Liceo Scientifico L. CREMONA. Milano.

Classe 4E. Docente: Mauro Saita. Materia: matematica. Febbraio 2017.

TEST SUI NUMERI COMPLESSI[1]

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

1. Scrivere in forma algebrica i^{2018}.

2. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

$$(a) \quad \frac{1-2i}{1+2i} \qquad\qquad (b) \quad \frac{2e^{i\pi}+\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

3. Dimostrare che il coniugato della somma è uguale alla somma dei coniugati. In altri termini, dimostrare che $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, per ogni z, w in $\mathbb{C}$.

4. Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \mathrm{Re}\,(\mathrm{z}) \leq 2 \;\wedge\; 0 \leq \mathrm{Im}\;(\mathrm{z}) \leq 2\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \,|\, w = e^{i\,\frac{\pi}{4}} z\,,\; z \in A\}$$

5. Sia $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. Scrivere in forma algebrica z^{10}.

6. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$|1-z| - |z-i| = 0$$

7. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, $\;F(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i)z$. Scrivere in forma trigonometrica $F(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)$.

8. Sia $z = -\sqrt{3} + i$. Scrivere z^{-1} in forma trigonometrica.

9. (Vero o falso?) Per ogni z in $\mathbb{C}$ il prodotto di z per il suo coniugato è un numero reale.

10. Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 2 \leq |z| \leq 3 \;\;\wedge\;\; 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \,|\, w = z^2,\; z \in A\}$$

[1]Nome file: verifica_06_complessi_4e_2017.tex

Risposte.

1. Scrivere in forma algebrica i^{2018}.
   Risposta: $i^2 = -1$.

2. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

$$(a) \quad \frac{1-2i}{1+2i} \qquad\qquad (b) \quad \frac{2e^{i\pi} + \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

   Risposta: (a) $\quad -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

3. Dimostrare che il coniugato della somma è uguale alla somma dei coniugati. In altri termini, dimostrare che $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, per ogni z, w in $\mathbb{C}$.

4. Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \mathrm{Re}\,(\mathrm{z}) \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq \mathrm{Im}\ (\mathrm{z}) \leq 2\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \,|\, w = e^{i\,\frac{\pi}{4}} z\,,\ z \in A\}$$

5. Sia $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. Scrivere in forma algebrica z^{10}.
   Risposta: $z^{10} = 1024() - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$|1 - z| - |z - i| = 0$$

   Risposta: $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante).

7. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, $\ F(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i)z$. Scrivere in forma trigonometrica $F(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)$.

8. Sia $z = -\sqrt{3} + i$. Scrivere z^{-1} in forma trigonometrica.
   Risposta:

9. (Vero o falso?) Per ogni z in $\mathbb{C}$ il prodotto di z per il suo coniugato è un numero reale.
   Risposta: Vero. $z\,\overline{z} = |z|^2$.

10. Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ 2 \leq |z| \leq 3 \ \ \wedge \ \ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$B = \{w \in \mathbb{C} \,|\, w = z^2,\ z \in A\}$$