

$$x' - ct' \;=\; \lambda\,(x - ct) \tag{3.9}$$
$$x' + ct' \;=\; \mu\,(x + ct) \tag{3.10}$$

con λ, μ numeri reali.

3. Sommando e sottraendo le uguaglianze (3.9), (3.10) si ottiene:

$$x' \;=\; \alpha x - \beta\, ct \tag{3.11}$$
$$ct' \;=\; \alpha\, ct - \beta x \tag{3.12}$$

dove si è posto $\alpha = \frac{\lambda+\mu}{2}$, $\beta = \frac{\lambda-\mu}{2}$.

4. Se K' trasla con velocità v rispetto a K allora

$$v = \frac{\beta\, c}{\alpha} \tag{3.13}$$

Infatti, per determinare la velocità con cui K' si muove rispetto a K basta trovare la velocità di un suo punto. Ponendo, per esempio, $x' = 0$ in (3.11) si ha $v = \dfrac{x}{t} = \dfrac{\beta\, c}{\alpha}$.

5. `Determinazione delle costanti` α `e` β.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.14}$$

$$\beta = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.15}$$

Einstein osserva che il regolo unitario di K' ha una lunghezza diversa se osservato da K, e analogamente il regolo di K ha una lunghezza diversa se osservato da K'. Poi, utilizzando il principio di relatività, richiede che le due lunghezze, misurate dai due diversi sistemi di riferimento, siano uguali.

Il ragionamento di Eistein è pressappoco questo: sia r'_1 il regolo di K' aventi per estremi $x' = 0$ e $x' = 1$; esso è in quiete rispetto a K' e, per ogni t' (tempo di K'), la lunghezza di r'_1 è uguale a 1.

Si scatti una fotografia (una istantanea) di r'_1 dal sistema di riferimento K: per farlo è necessario assegnare a t (tempo di K) un valore particolare, per esempio $t = 0$; da (3.11) si ottiene

$$x' = \alpha\, x \tag{3.16}$$

Al tempo $t = 0$ l'estremo di sinistra del regolo r'_1 si trova in $x = 0$ mentre l'estremo di destra è in $x = \frac{1}{\alpha}$ (per convincersene basta porre $x' = 0$ e $x' = 1$ nell'uguaglianza (3.16) e esplicitare rispetto a x). Allora il regolo r'_1, che in K' ha lunghezza $\Delta x' = 1$ misura nella nostra fotografia

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha} \tag{3.17}$$

In modo analogo, sia r_1 il regolo di K avente per estremi $x = 0$ e $x = 1$; esso è in quiete rispetto a K e, per ogni t (tempo di K), la lunghezza di r_1 è uguale a 1.

Per realizzare una istantanea di r_1 da K' bisogna assegnare a t' (tempo di K') un valore particolare, per esempio $t' = 0$; le uguaglianze (3.11) e (3.12) assumono la forma

$$\begin{cases} x' &= \alpha x - \beta\, ct \\ t &= \dfrac{\beta}{\alpha\, c}\, x \end{cases}$$

Sostituendo nella prima uguaglianza il valore di t che si è trovato nella seconda si ottiene

$$x' = \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\, x = \alpha \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x \tag{3.18}$$

Infine, ricordando che $\dfrac{v}{c} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (si veda l'uguaglianza 3.13), si ricava

$$x' = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x \tag{3.19}$$

Pertanto il regolo r_1, che in K ha lunghezza $\Delta x = 1$, misura nella nostra fotografia

$$\Delta x' = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{3.20}$$

Per il principio di relatività, le misure Δx e $\Delta x'$ dei due regoli, devono essere uguali. Dunque si ottiene

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{3.21}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.22}$$

e, da (3.13) si ha

$$\beta = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.23}$$

6. Sostituendo i valori di α e β in (3.11), (3.12) si ottengono le trasformazioni di Lorentz (3.1) e (3.2).

3.1 Osservazioni

• Il fattore $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ è detto *fattore di Lorentz*. Deve essere $|v| < c$, cioè

> la velocità relativa di un sistema inerziale rispetto a ogni altro è sempre inferiore alla velocità della luce.

Questa condizione impone anche un *limitazione alla velocità delle particelle*, nel senso che

> una particella non può essere accelerata fino a farle raggiungere una velocità uguale o superiore a quella della luce.

Infatti, se così non fosse, dovrebbe essere possibile accelerare una particella fino al raggiungimento di una velocità $v \geq c$. Se a questo punto si smettesse di accelerare la particella e la si lasciasse libera essa continuerebbe a muoversi con velocità costante v; sarebbe pertanto possibile associarle un sistema di riferimento inerziale che traslerebbe rispetto al primo con velocità maggiore o uguale a quella della luce, contro le limitazioni imposte dalle trasformazioni di Lorentz.

• Per $v \to 0$, il fattore γ tende a 1, . Questo fatto significa che per velocità v molto inferiori alla velocità della luce, cioè per $v \ll c$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo ($x' = x - vt$, $t' = t$). In altri termini, per velocità molto inferiori rispetto alla velocità della luce, la teoria della relatività speciale si riduce alla teoria newtoniana della meccanica classica.

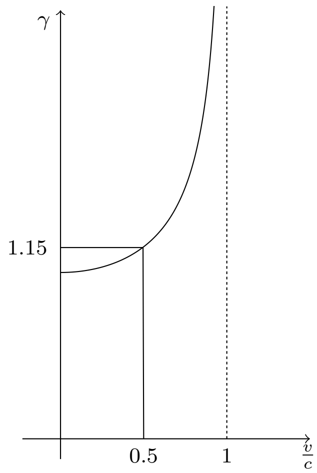

Figura 5: Il grafico di $\gamma = \gamma(\frac{v}{c})$ cresce lentamente. Quando v è la metà di c ($\frac{v}{c} = 0.5$) il fattore γ vale 1.15

- La seconda delle trasformazioni di Lorentz

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.24}$$

implica la

non assolutezza della contemporaneità .

Gli eventi contemporanei in K' si ottengono assegnando un valore particolare al tempo t'. Per esempio da (3.24), ponendo $t' = 0$, si ottiene $\frac{t - \frac{v}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$. Questa uguaglianza, letta nel sistema di riferimento K, non coincide con un sottoinsieme di contemporaneità per K, cioè con un sottoinsieme definito da $t = \text{cost}$. Infatti si ha

$$t = \frac{v\, x}{c^2} \tag{3.25}$$

In altre parole, per conoscere il tempo t' di K' non basta conoscere il tempo t di K, ma occorre conoscere anche la posizione x rispetto a K. Lorentz sintetizzava questo fatto dicendo che il "tempo è locale".

Sulla non assolutezza della contemporaneità si veda, per maggiori dettagli, [3].

3.2 Come si comportano regoli e orologi in movimento

[6]

[6] Il contenuto di questa sezione è una parafrasi di parte del paragrafo 12 del libro: A. Einstein, *Relatività. Esposizione divulgativa.* Universale Scientifica Boringhieri, pag 72,73.

3.3 Contrazione delle lunghezze.

$$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta x' \tag{3.26}$$

Da *Relatività. Esposizione divulgativa.* Un regolo lungo un metro è posto nel sistema K' in modo che il suo estremo di sinistra, diciamo A, sia $x'_A = 0$ e il suo estremo di destra, diciamo B, sia $x'_B = 1$. Per determinare la lunghezza del regolo rispetto al sistema di riferimento K è sufficiente determinare le coordinate spaziali di A e B rispetto al sistema K in un particolare istante di tempo di K.

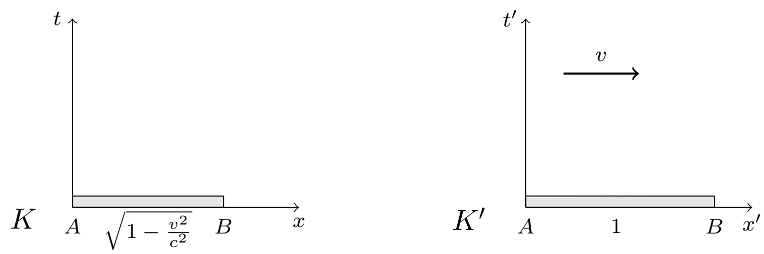

Figura 6: Il regolo, misurato rispetto a K, risulta più corto.

La prima delle trasformazioni di Lorentz, esplicitata rispetto a x, assume la forma

$$x = vt + x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.27}$$

All'istante $t = 0$ le due estremità del regolo dal punto di vista di K hanno le seguenti coordinate spaziali:

$$x_A = 0 + 0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0 \tag{3.28}$$

$$x_B = 0 + 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.29}$$

Ciò significa che un regolo rigido di un metro che si muove nella direzione della propria lunghezza con velocità v è lungo

$$x_B - x_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.30}$$

Dunque *un regolo rigido risulta più corto quando è in moto che non quando è in quiete, e tanto più corto quanto più rapidamente si muove.* Nel caso (limite) in cui $v = c$ la sua lunghezza, misurata da K, risulterebbe nulla.

Nel caso si fosse scelto un regolo di un metro, in quiete rispetto K, posizionato lungo l'asse x, si sarebbe trovato che esso, giudicato da K', ha lunghezza $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, in accordo con il principio di relatività (la verifica di questo fatto è lasciata per esercizio).

3.4 Dilatazione dei tempi.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.31}$$

Da *Relatività. Esposizione divulgativa.* Un orologio che misura i secondi è posto in quiete rispetto a K' in $x' = 0$. Siano $t' = 0$ e $t' = 1$ due battiti successivi di questo orologio. La prima delle trasformazioni di Lorentz fornisce, per $x' = 0$,

$$x = vt \tag{3.32}$$

Sostituendo (3.32) nell'ultima delle trasformazioni di Lorentz si ottiene, per $t' = 0$,

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t = 0 \tag{3.33}$$

cioè $t = 0$. Mentre per $t' = 1$ si ottiene

$$\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 \tag{3.34}$$

ossia

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.35}$$

Giudicato da K l'orologio si muove con velocità v; giudicato da questo corpo di riferimento, il tempo che trascorre fra due battiti dell'orologio non è di un secondo, ma di $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ *secondi, ossia un tempo un po' maggiore. Come conseguenza del proprio moto l'orologio cammina più lentamente che non quando è in quiete.*

Un altro modo per dedurre la "dilatazione dei tempi" dalle trasformazioni di Lorentz è il seguente: un orologio (in quiete rispetto a K') è posto nel punto di coordinate spaziali $(x', 0, 0)$. Il sistema di riferimento K' si muove (rispetto a K) di moto uniforme con velocità $\mathbf{v}$, direzione e verso coincidono con quelle dell'asse delle ascisse. Un certo fenomeno, misurato rispetto a questo orologio, ha durata $t'_2 - t'_1$ dove t'_1, t'_2 sono, nell'ordine, l'istante iniziale e quello finale del fenomeno fisico che si sta analizzando.

La durata dello stesso fenomeno, misurata da un orologio solidale con K, sarà $t_2 - t_1$. Istante iniziale e finale sono forniti dalla equazione di Lorentz (3.4):

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}\,x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.36}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}\,x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.37}$$

Sottrendo membro a membro si ottiene:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.38}$$

3.5 Teorema di addizione delle velocità: $c + v = c$

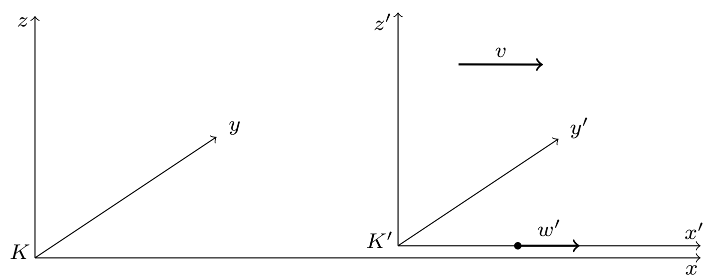

Figura 7

Se un oggetto si muove, rispetto al sistema K', con velocità uniforme w', il suo moto è regolato (in K') dall'equazione $x' = w't'$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, è possibile esprimere x' e t' in funzione di x e t: la prima equazione di Lorentz assume la forma

$$w't' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.39}$$

e sostituendo in (3.39) l'equazione di Lorentz che esprime t' si ottiene

$$x = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}\,t \tag{3.40}$$

Quindi, indicata con w la velocità dell'oggetto rispetto al sistema di riferimento K si ottiene il seguente

Teorema 3.1 (di addizione delle velocità)**.**

$$w = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}} \tag{3.41}$$

4 Definizioni e risultati generali della meccanica relativistica

1. `Massa relativistica.`

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.1}$$

2. `Quantità di moto.`

$$\mathbf{P} = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \tag{4.2}$$

3. `Energia.` Una particella di massa M, in moto con velocità v, possiede energia

$$E = Mc^2 \tag{4.3}$$

Tenendo conto dell'uguaglianza (4.1) si ottiene

$$E = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \tag{4.4}$$

In fisica classica energia e massa non hanno alcun legame; la legge di conservazione della massa e la legge di conservazione dell'energia sono due principi differenti. Nella teoria della relatività massa e energia sono equivalenti secondo l'uguaglianza (4.3).

Poichè c^2 è un numero molto grande, l'energia è equivalente a una quantità molto piccola di massa mentre la massa è equivalente a una quantità molto grande di energia. Per esempio, la quantità di energia per mezzo della quale è possibile trasformare in vapore 10^6 kg di acqua è equivalente a una massa di meno di 30 mg; diversamente un grammo di massa di un corpo qualsiasi corrisponde a una quntità elevatissima di energia: circa $9 \cdot 10^{20}$ erg.

La fisica classica si limita a studiare processi per i quali l'energia varia di poco; per tali processi la legge di conservazione della massa è ancora valida. Inoltre, se non si ha a che fare con trasformazioni di materia corpuscolare in radiazione (come nel caso delle reazioni nucleari) anche la legge di conservazione dell'energia è valida. Quindi la teoria della relatività ristretta non falsifica la fisica classica ma ne definisce i limiti di validità.

Un altra differenza tra le due teorie è la seguente: in fisica classica la velocità di un corpo può crescere indefinitamente mentre la sua massa rimane costante, in relatività esiste un limite superiore per le velocità ($v < c$) mentre massa e energia cinetica possono crescere indefinitamente al tendere di v a c.

Se $v = 0$ l'energia della particella non è zero, vale

$$E_0 = M_0\, c^2 \tag{4.5}$$

Ciò significa che una particella possiede una quantità di energia pari a $M_0\, c^2$, che è indipendente dal suo stato di moto. L'energia intrinseca di una particella si chiama "energia a riposo". Durante un'esplosione nucleare parte della massa M_0 viene distrutta e una enorme quantità dell'energia $M_0\, c^2$ viene convertita e poi liberata. In generale, se fosse possibile distruggere una massa a riposo M_0, si libererebbe una quantità di energia pari a $M_0\, c^2$.

Se $v \to c$ l'energia K tende a $+\infty$.

Se $v << c$, il rapporto $\frac{v}{c}$ è piccolo rispetto all'unità. Sviluppando in serie di Taylor il secondo membro dell'uguaglianza (4.3) si ottiene

$$M_0\, c^2 + M_0\, \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} M_0\, \frac{v^4}{c^2} + \dots \tag{4.6}$$

Il primo termine $M_0\, c^2$ non contiene la velocità mentre il terzo, $\frac{3}{8} m\, \frac{v^4}{c^2}$, è trascurabile (nell'ipotesi $v << c$). Ciò spiega perchè in fisica classica la definizione di energia cinetica coincida con il secondo termine: $K = \frac{1}{2} m v^2$.

5 Esercizi

Esercizio 5.1. *Un neutrino (una particella elementare) si muove rispetto a un osservatore solidale con la Terra con velocità $v = c$. Un altro osservatore, diciamo K', si muove con velocità w verso il neutrino. Qual è la velocità del neutrino per l'osservatore K'?*

Esercizio 5.2. *Due oggetti A e B si muovono, rispetto a un osservatore posto in P, di moto rettilineo uniforme con stessa direzione e verso. Le intensità delle loro velocità sono, nell'ordine, $v_A = 0,806\,c$ e $v_B = 0,906\,c$. Qual è la velocità dell'oggetto B rispetto a un osservatore solidale con A?*

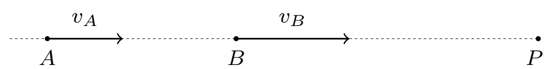

Figura 8

Esercizio 5.3. *Samanta Cristoforetti si trova attualmente in orbita attorno alla Terra. Alla fine della sua permanenza nello spazio sarà più giovane?*

Esercizio 5.4. *Un righello misura esattamente un metro. A quale velocità deve viaggiare un osservatore affinchè, misurando il righello ottenga il valore di $50\,\mathrm{cm}$?*

Esercizio 5.5. *Una navicella spaziale di forma cilindrica (lunghezza $= 35,00\,\mathrm{m}$, diametro $= 8,25\,\mathrm{m}$) sta sfrecciando parallelamente alla superficie terrestre alla velocità (costante) di $2,44 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ nella direzione dell'asse del cilindro. Quali sono le dimensioni della navicella misurate dalla Terra?*

Esercizio 5.6. *Gli elettroni in un acceleratore di particelle possono raggiungere velocità v prossime a quella della luce. Trovare nei seguenti due casi di quante volte aumenta la massa dell'elettrone rispetto alla sua massa a riposo (M_0)*

(a) $v = 0,999999955\,c$

(b) $v = 0,999000000\,c$

Esercizio 5.7. *Trovare l'energia che bisogna fornire a un elettrone affinchè si muova con velocità pari a*

(a) $v = 0,999999955\,c$

(b) $v = 0,999000000\,c$

La massa a riposo dell'elettrone è $M_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Esercizio 5.8. *Due oggetti, diciamo A e B, si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme, uno verso l'altro. Le loro velocità rispetto a un osservatore solidale con la Terra sono, nell'ordine, v_a e v_b.*

1. *Secondo la fisica classica con quale velocità l'oggetto B vede l'oggetto A venire verso di sè? Che cosa cambia secondo la relatività ristretta?*
2. *Risolvere il quesito precedente nel caso $v_a = 10000\,\mathrm{m/s}$ e $v_b = 8100\,\mathrm{m/s}$.*

<u>*Curiosità dalla rete.*</u>

1. *Il veicolo con equipaggio umano che ha raggiunto la più alta velocità è stato il Modulo di Comando denominato "Charlie Brown" della missione Apollo 10 che il 26 maggio 1969 raggiunse la velocità di* $39897\,\mathrm{km/h} = 11,08\,\mathrm{km/s}$
2. *La massima velocità mai raggiunta da un oggetto creato dall'uomo è stata di* $252792\,\mathrm{km/h}$, *ossia di* $70,22\,\mathrm{km/s}$, *raggiunta dalla sonda spaziale "Helios 2" grazie alla spinta ricevuta dal campo gravitazionale del Sole. La sonda è stata lanciata il 16 gennaio 1976 ed è arrivata a* 43 *milioni di chilometri dal Sole.*
3. *La più alta velocità per un aereo in grado di decollare e atterrare autonomamente appartiene al A-12 che raggiunse la velocità di Mach* $3,35$, *cioè* $3500\,\mathrm{km/h}$ *all'altitudine di* $23000\,\mathrm{m}$. *Gli attuali F* 35 *raggiungono in quota la velocità massima di Mach* $1,7$.

Esercizio 5.9 (Paradosso dei due gemelli.)**.** *Uno di due gemelli di* 25 *anni decide di intraprendere un viaggio spaziale mentre l'altro rimane sulla Terra. Il viaggio viene percorso alla velocità costante di* $0,95\,c$ *sia all'andata che al ritorno e il viaggio ha la durata di* 39 *anni (velocità e tempo sono misurati dalla Terra). Determinare le età dei due gemelli al termine del viaggio.*

Esercizio 5.10 (Vero o Falso?)**.** *Due sistemi di riferimento sono in moto relativo tra loro (uno dei due sistemi si muove con velocità v rispetto all'altro). Per il principio di relatività le seguenti grandezze, misurate nei due sistemi di riferimento, sono le stesse*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Velocità di un elettrone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Carica dell'elettrone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Valore della velocità della luce nel vuoto.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Energia cinetica del protone.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Intervallo di tempo tra due eventi.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Ordine degli elementi nella tavola periodica.*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ *Prima legge di Newton*

Esercizio 5.11. *Trovare l'energia (a riposo) contenuta in un grammo di sabbia.*

Esercizio 5.12. *Un acceleratore di protoni è in grado di imprimere a un protone un'energia cinetica di* $10^{-2}\,\mathrm{erg}$. *Di quante volte aumenta la sua massa?*

5.1 Risposte

Esercizio 5.1 La velocità del neutrino misurata dall'osservatore K' è

$$w = \frac{c + w'}{1 + \frac{c\,w'}{c^2}} = \frac{c^2(c + w')}{c(c + w')} = c$$

Pertanto qualunque cosa si muova alla velocità della luce, possiede velocità c rispetto a qualsiasi osservatore, indipendentemente dalla velocità di quest'ultimo.

Esercizio 5.2

Sia K' il sistema di riferimento solidale con P e K quello solidale con A. La velocità di K' rispetto a K è $-v_A$ mentre l'oggetto B si muove, rispetto a K', con velocità v_B.

La velocità w dell'oggetto B rispetto ad A si ottiene dal teorema di addizione delle velocità $w = \dfrac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}$, ponendo $v = -v_A$, $w' = v_B$. Si ottiene

$$w = \frac{(0,906 - 0,806)c}{1 - (0,906 \cdot 0,806)} = \frac{0,106}{0,269764}\, c = 0,39\, c$$

Esercizio 5.3 Sì. Tuttavia il fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ è talmente prossimo a 1 che la differenza non è apprezzabile.

Esercizio 5.4 Se la velocità, misurata da K, del sistema di riferimento K' è v si ha

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta x$$

Posto $\Delta x' = 0,50\,\mathrm{m}$ e $\Delta x = 1\,\mathrm{m}$ si ottiene

$0,50 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; $\quad (0,50)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$; $\quad 0,25\, c^2 = c^2 - v^2$; $\quad v^2 = 0.75\, c$. Ossia

$$v = \sqrt{0,75}\, c = 0,87\, c$$

Esercizio 5.6 $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Quindi

(a) $M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(0,999999955)^2}} = \frac{M_0}{3 \cdot 10^{-4}} \approx 3300\, M_0$. La massa dell'elettrone è circa 3300 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

(b) $M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(0,999)^2}} = \frac{M_0}{4,47 \cdot 10^{-2}} \approx 22\, M_0$. La massa dell'elettrone è circa 22 volte maggiore rispetto alla sua massa a riposo.

Esercizio 5.7 $\Delta E = M\, c^2 - M_0\, c^2 = \dfrac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, c^2 - M_0\, c^2 = M_0\, c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$

(a) $\Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,999999955^2}} - 1 \right) \approx 81.99 \cdot 10^{-15} \cdot 3332 \approx 2,73 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$.

(b) $\Delta E = (9,11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0,999^2}} - 1 \right) \approx 81.99 \cdot 10^{-15} \cdot 21,37 \approx 1,75 \cdot 10^{-12}\,\text{J}.$

Esercizio 5.9 Sia A il gemello che rimane sulla Terra e B quello che compie il viaggio nello spazio. Per A il viaggio ha la durata di esattamente 39 anni, quindi la sua età, al ritorno di B sulla Terra, è di 64 anni.

Per quanto riguarda B la situazione è diversa. Durante il viaggio di andata, la distanza che lo separa dalla stella è contratta del fattore $\sqrt{1-0,95^2}$. Quindi la distanza Terra-Stella è di $39 : 2 = 19,5$ anni luce se misurata da A, mentre è di $\approx 0,31 \cdot 39 \approx 12,18$ anni luce se misurata da B. Allo stesso tempo B vede la Terra allontanarsi alla velocità di $0,95\,c$, il tempo che egli calcola per raggiungere la stella è allora di $\sqrt{1-0,95^2} \cdot 19,5$ anni luce $= 6,1$ anni, ossia $12,2$ anni includendo anche il viaggio di ritorno. Pertanto il gemello B, al termine del viaggio, avrà $25 + 12,2 = 37,2$ anni, $26,8$ anni in meno del fratello A.