Note di trigonometria.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

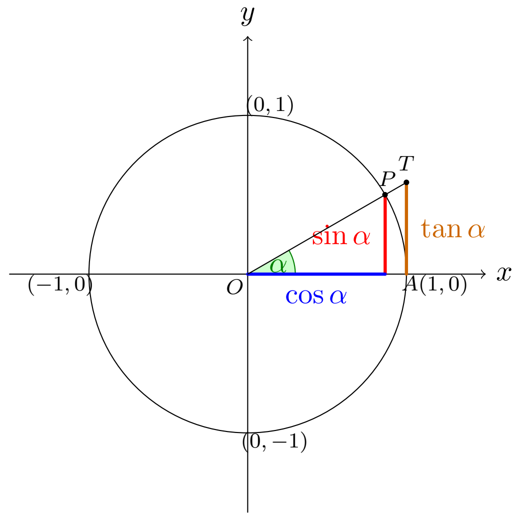
Versione provvisoria. Novembre 2017.

Indice

[1]

[1]Nome File: trigonometria_01.tex

1 Seno, coseno e tangente di un angolo.



Il seno di α è l'ordinata di P, segmento rosso.
Il coseno di α è l'ascissa di P, segmento blu.
La $\tan\alpha$ è l'ordinata di T, segmento arancione.

Valgono i seguenti fatti:

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Figura 1

In un sistema di assi cartesiani si tracci la circonferenza di centro O e raggio unitario. Sia α l'angolo che il raggio vettore $\overrightarrow{OP}$ descrive ruotando attorno all'origine O a partire dal semiasse positivo delle x. Si conviene di indicare con il segno $+$ gli angoli descritti da $\overrightarrow{OP}$ mediante una rotazione in senso antiorario, con il segno $-$ gli angoli ottenuti mediante una rotazione in senso inverso. In tal modo ogni vettore $\overrightarrow{OP}$ individua un unico angolo $0 \leq \alpha < 360°$ e viceversa ogni angolo $0 \leq \alpha < 360°$ individua un unico vettore $\overrightarrow{OP}$.

Definizione 1.1 (Definizione di seno e coseno di un angolo.)**.** *In un sistema di assi cartesiani si consideri la circonferenza di centro O e raggio unitario e sia α l'angolo descritto dal raggio vettore $\overrightarrow{OP}$. Si chiama* coseno di α *(si scrive* $\cos\alpha$*) l'ascissa del punto P; si chiama* seno di α *(si scrive* $\sin\alpha$*) l'ordinata di P.*

Definizione 1.2 (Definizione di tangente di un angolo.)**.** *In un sistema di assi cartesiani si consideri la circonferenza di centro O e raggio unitario e sia α l'angolo descritto dal raggio vettore $\overrightarrow{OP}$. Si tracci la tangente alla circonferenza in $A = (1,0)$ e si indichi con T l'intersezione di tale tangente con il prolungamento del vettore OP. Si chiama* tangente di α *(si scrive* $\tan\alpha$ *oppure* $\mathrm{tg}\,\alpha$*) l'ordinata del punto T.*

1.1 Grafici delle funzioni seno e coseno.

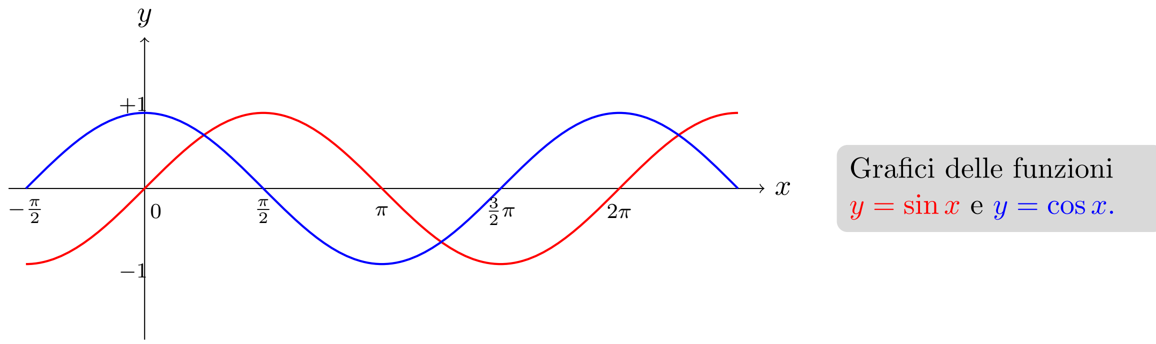


Figura 2

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \tag{1.1}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \tag{1.2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto i due grafici si ottengono uno dall'altro mediante opportune traslazioni nella direzione dell'asse x. Precisamente:

- *se si trasla il grafico di* $y = \sin x$ *parallelamente all'asse* x *di un tratto pari a* $-\frac{\pi}{2}$ *si ottiene il grafico di* $y = \cos x$;

- *se si trasla il grafico di* $y = \cos x$ *parallelamente all'asse* x *di un tratto pari a* $+\frac{\pi}{2}$ *si ottiene il grafico di* $y = \sin x$.

Esercizio 1.3. *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni nell'intervallo* $[0, 2\pi]$

(a) $y = \cos(-x)$

(b) $y = \sin(-x)$

(c) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

(d) $y = \cos(\pi - x)$

(e) $y = \sin(\pi + x)$

(f) $y = \sin(\frac{3}{2}\pi + x)$

Esercizio 1.4. *Utilizzando Geogebra tracciare i grafici di*

$$y = A\sin(\omega x + \phi) \qquad e \qquad y = A\cos(\omega x + \phi)$$

per diversi valori delle costanti A, ω *e* ϕ*. Qual è il significato di queste costanti?*

1.2 Grafico della funzione tangente.

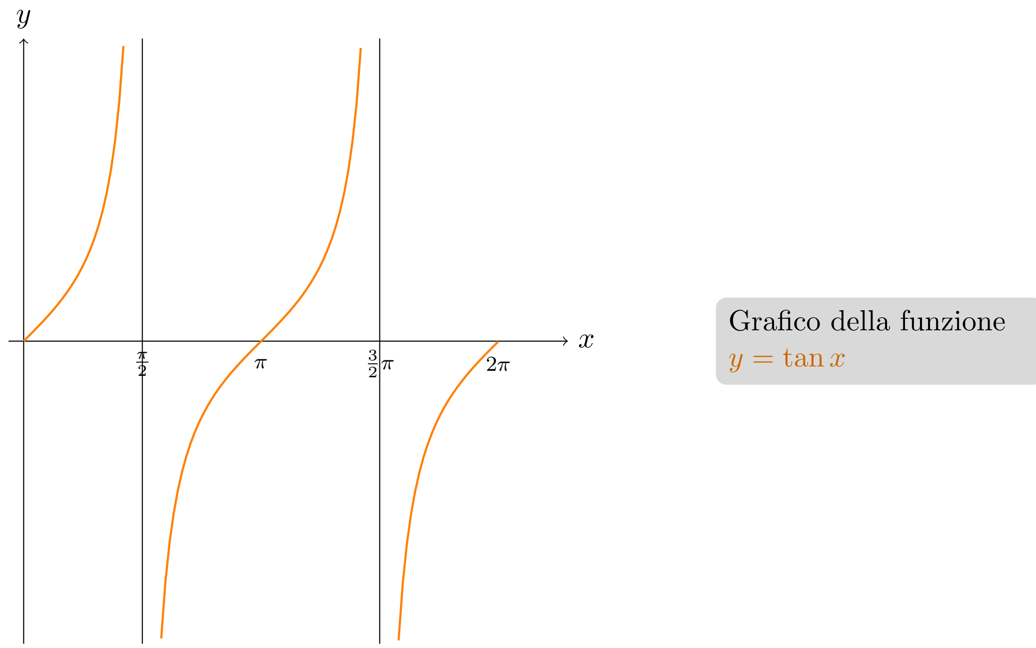


Figura 3

Esercizio 1.5. *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni nell'intervallo* $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

(a) $y = \tan(-x)$

(b) $y = \tan(\pi + x)$

(c) $y = \tan(\pi - x)$

Esercizio 1.6 (Inverse delle funzioni goniometriche.)**.** *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni*

(a) $[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [-\pi/2, \pi/2]$

(c) $\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan} (-\pi/2, \pi/2)$

2 Formule di addizione (sottrazione).

Siano $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ due vettori spiccati dall'origine. Il loro prodotto scalare si può scrivere nei seguenti due modi:

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 = |V||W| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra V e W.

Si osservi ora la seguente figura

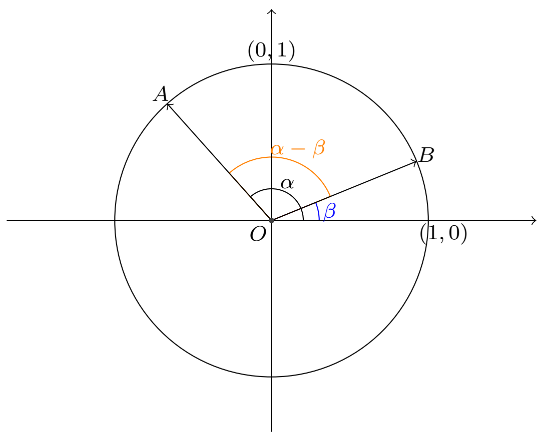


Figura 4

$A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B = (\cos\beta, \sin\beta)$, mentre il prodotto scalare di A per B è

$$A \cdot B = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta \tag{2.1}$$

$$A \cdot B = \cos(\alpha - \beta) \tag{2.2}$$

Uguagliando i secondi membri di (2.1) e (2.2) si ottengono le *formule di sottrazione del coseno*, ovvero

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta \tag{2.3}$$

Formule di addizione del coseno. Basta porre nell'uguaglianza 2.3 $\beta = -\gamma$. Si ottiene $\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha\ \cos(-\gamma) + \sin\alpha\ \sin(-\gamma)$ e quindi

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha\ \cos\gamma - \sin\alpha\ \sin\gamma \tag{2.4}$$

Formule di sottrazione del seno Si ottengono ricordando che per ogni angolo θ,

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \quad \text{e} \quad \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \tag{2.5}$$

Ponendo $\alpha - \beta = \theta$ nella prima delle uguaglianze 2.5 si ottiene

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\Big((\tfrac{\pi}{2} - \alpha) + \beta\Big) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)\ \cos\beta - \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)\ \sin\beta \\ &= \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta \end{aligned} \tag{2.6}$$

Formule di addizione del seno. Basta porre nell'uguaglianza 2.6 $\beta = -\gamma$. Si ottiene $\sin(\alpha - (-\gamma)) = \sin\alpha\ \cos(-\gamma) - \cos\alpha\ \sin(-\gamma)$ e quindi

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin\alpha\ \cos\gamma + \cos\alpha\ \sin\gamma \tag{2.7}$$

3 Sui triangoli rettangoli.

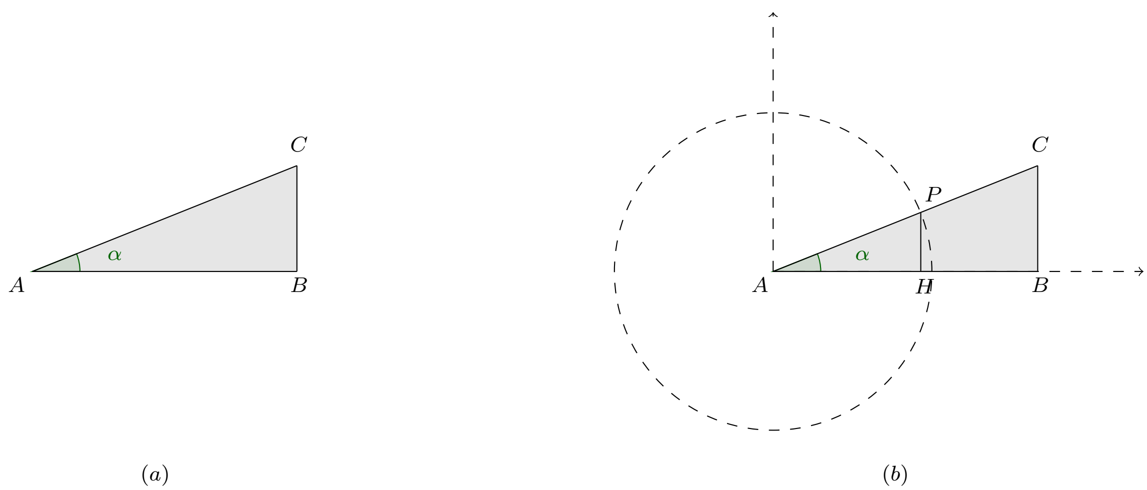


Figura 5: La circonferenza è centrata in A e ha raggio 1. Il triangolo rettangolo APH è simile al triangolo ACB.

Si consideri un triangolo rettangolo come quello mostrato in figura 5 (a). Si scelga un sistema di coordinate in modo tale che l'asse x coincida con il lato AB e l'asse y risulti passante per A e ortogonale a AB (figura 5 (b)); si tracci la circonferenza di centro A e raggio unitario. I triangoli APH e ACB sono simili

$$\cos\alpha = \frac{AH}{1} = \frac{AB}{AC} \tag{3.1}$$

$$\sin\alpha = \frac{PH}{1} = \frac{BC}{AC} \tag{3.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{PH}{AH} = \frac{BC}{AB} \tag{3.3}$$

In molti problemi, che a diverso titolo coinvolgono un triangolo rettangolo, è utile ricordare le uguaglianze seguenti

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente a } \alpha}{\text{ipotenusa}} \tag{3.4}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{ipotenusa}} \tag{3.5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{cateto adiacente a } \alpha} \tag{3.6}$$

3.1 Moto armonico

Definizione 3.1 (Moto armonico)**.** *Sia P una particella che si muove di moto circolare uniforme. Si chiama* moto armonico *il moto della proiezione ortogonale di P su un diametro della circonferenza.*

Con riferimento alla figura si supponga che la particella P descriva la circonferenza di raggio r con velocità in modulo pari a v. Si vuole descrivere, al variare del tempo t, il moto del punto H, proiezione ortogonale di P sul diametro BC.

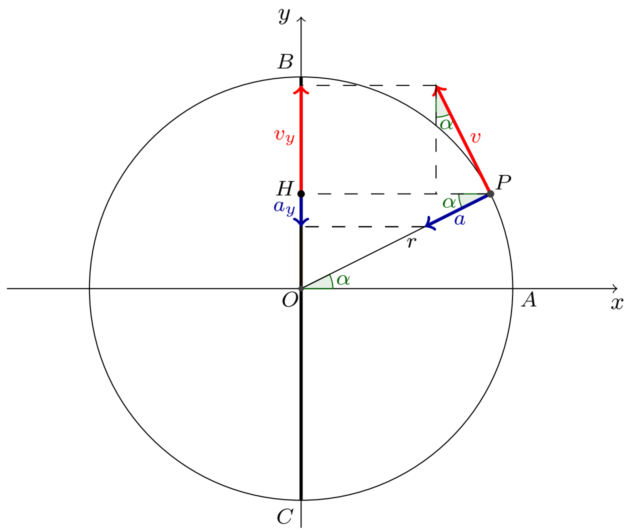


Figura 6: Il punto H, proiezione di P sul diametro BC, si muove di moto armonico.

Si supponga inoltre che all'istante $t = 0$ la particella si trovi in A.

All'istante t il raggio OP ha descritto l'angolo $\widehat{AOP} = \alpha$; la posizione del punto H in quell'istante di tempo è individuata dall'ordinata di P cioè

$$y = r\,\sin\alpha$$

Poichè $\alpha = \omega t$ si ottiene (legge oraria del moto armonico):

$$y = r\,\sin(\omega\,t) \tag{3.7}$$

Velocità e accelerazione di H all'istante t sono date da $v_y = v\,\cos\alpha = v\,\cos(\omega t)$ e $a_y = -a\cos\alpha = -a\cos(\omega t)$. Ricordando che in un moto circolare uniforme $v = \omega r$ e $a = \omega^2 r$, le ultime due uguaglianze assumono la forma

$$v_y = \omega r\,\cos(\omega t) \tag{3.8}$$

$$a_y = -\omega^2 r\,\sin(\omega t) \tag{3.9}$$

Dinamica del moto armonico.

Posto $\mathbf{s} = \overrightarrow{OH}$ (figura 6), le leggi che descrivono il moto armonico assumono la forma seguente

$$s = r\,\sin(\omega\, t) \tag{3.10}$$

$$v = \omega r\,\cos(\omega t) \tag{3.11}$$

$$a = -\omega^2 r\,\sin(\omega t) \tag{3.12}$$

Dividendo termine a termine la prima e la terza di queste uguaglianze si ottiene $\dfrac{s}{a} = -\dfrac{1}{\omega^2}$, ovvero $a = -\omega^2\, s$. In forma vettoriale si ottiene

$$\mathbf{a} = -\omega^2\,\mathbf{s} \tag{3.13}$$

Ci si pone la seguente domanda: se il punto H rappresenta un oggetto di massa m che si muove di moto armonico, qual è la forza che agisce su di esso?

La risposta è immediata. Moltiplicando per m l'uguaglianza 3.13 e ricordando la seconda legge della dinamica si ottiene

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\,\mathbf{s} \tag{3.14}$$

Pertanto un oggetto di massa m che si muove di moto armonico è soggetto a una forza di tipo elastico $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{s}$ la cui costante elastica è

$$k = m\omega^2$$

Le relazioni riguardanti il moto armonico che coinvolgono massa, pulsazione, costante elastica, periodo e frequenza sono le seguenti:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4 Sui triangoli qualunque

4.1 Teorema dei seni

Lemma 4.1. *In un triangolo ogni lato è uguale al prodotto del diametro del cerchio circoscritto al triangolo per il seno dell'angolo opposto a tale lato.*

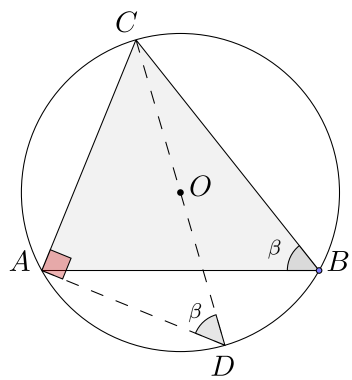


Figura 7

Indicato con r il raggio del cerchio circoscritto si ha, per esempio:

$$AC = 2r\ \sin\beta \tag{4.1}$$

Questo lemma è a volte chiamato *teorema della corda*; la sua dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 4.1 (dei seni). *I lati di ogni triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.*

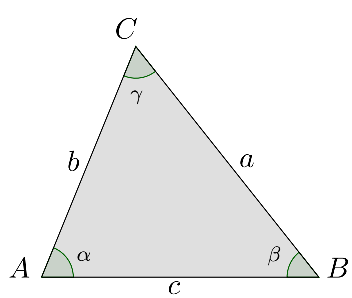


Figura 8

Con riferimento alla figura, il teorema dei seni afferma che

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{4.2}$$

Prima dimostrazione.

Sia r il raggio del cerchio circoscritto al triangolo. Dal lemma precedente segue che:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r, \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2r, \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \tag{4.3}$$

Pertanto, $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ ∎

Seconda dimostrazione.

L'area $\mathcal{A}$ del triangolo ABC si può esprimere in tre modi diversi:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,ab\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,bc\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,ac\,\sin\beta \tag{4.4}$$

Da queste uguaglianze segue che: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ ∎

Utilizzando il teorema dei seni si dimostra facilmente il seguente

Teorema 4.2. *La bisettrice di uno qualsiasi degli angoli interni di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti.*

Dimostrazione.

Indicata co CD la bisettrice dell'angolo γ (si veda la figura) occorre dimostrare che

$$AD \,:\, DB \,=\, AC \,:\, BC \tag{4.5}$$

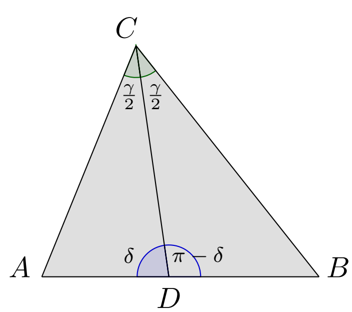


Figura 9

Per ipotesi $\widehat{ACD} = \widehat{DCB} = \frac{\gamma}{2}$; posto $\widehat{ADC} = \delta$ si ha: $\widehat{CDB} = \pi - \delta$.

Il teorema dei seni, applicato al triangolo ADC, permette di ricavare l'uguaglianza

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta} \tag{4.6}$$

mentre, lo stesso teorema, applicato al triangolo DBC fornisce l'uguaglianza

$$\frac{DB}{CB} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta} \tag{4.7}$$

Segue che $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{CB}$ ∎

4.2 Teorema del coseno

Teorema 4.3 (del coseno). *In ogni triangolo il quadrato di un suo lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno due volte il prodotto degli altri due lati per il coseno dell'angolo tra essi commpreso.*

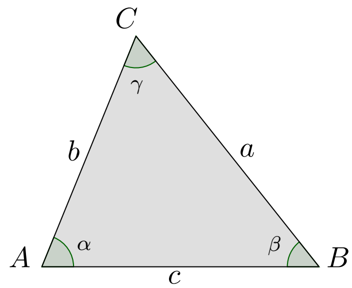


Figura 10

Con riferimento alla figura, il teorema del coseno afferma che

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos\alpha \tag{4.8}$$

Dimostrazione. [Per esercizio]

Con il teorema del coseno si dimostra il seguente

Teorema 4.4. *In ogni parallelogramma la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati di tutti i suoi lati.*

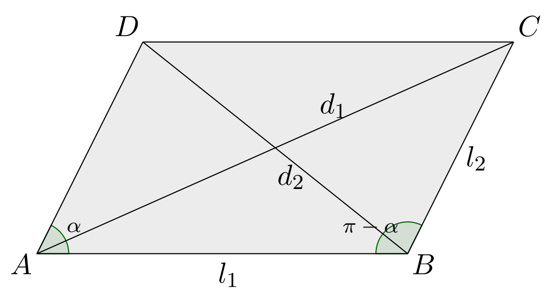


Figura 11

Dimostrazione.

Gli angoli alla base di un parallelogramma sono supplementari; posto $\widehat{DAB} = \alpha$, è $\widehat{ABC} = \pi - \alpha$. Si consideri il triangolo ABC; utilizzando il teorema del coseno si ottiene

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB\,BC\,\cos(\pi - \alpha) \tag{4.9}$$

ossia

$$d_1^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2\,l_1\,l_2\,\cos\alpha \tag{4.10}$$

rispetto al triangolo ADB il teorema del coseno fornisce l'uguaglianza

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2\,AD\,AB\,\cos\alpha \tag{4.11}$$

ossia

$$d_2^2 = l_2^2 + l_1^2 - 2\,l_1\,l_2\,\cos\alpha \tag{4.12}$$

Sommando termine a termine le uguaglianze (4.10) e (4.12) si ottiene

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\,l_1^2 + 2\,l_2^2 \tag{4.13}$$

■

4.3 Un altro teorema

Teorema 4.5. *Sia $\mathcal{T}$ un triangolo qualsiasi e r il raggio del cerchio inscritto. Indicati con α, β e γ gli angoli interni del triangolo si ha*

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-c} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-b} \tag{4.14}$$

In altre parole, la tangente della metà di un angolo interno del triangolo è uguale al quoziente del raggio del cerchio inscritto e la differenza tra il semiperimetro e il lato opposto.

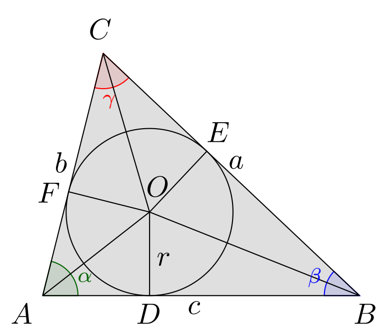


Figura 12

Dimostrazione.

Dopo aver tracciato le bisettrici degli angoli interni si conducano dall'incentro O (centro del cerchio iscritto) le perpendicolari ai lati. Si ha

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{AD} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{EB} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{FC} \tag{4.15}$$

È immediato verificare che la somma di AD, EB e FB è uguale al semiperimetro del triangolo ABC

$$p = AD + DB + FC \tag{4.16}$$

Allora l'uguaglianza (4.15) si può scrivere così

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-c} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-b} \tag{4.17}$$

∎

Osservazione

L'area $\mathcal{A}$ del triangolo si può scrivere in due modi: mediante l'uguaglianza

$$\mathcal{A} = p\,r \tag{4.18}$$

oppure mediante la *formula di Erone*

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{4.19}$$

Uguagliando i secondi membri delle due precedenti uguaglianze si scrive il raggio r del cerchio inscritto nel triangolo in funzione dei suoi lati, ossia

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \tag{4.20}$$

Sostituendo (4.20) in (4.14) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

5 Problema 1: noti i lati di un triangolo trovare gli angoli

Problema 5.1. *Noti i lati a, b, c di un triangolo trovare i suoi angoli α, β, γ.*

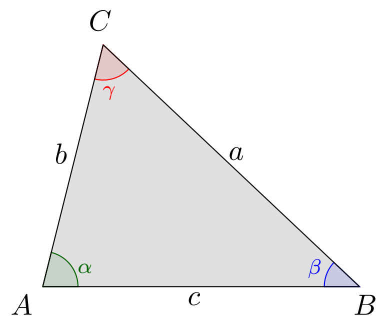


Figura 13

Primo metodo.

Utilizzando il teorema del coseno (per esempio, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$) si ottiene

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{5.1}$$

Utilizzando il teorema dei seni nella forma $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ si trova l'angolo β

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \tag{5.2}$$

Il terzo angolo γ è il supplementare dell'angolo $\alpha + \beta$

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) \tag{5.3}$$

Secondo metodo.

Si calcola il semiperimetro p e le differenze $p - a$, $p - b$, $p - c$; poi, dalle uguaglianze (4.21), si ricavano gli angoli richiesti.

6 Eratostene. Il raggio terrestre.

Dall'osservazione delle eclissi totale di luna i Greci per primi dedussero la sfericità della terra. Durante questi eventi la superficie lunare costituisce un gigantesco schermo sul quale si proietta l'ombra della terra che risulta sempre delimitata da contorni curvi ed estrememente regolari. L'assunzione della sfericità del nostro pianeta permise a diversi astronomi greci di detrminarne le dimensioni. Aristotele, rifacendosi probabilmente a calcoli eseguiti da Eudosso, asserì che il perimetro terrestre doveva essere di circa 40.000 miglia mentre alcuni contemporanei di Archimede lo valutarono di 30.000 miglia. Tra tutte le diverse misurazioni la più riuscita e famosa è quella di Eratostene (275 a.C. 195 a.C.). Nel saggio *Sulla misurazione della terra* egli fece le seguenti ipotesi:

1. la verticale in un punto qualsiasi della superficie terrestre è diretta verso il centro della terra;

2. i raggi solari che colpiscono la superficie terrestre provengono da così lontano che si possono considerare tra loro paralleli;

3. Alessandria e Siene (l'attuale Assuan) si trovano sullo stesso meridiano cioè la città di Alessandria si trova esattamente a nord di Siene.

Fatte queste ipotesi, Eratostene osservò che nel solstizio d'estate nella città di Siene i raggi del sole erano perpendicolari rispetto al terreno, mentre a Alessandria essi formavano con la verticale l'angolo $\alpha = 7°12'$. La distanza tra le due città era stata valutata in 785 km.

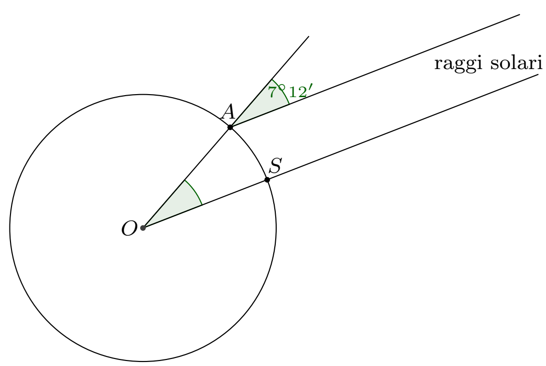


Figura 14

Con riferimento alla figura, si consideri l'intersezione della sfera terrestre con il piano che contiene il centro O della terra, il punto S (Siene) e il punto A (Alessandria). L'angolo $\widehat{SOA}$ e l'angolo che il raggio di sole forma con la verticale alla terra in A sono uguali perchè coppia di angoli corrispondenti formati dalle due rette parallele s_1, s_2 e dalla trasversale OA.

Dalla proporzione

$$\left(7 + \frac{1}{5}\right)^{\circ} : 360^{\circ} = 785 : 2\pi R$$

si ricavano la lunghezza della circonferenza e del raggio terrestre. I valori stimati da Eratostene sono

$$2\pi R = 39.250\ km$$

$$R = 6.250\ km$$

I valori oggi conosciuti della circonferenza e del raggio terrestre sono rispettivamente 40.075 km e 6.371 km.

7 Aristarco di Samo. La distanza Terra-Luna.

Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.), astronomo greco, propose più di 1500 anni prima di Copernico il sistema eliocentrico. Nel saggio "*Sulla dimensioni e sulle distanze del Sole e della Luna* (pervenuto fino a noi) egli sostenne che il sole era al centro dell'universo e che la terra ruotava attorno a esso. Spiegò il ciclo delle stagioni con l'inclinazione dell'asse terrestre e calcolò (anche se in modo molto approssimativo) la distanza Terra-Luna. Le sue congetture non vennero accettate dai suoi contemporanei.

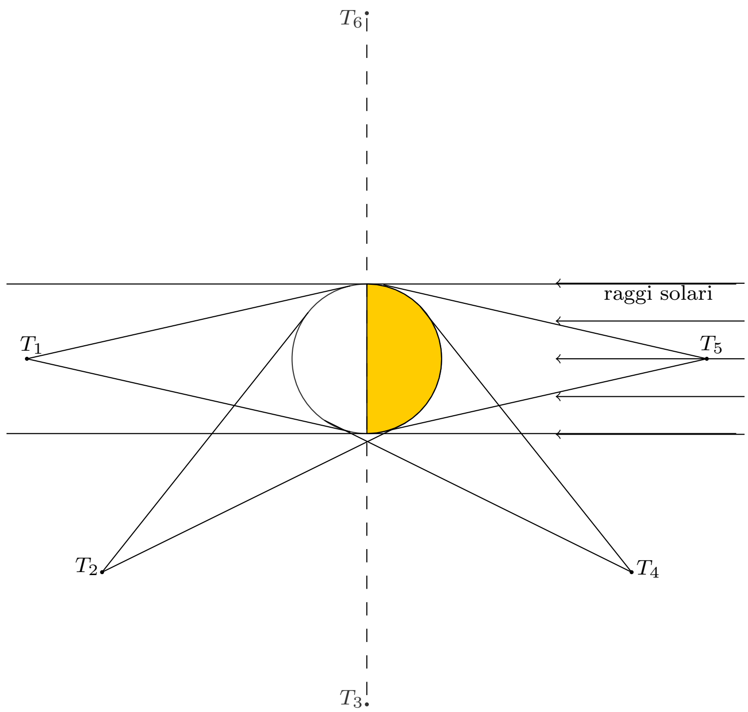


Figura 15

Si osservi la figura 15: quando la terra si trova in posizione T_1, la luna si trova esattamente tra il sole e la terra; essa rivolge a un osservatore terrestre il suo emisfero non illuminato e quindi non appare visibile: è la fase di 'luna nuova' (novilunio). Quando la terra si trova in T_2 un osservatore posto in quella posizione vede solo una piccola parte dell'emisfero lunare illuminato (luna crescente), mentre quando la terra è in T_4 la luna è opposta al sole rispetto alla terra e appare completamente illuminata: è la fase di 'luna piena' (plenilunio).

Se invece terra-luna-sole formano un angolo retto (cioè se la terra è in posizione T_3 o T_6) si dice che la luna è in *quadratura*; allora un osservatore terrestre vedrà esattamente mezza luna. Quando si verifica questa configurazione e sole e luna sono entrambi visibili (all'alba o al tramonto) è possibile misurare l'angolo θ (figura 16). Si ricava

$$\texttt{Distanza terra-luna} = LT = ST\cos\theta$$

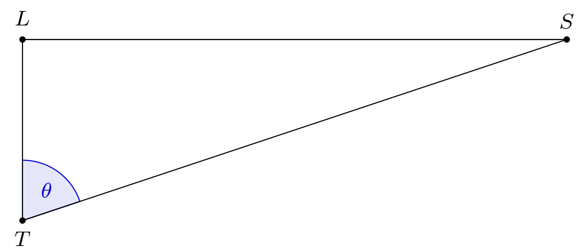


Figura 16

I risultati trovati da Aristarco sono molto imprecisi per due ragioni: la fase di quadratura non è determinabile con precisione per mezzo della sola osservazione e piccoli errori nella valutazione dell'angolo θ (prossimo a 90°) causano notevoli variazioni nel calcolo di $\cos\theta$.