L'elettrodinamica dei corpi in movimento[1]

A. Einstein

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica. Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al "mezzo luminoso" portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche, come già è dimostrato per le quantità del prim'ordine. Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività") come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti. Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice ed esente da contraddizioni, costruita sulla base della teoria di Maxwell per i corpi in quiete. L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come superflua, in quanto secondo l'interpretazione sviluppata non si introduce uno "spazio assoluto in quiete" dotato di proprietà speciali, né si associa un vettore velocità ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici. La teoria da svilupparsi si fonda - come ogni altra elettrodinamica - sulla cinematica dei corpi rigidi, poiché le affermazioni di una tale teoria riguardano relazioni tra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di queste circostanze è la radice delle difficoltà, con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento attualmente deve lottare.

I. Parte cinematica

§1. Definizione della simultaneità

Si assuma un sistema di coordinate, nel quale valgano le equazioni meccaniche di Newton. Chiamiamo questo sistema di coordinate il "sistema a riposo", per distinguerlo nel discorso dai sistemi di coordinate che si introdurranno in seguito e per precisare la descrizione.

[1]Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905).

Se un punto materiale è a riposo rispetto a questo sistema di coordinate, la sua posizione rispetto a quest'ultimo può essere determinata mediante regoli rigidi utilizzando i metodi della geometria euclidea, e può essere espressa in coordinate cartesiane. Se vogliamo descrivere il *moto* di un punto materiale, diamo i valori delle sue coordinate in funzione del tempo. Ora si deve tenere ben in mente che una descrizione matematica siffatta ha un significato fisico solo quando si sia detto chiaramente in precedenza che cosa si intende qui per "tempo". Dobbiamo tener presente che tutte le nostre asserzioni nelle quali il tempo gioca un ruolo sono sempre asserzioni su *eventi simultanei.* Quando per esempio dico: "Quel treno arriva qui alle ore 7," ciò significa: "Il porsi della lancetta piccola del mio orologio sulle 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei".[2]

Potrebbe sembrare che tutte le difficoltà che riguardano la definizione del "tempo" si potrebbero superare se sostituissi al posto di "tempo" l'espressione "posizione della lancetta piccola del mio orologio". Una definizione del genere basta infatti quando si tratta di definire un tempo indipendentemente dalla posizione nella quale si trova l'orologio; ma la definizione non basta più quando si tratta di collegare temporalmente serie di eventi che abbiano luogo in posti diversi, ovvero - il che è equivalente - valutare temporalmente eventi che abbiano luogo in posti lontani dall'orologio.

Potremmo altresì accontentarci di valutare temporalmente gli eventi mediante un osservatore che si trovi assieme all'orologio nell'origine delle coordinate, e che associ la corrispondente posizione delle lancette dell'orologio ad ogni segnale luminoso che giunga a lui attraverso lo spazio vuoto, e che rechi testimonianza dell'evento da valutare. Una tale coordinazione porta con sé tuttavia l'inconveniente di non essere indipendente dal punto di vista dell'osservatore che accudisce all'orologio, come sappiamo dall'esperienza. Giungiamo ad una determinazione molto più pratica mediante la seguente considerazione.

Se nel punto A dello spazio si trova un orologio, un osservatore che si trovi in A può valutare temporalmente gli eventi nell'intorno immediato di A osservando le posizioni delle lancette dell'orologio simultanee con questi eventi. Se anche nel punto B dello spazio si trova un orologio - aggiungeremo, "un orologio esattamente con le stesse proprietà di quello che si trova in A" - allora una valutazione temporale degli eventi nell'intorno immediato di B da parte di un osservatore che si trovi in B è pure possibile. Non è possibile tuttavia, senza un'ulteriore deliberazione, confrontare temporalmente un evento in A con un evento in B; finora abbiamo definito soltanto un "tempo di A" ed un "tempo di B", ma non abbiamo definito alcun "tempo" per A e B complessivamente. Quest'ultimo tempo può essere definito soltanto quando si assuma *per definizione* che il "tempo" che la luce impiega per andare da A a B è uguale al "tempo" che essa impiega per andare da B ad A. Ossia, parta un raggio di luce al "tempo di A" t_A da A verso B, sia al "tempo di B" t_B riflesso verso A e ritorni ad A al "tempo di A" t'_A. I due orologi per definizione camminano sincroni quando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Assumiamo che questa definizione di sincronismo sia possibile in modo esente da contraddizioni, che quindi valgano le condizioni:

[2]Non si considererà qui l' imprecisione che si introduce nel concetto di simultaneità di due eventi (approssimativamente) nello stesso posto e che viene superata con l'astrazione.

1. Quando l'orologio in B cammina sincrono con l'orologio in A, l'orologio in A cammina sincrono con l'orologio in B.

2. Quando l'orologio in A cammina sincrono sia con l'orologio in B che con l'orologio in C, gli orologi in B e C camminano in modi mutuamente sincroni.

Abbiamo così determinato con l'aiuto di certe esperienze fisiche (pensate) che cosa si debba intendere per orologi a riposo che camminano sincroni e si trovano in posti separati e con questo evidentemente abbiamo ottenuto una definizione di "simultaneo" e di "tempo". Il "tempo" di un evento è l'indicazione simultanea con l'evento di un orologio a riposo che si trova nella posizione dell'evento, che cammina sincrono con un determinato orologio a riposo, e cioè per tutte le determinazioni di tempo compiute con l'orologio stesso.

Assumiamo secondo l'esperienza che la quantità

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

sia una costante universale (la velocità della luce nello spazio vuoto).

È essenziale che noi abbiamo definito il tempo mediante orologi a riposo nel sistema a riposo; chiamiamo il tempo ora definito, a motivo di questa associazione con il sistema a riposo "il tempo del sistema a riposo".

§2. Sulla relatività delle lunghezze e dei tempi.

Le considerazioni seguenti si fondano sul principio di relatività e sul principio della costanza della velocità della luce, principi che definiamo nel modo seguente.

1. Le leggi secondo le quali evolvono gli stati dei sistemi fisici sono indipendenti da quale di due sistemi di coordinate che si trovino uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme queste evoluzioni di stato siano osservate.

2. Ogni raggio di luce si muove nel sistema di coordinate "a riposo" con la velocità fissa V, indipendentemente dal fatto che questo raggio di luce sia emesso da un corpo a riposo o in moto. Si ha

$$\text{Velocità} = \frac{\text{Cammino della luce}}{\text{Durata}},$$

dove la "durata" va intesa nel senso della definizione del §1.

Sia dato un regolo rigido a riposo; esso abbia, se misurato con un campione di lunghezza ugualmente a riposo, la lunghezza l. Pensiamo ora che l'asse del regolo giaccia nella direzione dell'asse X del sistema di coordinate a riposo, e che sia impartito in seguito al regolo un moto di traslazione parallela uniforme (velocità v) lungo l'asse X nel senso delle x crescenti. Ci interroghiamo ora riguardo alla lunghezza del regolo *in moto*, che pensiamo trovata mediante le due operazioni seguenti:

a) L'osservatore si muove insieme con il campione di lunghezza anzidetto assieme al regolo da misurare e misura direttamente con l'accostamento del campione la lunghezza del regolo, proprio come quando regolo da misurare, osservatore e campione di lunghezza si trovano a riposo.

b) L'osservatore determina mediante orologi a riposo disposti nel sistema a riposo, sincronizzati secondo §1, in quali punti del sistema a riposo si trovano l'inizio e la fine del regolo da misurare ad un dato tempo t. La separazione tra i due punti, misurata con il campione di lunghezza già utilizzato, in questo caso a riposo, è parimenti una lunghezza, che si può contrassegnare come "lunghezza del regolo". Secondo il principio di relatività la lunghezza che si trova mediante l'operazione a), che indicheremo come "la lunghezza del regolo nel sistema in moto", dev'essere uguale alla lunghezza l del regolo in quiete.

La lunghezza che si trova con l'operazione b), che chiameremo "la lunghezza del regolo (in moto) nel sistema a riposo", la determineremo in base ai nostri due principi, e troveremo che essa è diversa da l.

La cinematica generalmente utilizzata assume tacitamente che le lunghezze determinate mediante le due operazioni su menzionate siano esattamente uguali, ovvero in altre parole, che un corpo rigido in moto al tempo t per quanto riguarda le relazioni geometriche sia completamente sostituibile dallo *stesso* corpo, che *sia a riposo* in un determinato posto.

Immaginiamo che ai due estremi del regolo (A e B) si faccia uso di orologi che sono sincroni con gli orologi del sistema a riposo, cioè tali che le loro indicazioni corrispondano sempre al "tempo del sistema a riposo" nella posizione nella quale esattamente si trovano; questi orologi sono quindi "sincroni nel sistema a riposo".

Immaginiamo inoltre che in corrispondenza di ciascun orologio si trovi un osservatore, e che questo osservatore applichi ai due orologi il criterio enunciato nel §1 per il cammino sincrono di due orologi. Al tempo[3] t_A parte un raggio di luce da A, viene riflesso in B al tempo t_B e ritorna ad A al tempo t'_A. Tenendo conto del principio della costanza della velocità della luce troviamo:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

dove r_{AB} significa la lunghezza del regolo in moto - misurata nel sistema a riposo. L'osservatore che si muove con il regolo in moto troverà quindi che i due orologi non camminano sincroni, mentre l'osservatore che si trova nel sistema in quiete interpreterà gli orologi come procedenti in sincronia.

Vediamo quindi che non possiamo attribuire al concetto di simultaneità alcun significato *assoluto*, ma che invece due eventi che, considerati in un sistema di coordinate, sono simultanei, se considerati da un sistema che si muove relativamente a questo sistema, non si possono più assumere come simultanei.

§3. Teoria delle trasformazioni delle coordinate e del tempo dal sistema a riposo ad uno che si trovi relativamente a questo in moto di traslazione uniforme.

Vi siano nello spazio "a riposo" due sistemi di coordinate, cioè due sistemi definiti da tre linee materiali rigide, ortogonali tra di loro, uscenti dallo stesso punto. Possiamo far coincidere gli assi X dei due sistemi, e siano gli assi Y e Z rispettivamente paralleli. Ad ogni sistema si assegnino un campione di lunghezza rigido ed un certo

[3] "tempo" significa qui "tempo del sistema a riposo" e parimenti "posizione delle lancette dell'orologio in moto, che si trova nella posizione di cui si parla."

numero di orologi, ed entrambi i campioni di lunghezza come pure tutti gli orologi di entrambi i sistemi siano esattamente uguali tra loro.

Si imprima ora all'origine di uno dei due sistemi (k) una velocità v (costante) nella direzione degli x crescenti dell'altro sistema (K) a riposo, velocità che si possa comunicare anche agli assi coordinati, al campione di lunghezza relativo e pure agli orologi. Ad ogni tempo t del sistema a riposo K corrisponde quindi una determinata posizione degli assi del sistema in moto e in base alla simmetria siamo autorizzati ad assumere che il moto di k possa esser tale che gli assi del sistema in moto al tempo t (con "t" si indica sempre un tempo del sistema a riposo) siano paralleli agli assi del sistema a riposo.

Pensiamo ora di misurare lo spazio sia dal sistema a riposo K per mezzo del campione di lunghezza a riposo che dal sistema in moto k mediante il campione di lunghezza che si muove con esso, e di determinare così le coordinate x, y, z, rispettivamente ξ, η, ζ. Si determini poi con gli orologi che si trovano a riposo nel sistema a riposo, attraverso segnali di luce nel modo descritto nel §1, il tempo t del sistema a riposo per tutti i punti di quest'ultimo, dove si trovino degli orologi; analogamente si determini il tempo τ del sistema in moto per tutti i punti del sistema in moto, nei quali si trovino orologi a riposo rispetto a quest'ultimo, applicando il suddetto metodo del §1 dei segnali luminosi tra i punti nei quali si trovano questi ultimi orologi.

A ogni sistema di valori x, y, z, t che determinano completamente la posizione e il tempo di un evento nel sistema a riposo corrisponde un sistema di valori ξ, η, ζ, τ che fissa un tale evento relativamente al sistema k, e bisogna ora assolvere il compito di trovare il sistema di equazioni che legano queste quantità.

È chiaro che le equazioni devono essere *lineari* a causa delle proprietà di omogeneità che noi attribuiamo allo spazio ed al tempo.

Se poniamo $x' = x - vt$, è chiaro che ad un punto a riposo nel sistema k spetta un insieme di valori x', y, z indipendente dal tempo. Determiniamo in primo luogo τ in funzione di x', y, z e t. A tal fine dobbiamo esprimere in equazioni che τ rappresenta il complesso delle indicazioni degli orologi a riposo nel sistema k, che sono stati resi sincroni secondo la regola data nel §1. Dall'origine del sistema k si mandi al tempo τ_0 un raggio di luce lungo l'asse X verso x' e lo si rifletta da lì al tempo τ_1 verso l'origine delle coordinate, dove esso arrivi al tempo τ_2; dev'essere allora:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

ovvero, se si aggiungono gli argomenti della funzione τ e si applica il principio della costanza della velocità della luce nel sistema a riposo:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Da qui segue, scegliendo x' infinitamente piccolo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

ovvero

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

È da notare che avremmo potuto scegliere come punto di partenza del raggio luminoso ogni altro punto al posto dell'origine delle coordinate e che l'equazione ora determinata vale perciò per tutti i valori di x', y, z.

Una analoga trattazione - applicata agli assi H e Z, quando si osservi che la luce lungo questi assi, considerata dal sistema a riposo, si propaga costantemente con la velocità $\sqrt{V^2 - v^2}$, porta a

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Da queste equazioni segue che τ è una funzione *lineare*:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

dove a è una funzione provvisoriamente incognita $\varphi(v)$ e per brevità si è assunto che nell'origine di k per $\tau = 0$ sia $t = 0$.

Per mezzo di questi risultati è facile trovare le quantità ξ, η, ζ in modo tale da esprimere con le equazioni che la luce (come richiede il principio della costanza della velocità della luce assieme al principio di relatività) anche quando è misurata nel sistema in moto si propaghi con la velocità V. Per un raggio di luce emesso al tempo $\tau = 0$ nella direzione degli ξ crescenti vale:

$$\xi = V\tau,$$

ovvero

$$\xi = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

Ma ora il raggio di luce misurato nel sistema a riposo si muove rispetto all'origine di k con la velocità $V - v$, sicché:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Sostituiamo questo valore di t nell'equazione per ξ, e otteniamo:

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

In modo analogo si trova considerando raggi di luce che si muovano lungo gli altri due assi:

$$\eta = V\tau = aV \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

dove

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \; x' = 0;$$

quindi

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

e

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Sostituiamo al posto di x' il suo valore e otteniamo:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta\left(x - vt\right),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e φ è una funzione di v per ora incognita. Poiché non si fa nessuna ipotesi sulla posizione dell'origine del sistema in moto e sul punto di zero di τ, è sempre possibile aggiungere al secondo membro di queste equazioni una costante additiva. Dobbiamo ora dimostrare che ogni raggio di luce, misurato nel sistema in moto, si propaga con la velocità V, nel caso che ciò si verifichi, come abbiamo assunto, nel sistema a riposo; non abbiamo fornito ancora la dimostrazione che il principio della costanza della velocità della luce sia compatibile con il principio di relatività.

Al tempo $t = \tau = 0$ sia emessa dall'origine delle coordinate dei due sistemi a questo tempo coincidente un'onda sferica, che si propaghi nel sistema k con la velocità V. Sia (x, y, z) un punto raggiunto da quest'onda, allora

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Trasformiamo questa equazione per mezzo delle nostre equazioni di trasformazione e otteniamo con un calcolo semplice:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

L'onda in esame, anche quando la si consideri nel sistema in moto, è quindi un'onda sferica con la velocità di propagazione V. Risulta da qui che i nostri due principi fondamentali sono compatibili tra loro. Nella equazioni di trasformazione sviluppate compare ancora una funzione incognita φ di v, che vogliamo ora determinare.

Introduciamo a questo scopo ancora un terzo sistema di coordinate K', che sia pensato in moto di traslazione parallela rispetto al sistema k parallelamente all'asse Ξ, in modo tale che la sua origine si muova con la velocità $-v$ lungo l'asse Ξ. Al tempo $t = 0$ tutti e tre i punti origine delle coordinate coincidano e sia per $t = x = y = z = 0$ uguale a zero il tempo t' del sistema K'. Chiamiamo x', y', z' le coordinate, misurate nel sistema K', e otteniamo applicando due volte le nostre equazioni di trasformazione:

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t,$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\xi + v\tau\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)x,$$
$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y,$$
$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z.$$

Poiché le relazioni tra x', y', z' e x, y, z non contengono il tempo t, i due sistemi K e K' sono mutuamente a riposo, ed è chiaro che la trasformazione da K a K' dev'essere la trasformazione identica. È quindi

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Ci chiediamo ora qual è il significato di $\varphi(v)$. Fissiamo l'attenzione sul tratto dell'asse H del sistema k, compreso tra $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Questo tratto dell'asse H è un regolo che si muove rispetto al sistema K con la velocità v ortogonalmente al suo asse, e le cui estremità possiedono in K le coordinate

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\varphi(v)},\ z_1 = 0$$

e

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0.$$

La lunghezza del regolo, misurata in K, è quindi $l/\varphi(v)$; da ciò risulta definito il significato della funzione φ. Per ragioni di simmetria è ora evidente che la lunghezza, misurata nel sistema a riposo, di un dato regolo che si muova ortogonalmente al proprio asse, può dipendere solo dalla velocità, ma non dalla direzione e dal verso del moto. Quindi la lunghezza del regolo in moto, misurata nel sistema a riposo, non muta se si scambia v con $-v$. Da qui segue

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

ovvero

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Da questa e dalla relazione trovata prima segue che dev'essere $\varphi(v) = 1$, di modo che le relazioni trovate diventano:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta\left(x - vt\right),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§4. Significato fisico delle equazioni ottenute, riguardante corpi rigidi in moto e orologi in moto.

Consideriamo una sfera rigida[4] di raggio R, che sia in quiete relativamente al sistema in moto k, e il cui centro stia nell'origine delle coordinate di k. L'equazione della superficie di questa sfera che si muove relativamente al sistema K con la velocità v è :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

L'equazione di questa superficie, espressa in x, y, z al tempo $t = 0$ è:

$$\frac{x^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un corpo rigido, che misurato nello stato a riposo ha la forma di una sfera, ha quindi nello stato di moto - considerato dal sistema a riposo - la forma di un ellissoide di rotazione con gli assi

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Mentre quindi le dimensioni Y e Z della sfera (quindi anche di ogni corpo rigido di forma arbitraria) non appaiono modificate con il movimento, la dimensione X appare accorciata nel rapporto $1 : [1 - (v/V)^2]^{1/2}$, quindi tanto più quanto più grande è v. Per $v = V$ tutti gli oggetti in moto - considerati dal sistema "a riposo" - si riducono alla forma di superfici. Per velocità superluminali le nostre considerazioni sono prive di senso; troveremo del resto nella trattazione successiva che la velocità della luce nella nostra teoria gioca fisicamente il ruolo della velocità infinitamente grande.

È chiaro che i medesimi risultati valgono per corpi a riposo nel sistema "a riposo", quando li si considerino da un sistema in moto uniforme.

Consideriamo inoltre uno degli orologi, che a riposo rispetto al sistema a riposo sono capaci di dare il tempo t, a riposo rispetto al sistema in moto, posto nell'origine di k e così regolato da dare il tempo τ. Con che velocità cammina questo orologio, considerato dal sistema a riposo?

Tra le quantità x, t e τ, che si riferiscono alla posizione di questo orologio, valgono evidentemente le equazioni:

$$\tau = \frac{\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e

$$x = vt.$$

È quindi

$$\tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right] t,$$

dalla quale segue che l'indicazione dell'orologio (considerata nel sistema a riposo) ritarda al secondo di $[1 - (1 - (v/V)^2)^{1/2}]$ secondi ovvero - a meno di quantità dell'ordine quarto e più alto, di $(1/2)\left(\frac{v}{V}\right)^2$ secondi.

[4] Cioè un corpo, che esaminato a riposo possieda forma sferica.

Da qui risulta la seguente conseguenza singolare. Nei punti A e B di K siano disposti due orologi a riposo, che camminano sincroni quando siano considerati nel sistema a riposo, e si muova l'orologio in A con la velocità v lungo la congiungente verso B, allora all'arrivo di quest'orologio in B i due orologi non sono più sincroni, ma l'orologio mosso da A a B resta indietro rispetto a quello che dall'inizio si trova in B di $(1/2)\, t\left(v^2/V^2\right)$ secondi (a meno di quantità di ordine quarto e più alto), dove t è il tempo che l'orologio impiega da A a B.

Si vede immediatamente che questo risultato vale anche quando l'orologio si muove da A a B lungo una linea poligonale arbitraria, e in particolare anche quando i punti A e B coincidono.

Se si assume che il risultato dimostrato per una linea poligonale valga anche per una linea incurvata con continuità, si ottiene la legge: si trovino in A due orologi che camminano sincroni e si muova uno degli stessi lungo una curva chiusa con velocità costante, finché esso ritorni in A, cosa che può durare t secondi; allora quest'ultimo orologio al suo arrivo in A risulta ritardato rispetto a quello che non è stato mosso di $(1/2)\, t\, (v/V)^2$ secondi. Si conclude da ciò che un orologio a bilanciere che si trovi all'equatore terrestre deve camminare più lento di un importo assai piccolo rispetto ad un orologio fatto esattamente alla stessa maniera, e sottoposto per il resto a condizioni uguali, ma che si trovi a un polo terrestre.

§5. Teorema di addizione delle velocità.

Nel sistema k che si muove con la velocità v lungo l'asse X del sistema K un punto si muova secondo le equazioni:

$$\xi = w_\xi \tau,\ \eta = w_\eta \tau,\ \zeta = 0,$$

dove w_ξ e w_η indicano delle costanti.

Si cerchi il moto del punto relativamente al sistema K. Se si introducono nelle equazioni di moto del punto le quantità x, y, z, t per mezzo delle equazioni di trasformazione sviluppate al §3, si ottiene:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

La legge del parallelogrammo delle velocità vale quindi secondo la nostra teoria solo in prima approssimazione. Poniamo:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

e

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x};$$

α è allora l'angolo tra le velocità v e w. Con un calcolo semplice risulta:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{\left(1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}\right)}.$$

È degno di nota che v e w entrino in modo simmetrico nell'espressione per la velocità risultante. Se anche w ha la direzione dell'asse X (asse Ξ) si ottiene:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Da questa equazione segue che dalla composizione di due velocità che siano minori di V risulta sempre una velocità inferiore a V. Si ponga infatti $v = V-\kappa$, $w = V-\lambda$, dove κ e λ sono positivi e minori di V; risulta:

$$U = V\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Risulta inoltre che la velocità V non può essere mutata per composizione con una "velocità sottoluminale". Si trova in questo caso:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Avremmo potuto ottenere le formule di U per il caso che v e w possiedano ugual direzione anche per composizione di due trasformazioni secondo il §3. Introduciamo oltre ai sistemi K e k considerati nel §3 anche un terzo sistema di coordinate k' pensato in moto parallelo rispetto a k, la cui origine si muova lungo l'asse Ξ con la velocità w; in tal modo otteniamo tra le quantità x, y, z, t e le corrispondenti quantità di k' delle equazioni, che si distinguono da quelle trovate nel §3 solo perché al posto di "v" compare la quantità

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

si vede pertanto che queste trasformazioni parallele - come dev'essere - costituiscono un gruppo.

Abbiamo ora derivato le leggi per noi necessarie della cinematica che corrisponde ai nostri due principi, e passiamo a mostrare la loro applicazione nell'elettrodinamica.

II. Parte elettrodinamica

§6. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto. Sulla natura della forza elettromotrice che compare con il moto in un campo magnetico.

Se equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto sono valide per il sistema a riposo K, si deve avere:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove (X, Y, Z) è il vettore della forza elettrica, (L, M, N) quello della forza magnetica.

Se applichiamo a queste equazioni la trasformazione sviluppata al § 3, e riferiamo i processi elettromagnetici al sistema di coordinate là introdotto, che si muove con la velocità v, otteniamo le equazioni

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Il principio di relatività richiede ora che le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto valgano anche nel sistema k quando esse valgono nel sistema K, ossia che per i vettori della forza elettrica e magnetica ((X', Y', Z') e (L', M', N')) del sistema in moto k, definiti mediante le loro azioni ponderomotrici nel sistema in moto k esercitate su masse elettriche o rispettivamente magnetiche, valgano le equazioni

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \ \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \ \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Evidentemente i due sistemi di equazioni trovati per il sistema k devono esprimere esattamente la stessa cosa, poiché entrambi i sistemi di equazioni sono equivalenti alle equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema K. Poiché le equazioni dei due sistemi coincidono inoltre a meno dei simboli che rappresentano i vettori, ne segue che le funzioni che compaiono nel sistema di equazioni in posti corrispondenti devono coincidere a meno di un fattore $\psi(v)$ unico per tutte le funzioni di un sistema di equazioni complessivo, indipendente da ξ, η, ζ e τ, eventualmente dipendente da v. Valgono quindi le relazioni

$$X' = \psi(v)X, \ L' = \psi(v)L,$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \ M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \ N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Se si costruisce l'inverso di questo sistema di equazioni, prima mediante soluzione delle equazioni or ora ottenute, poi sviluppando le equazioni per la trasformazione inversa (da k a K) che è caratterizzata dalla velocità $-v$, segue, tenendo conto che i due sistemi di equazioni così ottenuti devono essere identici:

$$\psi(v).\psi(-v) = 1.$$

Segue inoltre per ragioni di simmetria[5]

$$\psi(v) = \psi(-v);$$

quindi

$$\psi(v) = 1,$$

e le nostre equazioni assumono la forma:

$$X' = X, \ L' = L,$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \ M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \ N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Per l'interpretazione di queste equazioni notiamo quanto segue. Si abbia una quantità puntiforme di elettricità che misurata nel sistema a riposo K sia del valore "uno", cioè a riposo nel sistema a riposo eserciti su di una quantità di elettricità uguale alla distanza di 1 centimetro la forza di una dina. Secondo il principio di relatività questa massa elettrica anche quando è misurata nel sistema in moto ha il

[5]Se per esempio $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$, è chiaro per ragioni di simmetria, che per lo scambio del segno di v senza variazione del valore numerico anche Y' deve cambiare di segno, senza cambiare il suo valore numerico.

valore "uno". Se questa quantità di elettricità è a riposo relativamente al sistema a riposo, per definizione il vettore (X, Y, Z) è uguale alla forza esercitata da essa. Se la quantità di elettricità è a riposo nel sistema in moto (almeno all'istante considerato), allora la forza esercitata da essa, misurata nel sistema in moto, è uguale al vettore (X', Y', Z'). le prime tre delle equazioni su scritte si possono dunque esprimere a parole nei seguenti due modi:

1. Se un polo elettrico puntiforme unitario si muove in un campo elettromagnetico, su di esso opera oltre alla forza elettrica una "forza elettromotrice" che, tralasciando termini moltiplicati per la seconda potenza e per potenze più alte di v/V, è il prodotto vettore, diviso per la velocità della luce, della velocità del moto del polo unitario e della forza magnetica (vecchio modo di esprimersi).
2. Se un polo elettrico puntiforme unitario si muove in un campo elettromagnetico, la forza che agisce su di esso è uguale alla forza elettrica che si manifesta nella posizione del polo unitario, che si ottiene mediante trasformazione del campo in un sistema di coordinate a riposo relativamente al polo unitario elettrico (nuovo modo di esprimersi).

Una situazione analoga vale per la "forza magnetomotrice". Si vede che nella teoria sviluppata la forza elettromotrice gioca soltanto il ruolo di un concetto ausiliario, che deve la sua introduzione alla circostanza che le forze elettrica e magnetica non possiedono un'esistenza indipendente dallo stato di moto del sistema di coordinate.

È inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla "sede" della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate.

§7. Teoria del principio di Doppler e dell'aberrazione.

Nel sistema K si trovi assai lontano dall'origine delle coordinate una sorgente di onde elettromagnetiche, che in una parte dello spazio che comprende l'origine delle coordinate siano rappresentate con sufficiente approssimazione dalle equazioni:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin\Phi,\ L = L_0 \sin\Phi, \\ Y &= Y_0 \sin\Phi,\ M = M_0 \sin\Phi,\ \Phi = \omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{V}\right). \\ Z &= Z_0 \sin\Phi,\ N = N_0 \sin\Phi, \end{aligned}$$

Qui (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) sono i vettori che determinano l'ampiezza del treno d'onde, a, b, c sono i coseni direttori della normale d'onda.

Ci chiediamo ora quali siano le caratteristiche di queste onde, quando le stesse siano indagate da un osservatore a riposo nel sistema in moto k. - Applicando le equazioni di trasformazione trovate nel §6 per le forze elettrica e magnetica e le equazioni di trasformazione trovate nel §3 per le coordinate ed il tempo otteniamo immediatamente:

$$X' = X_0 \sin\Phi',\ L' = L_0 \sin\Phi',$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi',\ M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi',$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi',\ N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi',$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right),$$

dove si è posto

$$\omega' = \omega\beta \left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

Dall'equazione per ω' segue: se un osservatore si muove con la velocità v rispetto ad una sorgente luminosa di frequenza ν infinitamente lontana in modo tale che la linea congiungente "sorgente luminosa-osservatore" individui l'angolo φ con la velocità dell'osservatore che si manifesta in un sistema di coordinate in quiete relativamente alla sorgente di luce, allora la frequenza ν' della luce avvertita dall'osservatore è data dall'equazione:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Questo è il principio di Doppler per velocità arbitrarie. Per $\varphi = 0$ l'equazione assume la forma perspicua:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Si vede che - in contrasto con la concezione consueta - per $v = -\infty$, risulta $\nu = \infty$.

Se si chiama φ' l'angolo tra la normale d'onda (direzione del raggio) nel sistema in moto e la linea congiungente "sorgente luminosa - osservatore", l'equazione per a' assume la forma:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Questa equazione esprime la legge dell'aberrazione nella sua forma più generale. Se $\varphi = \pi/2$, l'equazione assume la forma semplice:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Dobbiamo ora cercare l'ampiezza delle onde, come appare nel sistema in moto. Se si chiamano A e rispettivamente A' l'ampiezza della forza elettrica o magnetica misurata nel sistema a riposo o rispettivamente nel sistema in moto, si ottiene:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left[1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right]^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

equazione che per $\varphi = 0$ diventa quella più semplice:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Segue dalle equazioni sviluppate che per un osservatore che si avvicini con la velocità V ad una sorgente di luce, questa sorgente di luce deve apparire infinitamente intensa.

§8. Trasformazione dell'energia dei raggi di luce. Teoria della pressione di radiazione esercitata su uno specchio perfetto.

Poiché $A^2/8\pi$ è uguale all'energia della luce per unità di volume, secondo il principio di relatività dobbiamo considerare $A'^2/8\pi$ come l'energia della luce nel sistema in moto. Quindi A'^2/A^2 sarebbe il rapporto dell'energia "misurata in moto" con quella "misurata in quiete" di un certo complesso luminoso, se il volume di un complesso luminoso misurato in K e misurato in k fosse lo stesso. Non è tuttavia questo il caso. Siano a, b, c i coseni direttori della normale d'onda della luce nel sistema a riposo, allora attraverso l'elemento di superficie della superficie sferica che si muove con la velocità della luce

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2;$$

non transita alcuna energia; possiamo dire quindi che questa superficie racchiude permanentemente lo stesso complesso luminoso. Ci chiediamo ora quale sia la quantità d'energia che questa superficie racchiude quando la si consideri nel sistema k, cioè quale sia l'energia del complesso luminoso relativamente al sistema k.

La superficie sferica è - considerata nel sistema in moto - una superficie ellissoidale, che al tempo $\tau = 0$ possiede l'equazione:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Se si chiama S il volume della sfera, S' quello dell'ellissoide, risulta, come mostra un semplice calcolo:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Se si chiama quindi E l'energia misurata nel sistema a riposo, E' quella misurata nel sistema in moto, che sia racchiusa dalla superficie considerata, si trova:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'/8\pi}{A^2 S/8\pi} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

formula che per $\varphi = 0$ si riduce a quella più semplice:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

È notevole che l'energia e la frequenza di un complesso luminoso variino con la stessa legge al variare dello stato di moto dell'osservatore. Sia ora il piano coordinato $\xi = 0$ una superficie riflettente perfetta, sulla quale vengano riflesse le onde piane considerate nell'ultimo paragrafo. Ci chiediamo quale sia la pressione di radiazione esercitata sulla superficie riflettente e quali siano la direzione, la frequenza e l'intensità della luce dopo la riflessione.

La luce incidente sia definita mediante le quantità A, $\cos\varphi$, ν (misurate nel sistema K). Le corrispondenti quantità considerate da k sono:

$$A' = A\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Per la luce riflessa otteniamo, quando riferiamo il processo al sistema k:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = \cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Infine ritrasformando al sistema a riposo K si ottiene per la luce riflessa:

$$A''' = A''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi''+\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left[1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right]\cos\varphi-2\frac{v}{V}}{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu''\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu\frac{1-2\frac{v}{V}\cos\varphi+\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{V}\right)^2}.$$

L'energia che incide sull'unità di superficie dello specchio nell'unità di tempo (misurata nel sistema a riposo) è evidentemente $A^2/8\pi\,(V\cos\varphi - v)$. L'energia che si allontana dall'unità di superficie dello specchio nell'unità di tempo è

$$A'''^2/8\pi\,(-V\cos\varphi'''+v)\,.$$

La differenza di queste due espressioni è secondo il principio dell'energia il lavoro esercitato dalla pressione di radiazione nell'unità di tempo. Se si pone quest'ultimo uguale al prodotto $P.v$, dove P è la pressione della luce, si ottiene:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi-\frac{v}{V}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In prima approssimazione si ottiene in accordo con l'esperienza e con altre teorie

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

Con i metodi qui utilizzati si possono risolvere tutti i problemi dell'ottica dei corpi in movimento. L'essenziale è che la forza elettrica e magnetica della luce, che viene subita da un corpo in moto, sia trasformata a un sistema di coordinate in quiete relativamente al corpo. In tal modo ogni problema dell'ottica dei corpi in moto sarà ricondotto ad una sequenza di problemi dell'ottica dei corpi in quiete.

§9. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz tenendo conto della corrente di convezione.

Partiamo dalle equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho+\frac{\partial X}{\partial t}\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\ \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho+\frac{\partial Y}{\partial t}\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho+\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\ \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove

$$\rho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

indica la densità dell'elettricità moltiplicata per 4π e (u_x,u_y,u_z) indica il vettore velocità dell'elettricità. Se si pensano le masse elettriche invariabilmente legate a piccoli corpi rigidi (ioni, elettroni), queste equazioni sono il fondamento elettromagnetico dell'elettrodinamica e dell'ottica dei corpi in movimento di Lorentz.

Se si trasformano queste equazioni, che valgano nel sistema K, al sistema k per mezzo delle equazioni di trasformazione del §3 e del §6, si ottengono le equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho'+\frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},\ \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho'+\frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},\ \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho'+\frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},\ \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

dove

$$\frac{u_x-v}{1-u_x\frac{v}{V^2}}=u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)}=u_\eta,\ \rho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)\rho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1-u_x\frac{v}{V^2}\right)}=u_\zeta,$$

Poiché - come segue dal teorema di addizione delle velocità (§5) - il vettore (u_ξ,u_η,u_ζ) non è altro che la velocità delle masse elettriche misurate nel sistema k, risulta perciò dimostrato che, prendendo a base i nostri principi cinematici, i fondamenti elettrodinamici della teoria di Lorentz dell'elettrodinamica dei corpi in movimento sono conformi al principio di relatività.

È possibile ancora notare in breve che dalle equazioni sviluppate si può facilmente derivare la legge seguente: se un corpo elettricamente carico si muove arbitrariamente nello spazio e la sua carica non muta, quando la si consideri da un sistema di coordinate in moto con il corpo, la sua carica - considerata dal sistema "a riposo" K - risulta pure costante.

§10. Dinamica dell'elettrone (lentamente accelerato).

In un campo elettromagnetico si muova una particella puntiforme (nel seguito chiamata "elettrone") provvista di una carica elettrica ζ, riguardo al moto della quale assumiamo quanto segue:

Se l'elettrone è in quiete ad un certo istante, il moto dell'elettrone nell'intervallino temporale subito successivo segue le equazioni

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X,\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y,\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

dove x, y, z sono le coordinate dell'elettrone, μ indica la massa dell'elettrone, finché lo stesso si muova piano.

Possieda ora l'elettrone in secondo luogo ad un dato istante la velocità v. Cerchiamo la legge secondo la quale l'elettrone si muove nell'intervallo temporale immediatamente successivo.

Senza influire sulla generalità dell'argomento, possiamo e vogliamo assumere che l'elettrone, nell'istante che stiamo prendendo in considerazione, si trovi nell'origine delle coordinate e si muova lungo l'asse X del sistema K con la velocità v. È allora chiaro che l'elettrone nell'istante sunnominato ($t = 0$) è in quiete rispetto ad un sistema di coordinate k in moto parallelo con la velocità costante v lungo l'asse X.

Dall'ipotesi prima fatta riguardo al principio di relatività è chiaro che l'elettrone nel tempo immediatamente successivo (per piccoli valori di t) considerato dal sistema k si muove secondo le equazioni:

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',\ \mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',\ \mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

dove i simboli ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' si riferiscono al sistema k. Stabiliamo che per $t = x = y = z = 0$ debba essere $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$; così valgono le equazioni di trasformazione dei §§3 e 6, e si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),\\
&\xi = \beta\left(x - vt\right),\ X' = X,\\
&\eta = y,\ Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),\\
&\zeta = z,\ Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).
\end{aligned}$$

Per mezzo di queste equazioni trasformiamo le equazioni di moto su scritte dal sistema k al sistema K e otteniamo:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta^3}X,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right),\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

Accostandoci alla trattazione consueta ci interroghiamo ora sulle masse "longitudinale" e "trasversale". Scriviamo le equazioni (A) nella forma

$$\begin{aligned}
\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\
\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y', \\
\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z',
\end{aligned}$$

e notiamo immediatamente che $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ sono le componenti della forza ponderomotrice che agisce sull'elettrone, e più precisamente osservate in un sistema di riferimento che si muova in questo istante con l'elettrone con la stessa velocità di questo. (Questa forza potrebbe per esempio essere misurata con una bilancia a molla a riposo nell'ultimo sistema considerato). Ora, se chiamiamo questa forza semplicemente "la forza che agisce sull'elettrone" e manteniamo l'equazione

$$\text{massa} \times \text{accelerazione} = \text{forza}$$

e se inoltre assumiamo che le accelerazioni devono essere misurate nel sistema a riposo K, otteniamo dalle equazioni precedenti:

$$\text{massa longitudinale} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{massa trasversale} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Naturalmente con un'altra definizione della forza e dell'accelerazione si ottengono valori diversi per le masse; si vede quindi che si deve procedere molto cautamente nel confronto di teorie diverse del moto dell'elettrone.

Osserviamo che questi risultati per la massa valgono anche per il punto materiale ponderabile; infatti un punto materiale ponderabile può essere fatto ponendo su un elettrone (nel nostro senso) una carica elettrica *arbitrariamente piccola*.

Valutiamo l'energia cinetica dell'elettrone. Un elettrone si muova dall'origine delle coordinate del sistema K con la velocità iniziale 0 lungo l'asse X costantemente sotto l'azione di una forza elettrostatica X; è chiaro allora che l'energia sottratta al campo elettromagnetico ha il valore $\int \varepsilon X dx$. Poiché l'elettrone dev'essere lentamente accelerato e di conseguenza non può cedere alcuna energia sotto forma di radiazione, l'energia ceduta dal campo elettromagnetico dev'essere posta uguale all'energia di moto W dell'elettrone. Si ottiene pertanto, tenendo conto che durante l'intero processo di moto considerato vale la prima delle equazioni (A):

$$W = \int \varepsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Pertanto W per $v = V$ sarà infinitamente grande. Velocità superluminali - in accordo con i nostri risultati precedenti - non hanno alcuna possibilità di esistenza.

In conseguenza dell'argomento prima avanzato questa espressione per l'energia cinetica deve valere anche per masse ponderabili.

Elencheremo ora le proprietà del moto dell'elettrone accessibili all'esperimento che risultano dal sistema di equazioni (A).

1. Dalla seconda equazione del sistema (A) segue che una forza elettrica Y ed una forza magnetica N operano con la stessa forza deviatrice su di un elettrone che si muova con la velocità v quando $Y = N \cdot v/V$. Si vede anche che la determinazione della velocità dell'elettrone dal rapporto tra la capacità di deviazione magnetica A_m e la capacità di deviazione elettrica A_e è possibile secondo la nostra teoria per velocità arbitrarie applicando la legge:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

La dimostrazione di questa relazione è accessibile sperimentalmente, poiché la velocità dell'elettrone si può misurare anche direttamente, per esempio mediante campi elettrici e magnetici oscillanti rapidamente.

2. Dalla derivazione dell'energia cinetica dell'elettrone segue che tra la differenza di potenziale attraversata e la velocità v raggiunta dall'elettrone deve valere la relazione:

$$P = \int X dx = \frac{\mu V^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calcoliamo il raggio di curvatura R della traiettoria, quando si abbia a che fare con una forza magnetica agente N (come sola forza deviante) ortogonale alla velocità dell'elettrone. Dalla seconda delle equazioni (A) otteniamo:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon v}{\mu V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ovvero

$$R = \frac{V^2 \mu}{\varepsilon} \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Queste tre relazioni sono un'espressione completa delle leggi secondo le quali si deve muovere l'elettrone per la presente teoria.

Osservo in conclusione che nei lavori sul problema qui trattato l'amico e collega M. Besso mi è stato accanto fedelmente e che gli sono debitore di molti suggerimenti preziosi.

Berna, giugno 1905

(ricevuto il 30 giugno 1905)