Probabilità. Esercizi.

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

1 Esercizi

Esercizio 1.1. *Nel gioco del lotto, qual è la probabilità di fare*

(a) ambo?

(b) terno?

(c) cinquina?

R

Esercizio 1.2 (B.V. Gnedenko, Teoria della probabilità , Editori Riuniti (1979))**.** *In un mazzo di* 36 *carte (quattro semi, nove carte per ogni seme) se ne scelgono tre a caso. Trovare la probabilità che fra esse vi sia*

(a) esattamente un asso.

(b) almeno un asso.

Per 'estrazione di tre carte' si intende un sottoinsieme di tre carte, non conta l'ordine di estrazione.

R

Esercizio 1.3 (B.V. Gnedenko, Teoria della probabilità , Editori Riuniti (1979))**.** *Un mazzo di* 36 *carte (quattro semi, nove carte per ogni seme, diciotto carte rosse e diciotto nere) è diviso a caso in due parti uguali. Qual è la probabilità che in entrambe le parti vi sia un ugual numero di carte nere e rosse?*

R

Esercizio 1.4. *Un'urna contiene* 8 *palline bianche.*

1. *Quante palline azzurre bisogna inserire nell'urna affinché la probabilità di estrarre una pallina azzurra sia* $\frac{1}{3}$*?*
2. *Qual è il numero minimo di palline azzurre che bisogna inserire nell'urna affinché la probabilità di estrarre una pallina azzurra sia almeno* $\frac{1}{4}$*?*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.5. *Siano* $E_1, E_2, \dots E_k$ k *eventi a due a due disgiunti. Dimostrare che*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k).$$

Esercizio 1.6. *Da un mazzo di* 40 *carte se ne estrae una. Qual è la probabilità che essa sia 'una carta di fiori o una figura'?*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.7. *Un'urna contiene un certo numero di palline rosse,* 24 *palline bianche,* 15 *palline verdi. Trovare il numero di palline rosse sapendo che la probabilità di 'estrarre una pallina bianca o una pallina rossa' è* $\frac{7}{10}$.

$\boxed{R}$

Esercizio 1.8. *In un mazzo di* 40 *carte se ne scelgono tre a caso. Determinare la probabilità che tra di esse vi sia esattamente un asso.*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.9. *In un mazzo di* 40 *carte se ne scelgono tre a caso. Determinare la probabilità che tra di esse vi sia almeno un asso.*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.10. *Un cubo di legno, verniciato di rosso, viene tagliato con piani paralleli alle facce in* 27 *cubetti uguali.*

1. *Calcolare la probabilità che, dopo aver estratto a caso un cubetto ed averlo lanciato, esso tocchi terra presentando la faccia superiore colorata.*
2. *Rispondere alla stessa domanda nel caso di un cubo suddiviso in* 64 *cubetti uguali.*
3. *Rispondere alla stessa domanda nel caso di un cubo suddiviso in* n^3 *cubetti uguali.*

R

Esercizio 1.11. *Su una popolazione di* 1.000 *persone* 160 *hanno sangue* Rh^-*. Qual è la probabilità che una persona, incontrata a caso, abbia sangue* Rh^+ *?*

Esercizio 1.12 (Terno al gioco del lotto). *Da un'urna contenente i numeri da* 1 *a* 90 *si effettuano cinque estrazioni senza mai reintrudurre nell'urna i numeri estratti. Qual è la probabilità di indovinare esattamente tre numeri su cinque estratti? In altre parole, calcolare la probabilità di fare 'terno' al gioco del lotto.*

R

Esercizio 1.13 (Full al gioco del poker). *Quattro persone giocano a poker con un mazzo di 32 carte (7,8,9,10,Q,J,K,A e quattro semi). Qual'è la probabilità che uno di loro abbia un 'full servito'?*

R

Esercizio 1.14 (Doppia coppia e poker). *Giocando a poker con un mazzo di* 32 *carte, qual è la probabilità di avere*

1. *una 'doppia coppia servita'?*
2. *un 'poker servito'?*

R

Problema 1.15 (Il problema del compleanno). *In una sala sono presenti* n *persone. Qual è la probabilità che almeno due di esse abbiano il compleanno nel medesimo giorno?*

R

Esercizio 1.16. *Si lanciano due dadi distinguibili tra loro (per esempio, uno rosso e uno verde). Rispondere alle seguenti domande:*

1. *Qual è la probabilità che i due dadi presentino lo stesso numero?*
2. *Qual è la probabilità che i due numeri sorteggiati siano il 'due e il tre' ?*
3. *Qual è la probabilità che il numero del dado rosso sia maggiore del numero del dado verde?*
4. *Qual è la probabilità che sommando i numeri di entrambi i dadi si ottenga un numero fissato* k, $2 \leq k \leq 12$*?*

R

Esercizio 1.17 (**Lancio di tre dadi. Galileo, 1620 circa**)**.** *Lanciando tre dadi esistono sei modi differenti per totalizzare somma* 9 *e sei modi per totalizzare somma* 10*. Tuttavia si verifica più frequentemente la somma dieci. Perché?*

$\boxed{R}$

Esercizio 1.18. *Da un'urna contenente* 10 *palline nere e* 5 *palline verdi si estraggono tre palline contemporaneamente. Si considerino i seguenti eventi:*

$N =$*'almeno una delle tre palline estratte è nera'*

$V =$*'almeno una delle tre palline estratte è verde'*

Calcolare $P(N)$*,* $P(V)$*,* $P(V|N)$*,* $P(N|V)$*.*

Esercizio 1.19. *(Esame di Stato 2003, Indirizzo: Scientifico Tecnologico, Progetto Brocca)*

Tre scatole A*,* B *e* C *contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.* A *contiene 2000 lampade con il* 5% *di esse difettose,* B *ne contiene 500 con il* 20% *difettose e* C *ne contiene 1000 con il* 10% *difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?*

Esercizio 1.20 (Il problema delle tre carte)**.** *Supponiamo di avere tre carte da gioco, la prima con due facce rosse, la seconda con una faccia rossa e l'altra nera, la terza con due facce nere. Si sceglie una carta a caso e la si mette sul tavolo. Trovare la probabilità che la faccia coperta sia rossa nell'ipotesi che la faccia visibile sia rossa.*

Esercizio 1.21. *(Esame di Stato 2005, Indirizzo: Scientifico Tecnologico, Progetto Brocca)*

Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? Qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

2 Soluzioni

Esercizio 1.1

I casi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di cinque elementi che si possono formare da un insieme di novanta numeri, cioè $\dbinom{90}{5}$

(a) Un ambo è un determinato sottoisieme di due elementi, diciamo $\{a, b\}$ dove a e b sono due fra i novanti numeri contenuti nell'urna. I casi favorevoli sono i sottoinsiemi di cinque elementi contenenti a, b, cioè

$$\{a, b, *, *, *\}$$

dove '$*, *, *$ ' indicano tre numeri qualsiasi, diversi da a e b. Quindi, i casi favorevoli sono i sottoinsiemi di cinque elementi contenenti a, b; in tutto sono $\dbinom{88}{3}$. La probabilità di fare ambo è

$$p = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = 2,5 \cdot 10^{-3} = 0,0025$$

(b) Il ragionamento è analogo a quello del caso precedente: i casi favorevoli sono tutti i sottoinsiemi di cinque elementi contenenti a, b, c (i tre numeri che formano il terno). Essi sono tanti quanti i sottoinsiemi di due elementi che si possono formare da un insieme di 87 elementi, cioè $\dbinom{87}{2}$. Quindi la probabilità di fare terno è

$$p = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \sim 8,5 \cdot 10^{-5} = 0,000085$$

(c) In questo caso il caso favorevole è uno e uno soltanto; la probabilità richiesta è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{5}} \sim 2,3 \cdot 10^{-8} = 0,000000023$$

Esercizio 1.2

I casi possibili sono tanti quanti i sottoinsiemi di tre elementi che si possono formare da un insieme di trentasei, cioè $\dbinom{36}{3}$.

(a) Un asso si può scegliere in $\dbinom{4}{1} = 4$ modi diversi, mentre le rimanenti due carte in $\dbinom{32}{2}$ modi. Quindi i casi favorevoli sono $\dbinom{4}{1} \cdot \dbinom{32}{2}$; la probabilità richiesta è

$$p = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} = 0,2778$$

(b) *Primo metodo.* Sia $E =$ estrazione di tre carte con almeno un asso e
$\overline{E} =$ estrazione di tre carte senza assi.

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{\binom{32}{3}}{\binom{36}{3}} = 0,3053$$

Secondo metodo. Siano

$E_1 =$ estrazione di tre carte con esattamente un asso,

$E_2 =$ estrazione di tre carte con esattamente due assi,

$E_3 =$ estrazione di tre carte con esattamente tre assi.

Le rispettive probabilità sono le seguenti

$$p(E_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} = 0,2778$$

$$p(E_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{32}{1}}{\binom{36}{3}} = 0,0269$$

$$p(E_3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{32}{0}}{\binom{36}{3}} = 0,0006$$

$$p(E) = p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = 0,2778 + 0,0269 + 0,0006 = 0,3053$$

Esercizio 1.3

Gli eventi possibili sono $\binom{36}{18}$ ossia tanti quanti i sottoinsiemi di diciotto elementi scelti in un insieme di trentasei.

In entrambi i mazzi vi è lo stesso numero di carte rosse e nere se e solo se ogni mazzo contiene 9 carte rosse e 9 carte nere; le scelte totali che realizzano questa situazione sono $\binom{18}{9}^2$. La probabilità richiesta è

$$p = \frac{\binom{18}{9}^2}{\binom{36}{18}} = 0,260$$

Esercizio 1.4

1. Numero palline azzurre $= 4$.
2. Numero palline azzurre $= 3$.

Esercizio 1.6

$p = 0,475$.

Esercizio 1.7

Numero palline rosse = 11.

Esercizio 1.8 Gli eventi possibili (tutti equiprobabili) sono tanti quanti i sottoisiemi di 3 elementi che si possono formare da un insieme di 40 elementi, cioè $\binom{40}{3}$. Gli eventi favorevoli (sottoinsiemi di 3 carte di cui una solamente è un asso) si può determinare nel seguente modo: un asso può essere scelto in $\binom{4}{1}$ modi diversi mentre le altre due carte possono essere scelte in $\binom{36}{2}$ modi diversi. Quindi i casi favorevoli sono $\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{2}$. La probabilità di estrarre esattamente un asso è

$$p = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{2}}{\binom{40}{3}} \approx 0,2550$$

poco più di una possibilità su quattro.

Esercizio 1.9 Gli eventi possibili sono, come nell'esercizio precedente, $\binom{40}{3}$. Per determinare i casi favorevoli si può ragionare così

Primo metodo.

Si considerino i tre seguenti eventi incompatibili

A_1 : le tre carte estratte contengono esattamente un asso.

A_2 : le tre carte estratte contengono esattamente due assi.

A_3 : le tre carte estratte contengono esattamente tre assi.

Con argomentazioni simili a quelle dell'esercizio precedente si ottiene

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{2}}{\binom{40}{3}} \approx 0,2550 \qquad P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{1}}{\binom{40}{3}} \approx 0,0218 \qquad P(A_3) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{0}}{\binom{40}{3}} \approx 0,0004$$

L'evento richiesto è $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; utilizzando il teorema della della somma si ottiene

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \approx 0,2773$$

Secondo metodo.

Il complementare $\overline{A}$ di A è : 'le tre carte estratte non contengono assi'.

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{3}} \approx 0,7227$$

Quindi, la probabilità richiesta è

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{3}} \approx 0,2773$$

Esercizio 1.10 Nel caso generale, i cubetti sono n^3, tutte le facce (eventi possibili) sono $6n^3$, le facce colorate (eventi favorevoli) sono $6n^2$. La probabilità cercata è $\frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}$.

Esercizio 1.12 Lo spazio degli eventi Ω è formato da tutte le possibili cinquine che si possono realizzare con i 90 numeri del lotto: in tutto sono $\binom{90}{5}$. Tra queste cinquine, quelle che realizzano il terno prefissato sono $\binom{87}{2}$ cioè tante quanti i modi di scegliere i restanti due numeri tra gli 87 rimasti. In definitiva la probabilità di fare terno è

$$P = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = 0,00008512$$

Esercizio 1.13 A ogni giocatore vengono distribuite cinque carte; gli eventi possibili sono allora $\binom{32}{5}$. Per trovare tutti gli eventi favorevoli (sequenze del tipo $XXXYY$) possiamo effettuare una serie di scelte successive nel modo seguente:

- il valore del tris può essere scelto in 8 modi diversi;
- il valore della coppia può essere scelto in 7 modi diversi;
- le carte che formano il tris possono essere scelte in $\binom{4}{3} = 4$ modi diversi;
- le carte che formano la coppia possono essere scelte in $\binom{4}{2} = 6$ modi diversi.

Esistono pertanto, $8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 = 1.344$ modi diversi di fare full e di conseguenza la probabilità di avere un full servito è

$$P = \frac{1.344}{\binom{32}{5}} = 0,006674 \sim 0,66\%.$$

Esercizio 1.14

Esercizio 1.15 Si consideri l'evento

$A =$ "In un insieme di n persone almeno due di esse compiono gli anni lo stesso giorno".

Se $n > 365$ almeno due persone devono compiere gli anni lo stesso giorno e di conseguenza $P(A) = 1$.

Se $n \leq 365$ si consideri il complementare dell'evento A, cioè

$\overline{A} =$ "Tutte le n persone compiono gli anni in giorni diversi"

e si calcoli la probabilità $P(\overline{A})$. Gli *eventi possibili* sono 365^n, tanti quante le *funzioni* $[n] \longrightarrow [365]$ (un evento elementare è rappresentabile mediante una funzione che a ognuna delle n persone associa il giorno del suo compleanno, cioè un numero da 1 a 365). Gli *eventi favorevoli* invece, sono tanti quante le *funzioni iniettive* $[n] \longrightarrow [365]$, cioè $365^{\underline{n}}$. Quindi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365^{\underline{n}}}{365^n}$$

Tabulando il risultato per qualche n si ottiene

n	P(A)
10	0,11694
23	0,50729
70	0,99916

Per $n = 70$ la probabilità che almeno due persone compiano gli anni nel medesimo giorno è circa del $99,9\%$. Il risultato è , per certi versi, sorprendente.

Esercizio ?? $P = \frac{11}{30}$.

Esercizio ?? La probabilità che vengano estratte due palline azzurre è $\frac{9}{38}$, la probabilità che la prima pallina sia azzurra e la seconda rossa è $\frac{5}{19}$, eccetera.

Nel caso generale, si considerino gli eventi

$A_1 =$'la prima pallina estratta è azzurra '

$R_1 =$'la prima pallina estratta è rossa '

$A_2 =$'la seconda pallina estratta è azzurra '

$R_2 =$'la seconda pallina estratta è rossa '.

Allora,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{a}{(a+r)} \cdot \frac{(a-1)}{(a+r-1)}$$
$$P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2|A_1) = \frac{a}{(a+r)} \cdot \frac{r}{(a+r-1)}$$

eccetera.

Esercizio ?? A e B non sono indipendenti.

Esercizio ?? A e B sono indipendenti; A e C non sono indipendenti; B e C sono indipendenti.

Esercizio 1.18 $P(N) = \frac{89}{91}$, $P(V) = \frac{67}{91}$, $P(V|N) = \frac{65}{89}$, $P(N|V) = \frac{65}{67}$.

Esercizio 1.19 $P = \frac{7}{60}$.

Esercizio 1.20 Si considerino gli eventi

$A =$ 'la faccia visibile della carta scelta è di colore rosso '

$B =$ 'la faccia nascosta della carta scelta è di colore rosso '

$P(A) = \frac{1}{2}$ (le facce delle carte sono sei, di cui tre rosse). L'evento $A \cap B$ è 'la faccia visibile e la faccia nascosta della carta scelta sono di colore rosso'; $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (si tratta di scegliere una carta, quella con le due facce rosse, su tre carte a disposizione). Il problema chiede di trovare $P(B|A)$; abbiamo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 1.21 Se $A =$ 'fare 10 con due dadi' , $B =$ 'fare due 10 in sei lanci' e $C =$ 'fare almeno due 10 in sei lanci' abbiamo $P(A) = \frac{1}{12}$; $P(B) \sim 0,735$; $P(C) \sim 0,083$.